УДК 532.5

О переменных Дарбу-Нийенхёйса на пуассоновом многообразии $so^*(4)$

А. В. Вершилов, А. В. Цыганов
С.-Петербургский государственный университет, Россия
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9
E-mail: alexander.vershilov@gmail.com, andrey.tsiganov@gmail.com

Получено 19 июля 2007 г.

Проведена полная классификация квадратичных бивекторов Пуассона на многообразиях $so^*(4)$ и $e^*(3)$, имеющих общее слоение на симплектические листы с каноническим бивектором Ли–Пуассона. Найдены переменные разделения для нескольких соответствующих би-интегрируемых систем.

Ключевые слова: интегрируемые системы, би-гамильтонова геометрия, разделение переменных.

A. V. Vershilov, A. V. Tsiganov

On the Darboux–Nijenhuis Variables on the Poisson Manifold $so^*(4)$

We classify quadratic Poisson structures on $so^*(4)$ and $e^*(3)$, which have the same foliations by symplectic leaves as canonical Lie-Poisson tensors. The separated variables for some of the corresponding bi-integrable systems are constructed.

Keywords: integrable system, bi-hamiltonian geometry, separation of variables.
Mathematical Subject Classifications: 70H20, 70H06, 37K10.

1. Введение

Рассмотрим пуассоново многообразие (M, P_0), где P_0 — бивектор Пуассона, который удовлетворяет условию Якоби
$$[P_0, P_0] = 0.$$
Здесь $[.,.]$ — скобка Схоутена на алгебре мультивекторных полей на многообразии M. Скобка Схоутена $[P, Q]$ двух бивекторов P и Q является тривектором или контравариантным кососимметричным тензором третьего ранга, компоненты которого в локальных координатах $z = (z_1, \ldots, z_n)$ имеют вид

$$[P,Q]^{ijk} = -\sum_{m=1}^{\dim M}\left(Q^{mk}\frac{\partial P^{ij}}{\partial z^m} + P^{mk}\frac{\partial Q^{ij}}{\partial z^m} + \mathrm{cycle}(i,j,k)\right).$$

Би-гамильтоновым многообразием M называется гладкое многообразие, снабженное двумя совместными бивекторами Пуассона P_0 и P_1, которые удовлетворяют следующей системе уравнений:
$$[P_0, P_0] = [P_0, P_1] = [P_1, P_1] = 0. \tag{1.1}$$
Классификация совместных бивекторов Пуассона и соответствующих им би-интегрируемых систем с интегралами движения

$$\{H_i, H_j\}_0 = \{H_i, H_j\}_1 = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

является объектом интенсивных исследований в последние годы. Естественно, что непосредственно решить уравнения (1.1) в общем случае достаточно сложно. Поэтому мы можем попытаться упростить задачу классификации, используя топологические и геометрические свойства многообразия (M, P_0).

Бивектор P_1, удовлетворяющий условию совместности $[P_0, P_1] = 0$, называется 2-коциклом в когомологии Пуассона–Лихнеровича, определяемой бивектором P_0 на многообразии M [6]. Производная Ли от бивектора P_0 вдоль какого-либо векторного поля X на многообразии M

$$P_1 = \mathcal{L}_X(P_0) \tag{1.2}$$

называется 2-когграницей, которая является 2-коциклом, задаваемым векторным полем Лиувилля X. Для таких бивекторов P_1 система уравнений (1.1) редуцируется до единственного уравнения второго порядка для векторного поля X

$$[\mathcal{L}_X(P_0), \mathcal{L}_X(P_0)] = 0, \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{L}_X^2(P_0), P_0] = 0. \tag{1.3}$$

Напомним, что производная Ли бивектора P вдоль векторного поля X выглядит следующим образом:
$$\big(\mathcal{L}_X(P)\big)^{ij} = \sum_{m=1}^{\dim M}\left(X^m\frac{\partial P^{ij}}{\partial z^m} - P^{mj}\frac{\partial X^i}{\partial z^m} - P^{im}\frac{\partial X^j}{\partial z^m}\right).$$

Вторая группа в когомологии Пуассона–Лихнеровича $H^2_{P_0}(M)$ на многообразии M совпадает с множеством бивекторов P_1, которые являются решением уравнения $[P_0, P_1] = 0$, но не являются решениями вида $P_1 = \mathcal{L}_X(P_0)$. Мы можем считать $H^2_{P_0}(M)$ пространством нетривиальных инфинитезимальных деформаций данной пуассоновой структуры на многообразии M.

Для регулярных пуассоновых многообразий вторая и третья группы в когомологии Пуассона–Лихнеровича тесно связаны с топологией симплектических листов и изменением симплектической структуры при переходе с одного листа на другой [12].

Если группа когомологий $H^2_{P_0}(M)$ тривиальна, то все решения системы уравнений (1.1) можно построить с помощью решений уравнения (1.3).

В данной работе мы опишем некоторые частные решения уравнения (1.3) и обсудим разделение переменных для соответствующих этим решениям би-интегрируемых систем на пуассоновом многообразии $so^*(4)$.

2. Бивекторы Ли–Пуассона на $so^*(4)$.

Алгебра $so(4)$ является полупростой алгеброй Ли, и, следовательно, открытое плотное подмногообразие дуального пространства $so^*(4)$ является регулярным и трансверсально постоянным пуассоновым многообразием [12].

Напомним, что конечномерное пуассоново многообразие M является регулярным, если симплектическое слоение, определяемое бивектором Пуассона P, имеет постоянный ранг. Пусть k обозначает коранг симплектического слоения, тогда в окрестности каждой точки регулярного многообразия существует k независимых функций Казимира C_i, которые являются постоянными на каждом из симплектических листов. Мы также напомним, что пуассоново многообразие называется трансверсально постоянным, если существует k векторных полей Z_j, которые трансверсальны к симплектическим листам и являются симметриями бивектора P, т. е. $\mathcal{L}_{Z_j}(P_0) = 0$. Любое регулярное, трансверсально постоянное пуассоново многообразие локально представимо в виде произведения симплектических листов и абелевой группы, порождаемой векторными полями Z_j [12].

На многообразии $M = so^*(4) = so^*(3) \oplus so^*(3)$ введем локальные координаты $z = (s, t)$, где $s = (s_1, s_2, s_3)$ и $t = (t_1, t_2, t_3)$ — два вектора из $\mathbb{R}^3$. Как обычно, мы отождествляем $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ и $(so(3), [.,.])$, используя хорошо известный изоморфизм алгебр Ли

$$z = (z_1, z_2, z_3) \to z_M = \begin{pmatrix} 0 & z_3 & -z_2 \\ -z_3 & 0 & z_1 \\ z_2 & -z_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\wedge$ — векторное произведение на $\mathbf{R}^3$ и $[.,.]$ — коммутатор матриц в $so(3)$. В этих координатах канонический бивектор Ли–Пуассона на $so^*(4)$ принимает вид

$$P_0 = \begin{pmatrix} s_M & 0 \\ 0 & t_M \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Симплектические листы общего положения являются аффинными плоскостями коразмерности два и являются поверхностями уровней двух глобально определённых функций Казимира

$$C_1 = \langle s, s\rangle \equiv |s|^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} s_i^2, \qquad C_2 = \langle t, t\rangle, \qquad P_0 dC_{1,2} = 0. \tag{2.3}$$

В работе [10] переопределенная система уравнений (1.1) на многообразии $so^*(4)$ была явно разрешена в классе линейных бивекторов Ли–Пуассона P_1, порождающих нетривиальные би-интегрируемые системы. Конечно, в этом случае все 2-коциклы являются 2-кограницами и группа $H^2_{P_0}$ тривиальна.

Согласно [10] системы Фрама–Шоттки, Стеклова и Пуанкаре являются би-интегрируемыми, а соответствующие им бивекторы Пуассона $P_1 = \mathcal{L}_X(P_0)$ порождаются векторными полями $X_j = \sum X_j^i \partial_i$ со следующими компонентами:

$$X_1 = (a_1t_1, a_2t_2, a_3t_3, a_1s_1, a_2s_2, a_3s_3),$$

$$X_2 = (\mathcal{X}_1, a\mathcal{X}_2), \qquad\qquad a, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C},$$

$$X_3 = (0, 0, at_3, 0, 0, -as_3)\,,$$

где

$$\mathcal{X}_1 = (a_1t_1 + \frac{a_1(a_2^2+a_3^2)}{a_2a_3}s_1, a_2t_2 + \frac{a_2(a_1^2+a_3^2)}{a_1a_3}s_2, a_3t_3 + \frac{a_3(a_1^2+a_2^2)}{a_1a_2}s_3),$$

$$\mathcal{X}_2 = (-a_2a_3s_1 - \frac{a_2^2+a_3^2}{2}t_1, -a_1a_3s_2 - \frac{a_1^2+a_3^2}{2}t_2, -a_1a_2s_3 - \frac{a_1^2+a_2^2}{2}t_3).$$

Оставшиеся четыре решения системы (1.1) связаны со следующими векторными полями

$$X_4 = ((a_3+a_2)s_1, (a_3+a_1)s_2, (a_1+a_2)s_3, (b_2+b_3)t_1, (b_1+b_3)t_2, (b_1+b_2)t_3),$$

$$X_5 = (-\frac{a}{2}s_1 + b_1t_1, -\frac{a}{2}s_2 + b_2t_2, b_3t_3, b_1s_1 - \frac{a}{2}t_1, b_2s_2 - \frac{a}{2}t_2, (b_3-a)s_3 - at_3),$$

$$X_6 = (a_2s_1, a_1s_2, (a_1+a_2)s_3 - bt_3, ct_1, ct_2, 0),$$

$$X_7 = (as_1, as_2, 0, c_1s_3 + bt_1, c_2s_3 + bt_2, 0),$$

где $b_1 = \pm b_2$ для векторного поля X_5. Соответствующие би-интегрируемые системы с квадратичными интегралами движения были полностью описаны в [10].

Основная проблема при классификации данных пуассоновых структур состоит в том, что векторные поля X_k и соответствующие им бивекторы $P_1 = \mathcal{L}_{X_k}P_0$ определены с точностью до канонических преобразований векторов s и t, сохраняющих канонический бивектор P_0.

3. Квадратичные бивекторы Пуассона на $so^*(4)$ и $e^*(3)$

После изучения линейных пуассоновых структур естественно перейти к рассмотрению квадратичных пуассоновых структур. Однако непосредственно решить систему переопределенных алгебраических уравнений (1.1) в квадратичном случае достаточно непросто, даже используя современные компьютеры с соответствующим программным обеспечением.

Поэтому всюду далее мы будем предполагать, что

$$P_1 dC_{1,2} = 0. \tag{3.1}$$

Это означает, что мы будем искать бивекторы Пуассона P_1, которые определяют такое же симплектическое слоение, как и канонический бивектор P_0. Дополнительное ограничение на бивектор $P_1 = \mathcal{L}_X(P_0)$ является линейным уравнением для векторного поля X, которое позволяет нам найти все решения следующей системы уравнений:

$$\mathcal{L}_X(P_0)dC_{1,2} = -P_0 dX(C_{1,2}) = 0 \qquad \text{и} \qquad [\mathcal{L}_X^2(P_0), P_0] = 0. \tag{3.2}$$

Любое решение X этой системы порождает бивектор Пуассона $P_1 = \mathcal{L}_X(P_0)$, удовлетворяющий уравнениям (1.1) и (3.1).

Как и ранее, основной проблемой является классификация решений относительно канонических преобразований. Мы решим эту проблему с помощью переменных Дарбу–Нийенхёйса, которые однозначно определяются парой бивекторов Пуассона P_0 и P_1.

3.1. Переменные Дарбу–Нийенхёйса

Рассмотрим би-гамильтоново многообразие M, снабженное невырожденным бивектором Пуассона P_0. Переменные (q_i, p_i) называются координатами Дарбу–Нийенхёйса, если они являются каноническими относительно симплектической формы

$$\omega = P_0^{-1} = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

и приводят оператор рекурсии $N = P_1 P_0^{-1}$ к диагональной форме:

$$N = \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \otimes dq_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \otimes dp_i \right). \tag{3.3}$$

Это означает, что скобки Пуассона имеют вид:

$$\{q_i, p_j\}_0 = \delta_{ij}, \qquad \{q_i, p_j\}_1 = q_i \delta_{ij}, \qquad \{q_i, q_j\}_{0,1} = \{p_i, p_j\}_{0,1} = 0\,. \tag{3.4}$$

Мы можем принять уравнения (3.4) за определение переменных Дарбу–Нийенхейса на би-гамильтоновом многообразии M с вырожденными бивекторами Пуассона P_0 и P_1.

В соответствии с определением (3.3) координаты q_i являются собственными числами оператора рекурсии N, т. е. они являются корнями минимального характеристического полинома N, который в нашем случае достаточно легко построить. Для того чтобы найти соответствующие им импульсы $p_{1,2}$, мы можем попытаться решить уравнения (3.4) относительно функций $p_{1,2}(s,t)$. Стандартная вычислительная проблема заключается в том, что импульсы $p_{1,2}$ определены с точностью до канонических преобразований $p_i \to p_i + f_i(q_i)$, где f_i произвольная функция от q_i.

3.2. Аналог переменных Андуайе на $so^*(4)$

Для того чтобы построить оператор рекурсии N на симплектических листах общего положения алгебры $so^*(4)$, мы будем использовать следующий аналог переменных Андуайе [1, 2]:

$$u_1 = s_3 + t_3, \qquad v_1 = -i \ln \left(\frac{s_2 + is_1 + t_2 + it_1}{\sqrt{(t_1+s_1)^2 + (s_2+t_2)^2}} \right) \tag{3.5}$$

и

$$\begin{aligned} u_2 &= \sqrt{C_1 + C_2 + 2s_1t_1 + 2s_2t_2 + 2s_3t_3}, \\ v_2 &= \arccos \left(\frac{t_3C_1 - s_3C_2 + (t_3 - s_3)(s_1t_1 + s_2t_2 + s_3t_3)}{\sqrt{(t_1+s_1)^2 + (s_2+t_2)^2}\sqrt{C_1C_2 - (s_1t_1 + s_2t_2 + s_3t_3)^2}} \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Обратное преобразование в координатах

$$J_i = s_i + t_i, \qquad x_i = \varkappa(s_i - t_i), \qquad \varkappa \in \mathbb{C}\,, \tag{3.7}$$

выглядит следующим образом:

$$J_1 = \sqrt{u_2^2 - u_1^2}\sin v_1, \qquad J_2 = \sqrt{u_2^2 - u_1^2}\cos v_1, \qquad J_3 = u_1$$

и

$$x_1 = \frac{\mathcal{C}_1\sqrt{1-\dfrac{u_1^2}{u_2^2}} + u_1\sqrt{\mathcal{C}_2 - \varkappa^2 u_2^2 - \dfrac{\mathcal{C}_1^2}{u_2^2}}\cos v_2}{u_2}\sin v_1 + \sqrt{\mathcal{C}_2 - \varkappa^2 u_2^2 - \frac{\mathcal{C}_1^2}{u_2^2}}\sin v_2\cos v_1\,,$$

$$x_2 = \frac{\mathcal{C}_1\sqrt{1-\dfrac{u_1^2}{u_2^2}} + u_1\sqrt{\mathcal{C}_2 - \varkappa^2 u_2^2 - \dfrac{\mathcal{C}_1^2}{u_2^2}}\cos v_2}{u_2}\cos v_1 + \sqrt{\mathcal{C}_2 - \varkappa^2 u_2^2 - \frac{\mathcal{C}_1^2}{u_2^2}}\sin v_2\sin v_1\,,$$

$$x_3 = \mathcal{C}_1\frac{u_1}{u_2^2} - \sqrt{1-\frac{u_1^2}{u_2^2}}\sqrt{\mathcal{C}_2 - \varkappa^2 u_2^2 - \frac{\mathcal{C}_1^2}{u_2^2}}\cos v_2.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= x_1J_1 + x_2J_2 + x_3J_3 = \varkappa(C_1 - C_2), \\ \mathcal{C}_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + \varkappa^2(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) = 2\varkappa^2(C_1 + C_2). \end{aligned} \tag{3.8}$$

В координатах (x, J) исходный канонический бивектор P_0 (2.2) на многообразии $so^*(4)$ имеет вид:

$$P_0 = \begin{pmatrix} \varkappa^2 J_M & x_M \\ x_M & J_M \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

При $\varkappa \to 0$ этот бивектор переходит в канонический бивектор P_0 на многообразии $e^*(3)$, которое является двойственным пространством к алгебре Ли $e(3)$ евклидовой группы $E(3)$. После контракции $\varkappa \to 0$ наши переменные u, v (3.5–3.6) совпадают с переменными Андуайе на многообразии $e^*(3)$ [1, 2].

Проекция канонического бивектора P_0 (3.9) на любой из симплектических листов общего положения многообразия $M = so^*(4)$ или $M = e(3)$ в координатах (u, v) (3.5–3.6) имеет вид:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, используя переменные Андуайе, мы можем ввести каноническую симплектическую форму $\omega = P_0^{-1}$ на любом из симплектических листов общего положения.

Более того, так как симплектическое слоение бивекторов P_0 и P_1 одинаково (3.1), то, используя переменные Андуайе, мы можем также легко построить и проекцию бивектора P_1, и оператор рекурсии $N = P_1P_0^{-1}$, и переменные Дарбу-Нийенхёйса на любом из симплектических листов общего положения.

3.3. Первый бивектор

Мы решали систему уравнений (3.2) в классе квадратичных векторных полей X, используя одну из современных компьютерных систем символьных вычислений, и получили три решения.

Пусть a и b — вещественные векторы, α, β — произвольные параметры. Векторное поле $X = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ с компонентами

$$\mathcal{X}_1 = \alpha\big(s \wedge (a \wedge s)\big) + \beta\langle b, t\rangle(s \wedge a), \qquad \mathcal{X}_2 = \alpha\big(t \wedge (b \wedge t)\big) \tag{3.10}$$

определяет первый бивектор Пуассона, удовлетворяющий уравнениям (1.1) и (3.1):

$$P_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\alpha\langle a, s\rangle s_M & \beta\big[(a \wedge s) \otimes (b \wedge t)\big] \\ -\beta\big[(a \wedge s) \otimes (b \wedge t)\big]^T & 2\alpha\langle b, t\rangle t_M \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Используя ортогональные преобразования векторов

$$s \to s' = U_1 s, \qquad \text{и} \qquad t \to t' = U_2 t, \tag{3.12}$$

где $U_{1,2}$ — ортогональные матрицы, мы всегда можем привести a и b к виду:

$$a = (0, 0, a_3), \qquad b = (0, 0, b_3).$$

Построив проекцию бивектора $P_1^{(1)}$ и соответствующий оператор рекурсии $N^{(1)}$, мы получим следующие координаты Дарбу–Нийенхёйса:

$$q_1 = 2\alpha a_3 s_3, \qquad q_2 = 2\alpha b_3 t_3 \tag{3.13}$$

и импульсы

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2\alpha\, a_3} \arctan\left(\frac{s_1}{s_2}\right) - \frac{\beta a_3}{4\alpha^2\, b_3} \ln(a_3 s_3 - b_3 t_3), \\ p_2 &= \frac{1}{2\alpha\, b_3} \arctan\left(\frac{t_1}{t_2}\right) + \frac{\beta\, a_3}{4\alpha^2\, b_3} \ln(a_3 s_3 - b_3 t_3), \end{aligned} \tag{3.14}$$

которые удовлетворяют условиям (3.4). Используя преобразование сдвига

$$P_1^{(1)} \to \lambda P_1^{(1)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$

мы всегда можем положить $\alpha = 1$ или $\beta = 1$.

3.4. Второй бивектор

Пусть a и b два комплексных вектора удовлетворяющих условию

$$\langle a, b\rangle = \langle b, b\rangle = 0. \tag{3.16}$$

Векторное поле $X = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ с компонентами

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \frac{1}{2}\, s \wedge (a \wedge s), \\ \mathcal{X}_2 &= -\frac{1}{2}\, t \wedge (a \wedge t) + i|a|^{-1}\langle a, s\rangle(a \wedge t) - i\langle b, s\rangle(b \wedge t), \end{aligned} \tag{3.17}$$

определяет второй бивектор Пуассона, удовлетворяющий уравнениям (1.1) и (3.1):

$$P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \langle a,s\rangle s_M & -i\Big[|a|^{-1}(a\wedge s)\otimes(a\wedge t) - (b\wedge s)\otimes(b\wedge t)\Big] \\ i\Big[|a|^{-1}(a\wedge s)\otimes(a\wedge t) - (b\wedge s)\otimes(b\wedge t)\Big]^T & -\langle a,t\rangle t_M \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

здесь $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ и $(x \otimes y)_{ij} = x_i y_j$.

Используя ортогональные преобразования (3.12) и сдвиг (3.15), мы всегда можем положить

$$a = (0, 0, 1), \qquad b = (b_1, ib_1, 0)\,.$$

В этом случае переменные Дарбу-Нийенхёйса являются корнями минимального характеристического полинома оператора рекурсии $N^{(2)}$

$$\mathcal{A}(\lambda) = (\lambda - q_1)(\lambda - q_2) = \lambda^2 + (t_3 - s_3)\lambda + (t_1 + it_2)(s_1 + is_2)b_1^2 - s_3 t_3, \tag{3.19}$$

в то время как соответствующие импульсы равны

$$p_{1,2} = -i \ln \mathcal{B}(\lambda = q_{1,2}), \tag{3.20}$$

где

$$\mathcal{B}(\lambda) = \big(s_1 - is_2 + b_1^2(t_1 + it_2)\big)\lambda + t_3(s_1 - is_2) + b_1^2 s_3(t_1 + it_2).$$

Как и ранее, эти переменные удовлетворяют условиям(3.4). Мы можем легко доказать этот факт, используя следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{B}(\mu)\}_k &= \frac{i}{\lambda - \mu}\Big(\lambda^k \mathcal{B}(\lambda)\mathcal{A}(\mu) - \mu^k \mathcal{A}(\lambda)\mathcal{B}(\mu)\Big), \\ \{\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{A}(\mu)\}_k &= \{\mathcal{B}(\lambda)\mathcal{B}(\mu)\}_k = 0, \qquad k = 0, 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Все детали вычислений могут быть найдены, например, в работе [11].

Преобразование $P_1^{(2)} \to P_1^{(2)^*}$ приводит к комплексному сопряжению координат $q_j \to q_j^*$ и вектора $b \to b^*$.

3.5. Третий бивектор

Пусть a, b и c — комплексные векторы такие, что

$$\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle = \langle b, b\rangle = \langle c, c\rangle = 0, \qquad b \wedge c \neq 0. \tag{3.22}$$

Векторное поле $X = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ с компонентами

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \frac{1}{2}\, s \wedge (a \wedge s), \\ \mathcal{X}_2 &= \frac{1}{2}\, t \wedge (a \wedge t) - i|a|^{-1}\langle a, s\rangle(a \wedge t) - i\langle b, s\rangle(c \wedge t) \end{aligned} \tag{3.23}$$

определяет бивектор Пуассона, удовлетворяющий уравнениям (1.1) и (3.1):

$$P_1^{(3)} = \begin{pmatrix} \langle a,s\rangle s_M & i\Big[|a|^{-1}(a\wedge s)\otimes(a\wedge t) + (b\wedge s)\otimes(c\wedge t)\Big] \\ -i\Big[|a|^{-1}(a\wedge s)\otimes(a\wedge t) + (b\wedge s)\otimes(c\wedge t)\Big]^T & \langle a,t\rangle t_M \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Используя ортогональные преобразования (3.12) и сдвиг (3.15), мы всегда можем положить

$$a = (0, 0, 1), \qquad b = (b_1, ib_1, 0), \qquad c = (c_1, -ic_1, 0)\,.$$

В этом случае координаты Дарбу–Нийенхёйса являются корнями минимального характеристического полинома оператора рекурсии $N^{(3)}$

$$\mathcal{A}(\lambda)=(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)=\lambda^2-(s_3+t_3)\lambda+c_1b_1(t_1-it_2)(s_1+is_2)+s_3t_3\,. \tag{3.25}$$

Сопряженные моменты определяются следующим образом:

$$p_{1,2}=-i\ln\mathcal{B}(\lambda=q_{1,2}), \tag{3.26}$$

где

$$\mathcal{B}(\lambda)=\big((s_1-is_2)+c_1b_1(t_1-it_2)\big)\lambda+c_1b_1(t_1-it_2)s_3-(s_1-is_2)t_3\,.$$

Легко увидеть, что полином $\mathcal{A}(\lambda)$ (3.19) и полином $\mathcal{A}(\lambda)$ (3.25) совпадают с точностью до следующего канонического преобразования:

$$t_2\to -t_2,\qquad t_3\to -t_3\,,\qquad \text{если}\quad b_1^2=c_1b_1. \tag{3.27}$$

Таким образом, соответствующие переменные Дарбу–Нийенхёйса и, следовательно, бивекторы $P_1^{(2)}$ (3.18) и $P_1^{(3)}$ (3.24) эквивалентны с точностью до канонического преобразования.

3.6. Квадратичные бивекторы Пуассона на $e^*(3)$

Выпишем явно канонический бивектор Пуассона на многообразии $M=e^*(3)$

$$P_0=\begin{pmatrix} 0 & x_M \\ x_M & J_M \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

и отвечающие ему функции Казимира

$$C_1=|x|^2,\qquad C_2=\langle x,J\rangle.$$

На многообразии $M=e^*(3)$ система уравнений (3.2) имеет только одно нетривиальное решение в классе квадратичных векторных полей.

Предложение 1. *Если a и b — векторы, такие что $|a|=0$ и α — произвольный параметр, тогда бивектор*

$$P_1=\begin{pmatrix} \langle a,x\rangle, & (x\wedge J)\otimes a+\langle a,J\rangle x_M+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\langle a,b\rangle\right)\left(x\otimes x-|x|^2\right)+\alpha(b\wedge x)\otimes(a\wedge x) \\ *, & \langle a,J\rangle J_M+\langle b,x\rangle x_M+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\langle a,b\rangle\right)(x\wedge J)_M-\alpha\Big((a\wedge x)\wedge(b\wedge J)\Big)_M \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

удовлетворяет (1.1) *и* (3.1).

Координаты Дарбу–Нийенхёйса являются корнями следующего минимального характеристического полинома оператора рекурсии N:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda)\,=\,&\lambda^2+\Big(\langle a,J\rangle-\langle a\wedge b,x\rangle\alpha\Big)\lambda+\frac{\alpha^2\langle a,b\rangle}{4}\Big(\langle a,x\rangle\langle b,x\rangle-\langle a\wedge xv,b\wedge x\rangle\Big)\\&+\,\frac{\alpha}{2}\langle a,b\rangle\langle a\wedge x,J\rangle-\frac{1}{2\alpha}\langle a\wedge x,J\rangle+\frac{1}{4\alpha^2}\langle x,x\rangle-\frac{1}{2}\langle a,x\rangle\langle b,x\rangle.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Линейные канонические преобразования $e^*(3)$ состоят из преобразований

$$x\to\alpha\,\mathrm{U}\,x\,,\qquad J\to\mathrm{U}\,J\,, \tag{3.31}$$

где α — произвольный параметр и U — ортогональная матрица, и сдвига

$$x \to x\,, \qquad J \to J + \mathrm{S}\,x\,, \tag{3.32}$$

где S — произвольная 3×3 антисимметричная постоянная матрица [5]. Используя эти преобразования векторов x и J, мы всегда можем положить:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \lambda^2 + J_3\lambda + \frac{1}{2\alpha}(x_2J_1 - x_1J_2) + \frac{1}{4\alpha^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Координаты Дарбу–Нийенхёйса $q_{1,2}$ являются корнями данного полинома. Соответствующие импульсы $p_{1,2}$ не построены, так как нам не удалось разрешить уравнения (3.4) относительно функций $p_{1,2}(x, J)$.

3.7. Бивектора Пуассона старшего порядка

Для всех обсужденных выше бивекторов Пуассона $P_1^{(k)}$ мы можем построить согласованные с ними бивекторы старших порядков, используя соответствующие переменные Дарбу–Нийенхёйса. Действительно, если на симплектических листах общего положения предположить, что скобки Пуассона старших порядков между переменными Дарбу–Нийенхёйса имеют вид

$$\{q_i, q_j\}_k = \{p_i, p_j\}_k = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = q_i^k\delta_{ij},$$

то после подходящего поднятия мы получим согласованные бивекторы Пуассона $k+1$ степени на всем многообразии $so^*(4)$.

Например, кубический бивектор Пуассона

$$P_2^{(3)} = \begin{pmatrix} i\Big(a^{-1}\langle a,s\rangle^2 - \langle b,s\rangle\langle c,t\rangle\Big)s_M, & -\langle a,s+t\rangle\Big[a^{-1}(a\wedge s)\otimes(a\wedge t)+(b\wedge s)\otimes(c\wedge t)\Big] \\ * & i\Big(a^{-1}\langle a,t\rangle^2 - \langle b,s\rangle\langle c,t\rangle\Big)t_M \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

построен с помощью переменных (3.25)–(3.26) и, следовательно, согласован с квадратичным бивектором $P_1^{(3)}$ (3.24).

4. Би-интегрируемые системы

Для того чтобы получить би-интегрируемые системы на многообразии M, мы отождествим переменные Дарбу–Нийенхёйса с переменными разделения и подставим переменные q_j, p_j в разделённые уравнения

$$\Phi_j(q_j, p_j, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{4.1}$$

где Φ_j — функции только от p_j, q_j и параметров $\alpha_{1,2}$.

Исходя из теоремы Якоби, при разрешении уравнения (4.1) относительно параметров $\alpha_{1,2}$, мы получим пару независимых интегралов движения

$$\alpha_{1,2} = H_{1,2}(p, q) \tag{4.2}$$

как функции на фазовом пространстве $M = so^*(4)$, которые находятся в би-инволюции

$$\{H_1, H_2\}_0 = \{H_1, H_2\}_1 = 0 \tag{4.3}$$

относительно скобок Пуассона, задаваемых бивекторами P_0 и P_1.

Например, подставляя переменные Дарбу—Нийенхёйса p_j, q_j (3.13-3.14), порождаемые первым бивектором $P_1^{(1)}$, в выражения

$$\Phi_1 = 2q_1^2 + 2V(p_1) - H_1 - H_2, \qquad \Phi_2 = 2q_2^2 - H_1 + H_2,$$

где $V = e^{4i\alpha a_3 p_1} + e^{-4i\alpha a_3 p_1}$ и $\beta = -i\alpha$, $b_3 = a_3 = 1$, мы получим

$$H_{1,2} = (q_1^2 \pm q_2^2) + V = 4\alpha^2(s_3^2 \pm t_3^2) + (t_3 - s_3)\frac{s_1 + is_2}{s_1 - is_2} + (t_3 - s_3)^{-1}\frac{s_1 - is_2}{s_1 + is_2}\,.$$

Используя различные разделенные уравнения $\Phi_{1,2} = 0$, мы можем получить много других, более сложных би-интегрируемых систем на многообразии $so^*(4)$. Основная проблема в методе Якоби заключается в нахождении таких разделённых уравнений $\Phi_{1,2} = 0$, которые приводят к квадратичным гамильтонианам H_1 или H_2, имеющим физический смысл.

4.1. Квадратичные интегралы движения

В этом параграфе мы будем подставлять все известные физические интегралы движения $H_{1,2}$ на $so^*(4)$ в уравнения (4.3) и тем самым попытаемся найти би-интегрируемые системы, связанные с одним из бивекторов Пуассона $P_1^{(k)}$, построенных в предыдущем параграфе. Тем самым в этой главе бы забудем о переменных Дарбу—Нийенхёйса и начнём с интегралов движения, имеющих физический смысл и перечисленных в книге [2] и обзоре [8].

Для того чтобы описать эти би-интегрируемые системы, мы будем использовать координаты (x, J) (3.7) следуя [2, 8].

Предложение 2. *Если $A = -i\varkappa a$, $|a| = 1$ и B — произвольный вектор, то при*

$$b \wedge c + 2ia = 0$$

интегралы движения

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle A, B\rangle |J|^2 - 2\langle A, J\rangle\langle B, J\rangle + \langle B, J\wedge x\rangle, \\ H_2 &= \langle B, J\rangle\Big(2\langle A, J\wedge x\rangle - \varkappa^2\langle J, J\rangle + \langle x, x\rangle\Big) \end{aligned} \tag{4.4}$$

и

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1 &= \langle A, J\wedge (B\wedge J)\rangle + \langle B, J\wedge x\rangle, \\ \widetilde{H}_2 &= \langle J, B\rangle^2\Big(\langle J\wedge A, J\wedge A\rangle + 2\langle A, J\wedge x\rangle + \langle x, x\rangle\Big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

находятся в би-инволюции

$$\{H_1, H_2\}_0 = \{H_1, H_2\}_1 = \{\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2\}_0 = \{\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2\}_0 = 0 \tag{4.6}$$

относительно скобок Пуассона, определяемых бивекторами P_0 (2.2) и $P_1^{(3)}$ (3.24).

Интегрируемые системы с кубическими интегралами движения (4.4) были найдены в работе [4], в которой также построены матрицы Лакса и разделенные переменные. Интегрируемая система с интегралом четвертой степени $\widetilde{H}_2$ (4.5) получена в [7].

Согласно работе [3] би-инволюция интегралов движения (4.6) эквивалентна существованию невырожденных контрольных матриц F и $\widetilde{F}$, таких что

$$P_1 dH_i = P_0 \sum_{j=1}^{2} F_{ij}\, dH_j, \qquad P_1 d\widetilde{H}_i = P_0 \sum_{j=1}^{2} \widetilde{F}_{ij}\, d\widetilde{H}_j, \qquad i = 1, 2. \tag{4.7}$$

В нашем случае контрольные матрицы имеют вид:

$$F = \begin{pmatrix} \langle a, J\rangle & \dfrac{i}{2\varkappa} \\ \dfrac{-iH_2}{2\varkappa\langle B, J\rangle} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle a, J\rangle}{2} & \dfrac{i}{4\varkappa\langle B, J\rangle} \\ \dfrac{-i\widetilde{H}_2}{\varkappa\langle B, J\rangle} & \dfrac{\langle a, J\rangle}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Все элементы матрицы F являются полиномами на многообразии $so^*(4)$, тогда как один из внедиагональных элементов матрицы $\widetilde{F}$ является рациональной функцией.

Собственные числа матриц F и $\widetilde{F}$ совпадают между собой и являются корнями общего характеристического полинома

$$\mathcal{A}(\lambda) = (\lambda - q_1)(\lambda - q_2) = \lambda^2 - \langle a, J\rangle\lambda + \frac{\langle J, J\rangle}{4} - \frac{i\langle a, x \wedge J\rangle}{2\varkappa} - \frac{\langle x, x\rangle}{4\varkappa^2}\,. \tag{4.9}$$

Естественно, что этот полином совпадает с минимальным характеристическим полиномом $\mathcal{A}^{(3)}$ оператора рекурсии $N^{(3)}$ после подходящего канонического преобразования.

Используя выражения (3.21), мы можем восстановить сопряженные импульсы $p_{1,2}$. Если комплексный вектор d удовлетворяет условиям $\langle a, d\rangle = \langle d, d\rangle = 0$, то координаты $q_{1,2}$ (4.9) и импульсы

$$p_{1,2} = -i \ln \mathcal{B}(\lambda = q_{1,2}), \qquad \mathcal{B}(\lambda) = \{\langle d, J\rangle, \mathcal{A}(\lambda)\}_0 \tag{4.10}$$

являются координатами Дарбу–Нийенхёйса удовлетворяющими уравнениям (3.4). Переменные $p_{1,2}$ (4.10) определены с точностью до канонических преобразований $p_i \to p_i + f_i(q_i)$, где f_i — произвольная функция, зависящая только от q_i.

Предложение 3. *Координаты $q_{1,2}$ (4.9) и импульсы $p_{1,2}$ (4.10) являются переменными разделения для интегрируемых систем с интегралами движения $H_{1,2}$ (4.4) и $\widetilde{H}_{1,2}$ (4.5). Если*

$$b^* = c \qquad \text{и} \qquad d = c,$$

то соответствующие разделенные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 4\varkappa^2\langle a, B\rangle\, q_k^3 + q_k H_1 - H_2 &= 2\varkappa^2\langle c, a \wedge B\rangle\,(q_k^2 - C_1)(q_k^2 - C_2)\, q_k\, \mathrm{e}^{-ip_k} \\ &+ 2\varkappa^2\langle b, a \wedge B\rangle\, q_k\, \mathrm{e}^{ip_k} \end{aligned} \tag{4.11}$$

и

$$\begin{aligned} 2\varkappa\langle a, B\rangle\, q_{1,2}^2 - \widetilde{H_1} \mp \sqrt{\widetilde{H_2}} &= \varkappa\langle c, a \wedge B\rangle\,(q_{1,2}^2 - C_1)(q_{1,2}^2 - C_2)\, \mathrm{e}^{-ip_{1,2}} \\ &+ \varkappa\langle b, a \wedge B\rangle\, \mathrm{e}^{ip_{1,2}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Разделённые уравнения (4.11) и (4.12) связаны с параболическим и декартовым вебом Штеккеля на плоскости. Матрицы Штеккеля S и $\widetilde{S}$ диагонализуют контрольные матрицы F и $\widetilde{F}$:

$$F = S \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} S^{-1}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i\varkappa q_2 & 2i\varkappa q_1 \end{pmatrix}$$

и

$$
\widetilde{F} = \widetilde{S}\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}\widetilde{S}^{-1}, \qquad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i\sqrt{\widetilde{H}_2} & -2i\sqrt{\widetilde{H}_2} \end{pmatrix}.
$$

Правые части разделённых уравнений (4.11) и (4.12) являются обобщенными потенциалами Штеккеля.

При специально подобранных значениях A, B и $\varkappa$ интегралы движения (4.4) и (4.5) являются вещественными функциями [4, 7]. Кроме этого, существует единственная интегрируемая система с комплексными интегралами движения

$$
\begin{aligned}
\widehat{H}_1 &= \alpha J_2^2 - \frac{\varkappa^2}{\alpha} J_1^2 + x_2 J_1 - x_1 J_2, \qquad \alpha = i\varkappa\,, \\
\widehat{H}_2 &= \alpha (J_1 x_2 - J_2 x_1)(\varkappa^2 |J|^2 - |x|^2) + \varkappa^2 \Big((J_1 x_2 - J_2 x_1)^2 + (J_3 x_1 - J_1 x_3)^2 \Big) \\
&\quad - \alpha^2 \Big((J_1 x_2 - J_2 x_1)^2 + (J_2 x_3 - J_3 x_2)^2 \Big),
\end{aligned}
$$

которые находятся в би-инволюции относительно тех же скобок Пуассона, определяемых бивекторами P_0 (2.2) и $P_1^{(3)}$ (3.24) при $a_1 = a_2 = 0$ и $a_3 = -1$. При произвольном значении α эта система была впервые получена в работе [9], а в работе [4] для нее были построены матрицы Лакса и соответствующие переменные разделения.

4.2. Неоднородные интегралы движения

Существует единственный нетривиальный линейный бивектор Пуассона, который совместим с каноническим бивектором P_0 и квадратичным бивектором $P_1^{(3)}$ (3.24):

$$
P_1^{lin} = \begin{pmatrix} \alpha_1 s_M & 0 \\ 0 & \alpha_2 t_M \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{1,2} \in \mathbb{C}.
$$

Линейная комбинация этого бивектора и квадратичного бивектора $P_1^{(3)}$

$$
P_1^g = P_1^{(3)} + \begin{pmatrix} \alpha_1 s_M & 0 \\ 0 & \alpha_2 t_M \end{pmatrix} \tag{4.13}
$$

является неоднородным бивектором Пуассона на $so^*(4)$ совместным с P_0 и таким, что $P_1^g dC_{1,2} = 0$.

Соответствующие неоднородные интегралы движения получены в [4, 8]:

$$
H_1^g = H_1 + \langle k, J\rangle + \alpha_{12}\langle B, x\rangle, \tag{4.14}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2^g = H_2 \,&+ 2\alpha_{12}\langle B, J\rangle\langle, A, x\rangle - \langle k, A\rangle J^2 - \langle k, J\wedge x\rangle \\
&- \varkappa^2 \alpha_{12}^2 \langle B, J\rangle - \alpha_{12}\langle k, x\rangle\,,
\end{aligned}
$$

и

$$\widetilde{H}_1^g = \widetilde{H}_1 + \langle \alpha_3 A + \alpha_4 A\wedge B, J\rangle + \alpha_{12}\langle B, x\rangle, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_2^g = \widetilde{H}_2 &+ 2\langle B,J\rangle\Big[\alpha_3\big(\langle A,J\rangle^2 + \varkappa^2|J|^2 - |x|^2 - 2\langle A, J\wedge x\rangle\big)\\ &+ \alpha_4\big(\langle B\wedge A, J\wedge x\rangle + \langle A,J\rangle\langle A, B\wedge J\rangle\big) + \alpha_{12}\langle B,J\rangle\langle A,x\rangle\Big]\\ &+ \alpha_3^2\Big(2|x|^2 - \langle A,J\rangle^2 + 2\langle A, J\wedge x\rangle\Big) + 2\alpha_4\alpha_{12}\Big(\langle B,J\rangle\langle A, B\wedge x\rangle\Big)\\ &+ 2\alpha_4^2\Big(\langle B,B\rangle\langle A,J\rangle^2 - \varkappa^2\langle B,J\rangle^2 - 2\langle A,B\rangle\langle A,J\rangle\langle B,J\rangle\Big)\\ &- 4\alpha_3\alpha_{12}\langle B,J\rangle\langle A,x\rangle - \alpha_{12}^2\varkappa^2\langle B,J\rangle^2\\ &+ 2\alpha_3\alpha_{12}\Big(\langle A\wedge B, J\wedge x\rangle - \langle A,J\rangle\langle A, B\wedge J\rangle\Big)\\ &+ 2\alpha_3\alpha_{12}\Big(\alpha_3\langle A,x\rangle + \alpha_4\langle A, B\wedge x\rangle + \alpha_{12}\varkappa^2\langle B,J\rangle\Big),\end{aligned}$$

здесь $\alpha_{12} = i(\alpha_1 - \alpha_2)$, α_i — произвольные параметры и k — произвольный вещественный или комплексный вектор.

Предложение 4. *Неоднородные интегралы движения* (4.14) *и* (4.15) *находятся в би-инволюции относительно канонических скобок* $\{.,.\}_0$ *и вторых скобок Пуассона* $\{.,.\}_1$, *определяемых бивектором* P_1^g (4.13).

Переменные разделения для этих двух би-интегрируемых систем различаются, но они все равно являются собственными числами соответствующих контрольных матриц

$$F^g = F + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & 0\\ \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\varkappa}\langle k,x\rangle - \frac{i}{\varkappa}\langle k, J\wedge x\rangle - \langle k,B\rangle|J|^2 & \alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}$$

и

$$\widetilde{F}^g = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle a,J\rangle + \alpha_1+\alpha_2}{2} & \dfrac{i}{4\varkappa(\langle B,J\rangle - \alpha_3)}\\[2ex] -\dfrac{i\widetilde{H}_2^g(\alpha_3=\alpha_4=0)\,(\langle B,J\rangle) - \alpha_3}{\varkappa\langle B,J\rangle^2} & \dfrac{\langle a,J\rangle + \alpha_1+\alpha_2}{2}\end{pmatrix}.$$

Для неоднородных интегралов движения мы должны добавить в левую часть разделенных уравнений (4.11) и (4.12) члены, соответствующим образом зависящие от q_k^2 и q_k. Более того, в правой части мы должны заменить коэффициенты при $\mathrm{e}^{\pm ip_k}$ и подставить $((q_k - i\alpha_1)^2 - C_1)((q_k - i\alpha_2)^2 - C_2)$ вместо $(q_k^2 - C_1)(q_k^2 - C_2)$.

5. Заключение

В данной работе предложена полная классификация квадратичных бивекторов Пуассона на многообразиях $M = so^*(4)$ и $M = e^*(3)$, имеющих единое симплектическое слоение с каноническим бивектором Ли–Пуассона. Построены соответствующие переменные Дарбу–Нийенхёйса.

Две известные ранее интегрируемые системы на $so^*(4)$ являются би-интегрируемыми относительно одной из полученных пар скобок Пуассона. Доказано, что эти би-интегрируемые системы допускают разделение переменных, а соответствующие разделенные переменные являются собственными значениями контрольных матриц.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 06-01-00140 и гранта НШ 5403.2006.1.

Список литературы

[1] Andoyer, H., *Cours de mécanique céleste*, Paris: Gauthier-Villars et C, 1923.

[2] Борисов, А.В. и Мамаев, И.С., *Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, Москва-Ижевск: ИКИ, 2005.

[3] Falqui, G., Pedroni, M., Separation of variables for bi-Hamiltonian systems, *Math. Phys. Anal. Geom.*, 2003, vol. 6, pp. 139-179.

[4] Goremykin, O.V., Tsiganov, A.V., Integrable systems on so(4) related with XXX spin chains with boundaries, *J. Phys. A.*, 2004, vol. 37, pp. 4843-4849.

[5] Komarov, I.V., Sokolov, V.V., Tsiganov, A.V., Poisson maps and integrable deformations of Kowalevski top, *J. Phys. A.*, 2003, vol. 36, pp. 8035-8048.

[6] Lichnerowicz, A., Les varietes de Poisson et leurs algebres de Lie associeees, *J. Diff. Geom.*, 1977, vol. 12, pp. 253-300.

[7] Соколов, В.В., Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$, *Докл. акад. наук*, 2004, т. 394, сс. 602-605.

[8] Sokolov, V.V., Wolf T., Integrable quadratic classical hamiltonians on $so(4)$ and $so(3,1)$, *J. Phys. A*, 2006, vol. 39, pp. 1915-1926.

[9] Tsiganov, A.V., On integrable deformation of the Poincare system, *Reg. and Chaot. Dyn.*, 2002, vol. 7, pp. 331-337.

[10] Цыганов, А.В., Согласованные скобки Ли-Пуассона на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(4)$, *ТМФ*, 2007, т. 151, сс. 26-43.

[11] Tsiganov, A.V., Grigoryev, Yu.A., On the Darboux-Nijenhuis variables for the open Toda lattice, *SIGMA*, 2007, vol. 2, Vadim Kuznetsov Memorial Issue, paper 097, `nlin.SI/0701004`.

[12] Vaisman, I., *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Birkhuser Verlag, 1993.