

Хаотическая диффузия при распространении звука в неоднородном подводном звуковом канале

Д. В. Макаров, Л. Е. Коньков

Тихоокеанский океанологический институт имени В. И. Ильичёва ДВО РАН
690041, Владивосток, Балтийская, 43
E-mail: makarov@poi.dvo.ru

Получено 12 июля 2007 г.

Задача о распространении звука в пространственно-неоднородном подводном звуковом канале рассмотрена с точки зрения проблемы лучевого-волнового соответствия. Мелкомасштабные вертикальные осцилляции неоднородности звукового канала действуют на приосевые лучи резонансным образом. Рассеяние лучей на резонансе приводит к образованию обширного хаотического слоя с быстрым перемешиванием в фазовом пространстве. Распределение Ху-зими использовано для исследования динамики волновых пакетов, принадлежащих хаотическому слою. При высоких частотах звукового сигнала волновой пакет быстро расплывается с ростом дистанции от источника. С уменьшением частоты звукового сигнала происходит подавление резонанса, вызванного вертикальными осцилляциями неоднородности, волновой пакет перестает расплываться и его ширина по действию начинает нерегулярно осциллировать. При частоте 50 Гц эти осцилляции становятся регулярными, что указывает на подавление хаотической диффузии.

Ключевые слова: лучевой хаос, волновой хаос, акустика океана, нелинейный резонанс, волновое-лучевое соответствие.

D. V. Makarov, L. E. Kon'kov

Chaotic Diffusion at Sound Propagation in a Range-Dependent Underwater Sound Channel

Problem of sound propagation in a range-dependent underwater sound channel is studied in the scope of the problem of the ray-wave correspondence. Small-scale vertical oscillations of a sound channel inhomogeneity act on near-axial rays in a resonant way. Scattering of rays on resonance leads to forming of a wide chaotic layer with fast mixing in the underlying phase space. The Husimi distribution function is used for examining of dynamics of wavepackets belonging to the chaotic layer. At high frequencies of a signal, a wavepacket diverges rapidly with range. Decreasing of frequency leads to suppressing of resonance induced by vertical oscillations of an inhomogeneity, wavepacket stops diverging and its width in the action space starts to oscillate irregularly. At the frequency of 50 Hz these oscillations are regular, that indicates suppression of chaotic diffusion.

Keywords: ray chaos, wave chaos, ocean acoustics, nonlinear resonance, ray-wave correspondence.

Mathematical Subject Classifications: 70K30, 70K55, 70K70, 81S30.

1. Введение

Исследуя квантовые системы, описание которых с помощью классических уравнений движения является не более чем приближением, мы часто сталкиваемся с проблемой соответствия свойств исходной системы и ее классического аналога. Если классическая динамика проявляет хаотические свойства, вопрос о квантово-классическом соответствии приобретает дополнительную сложность. Довольно давно установлено, что хаотическая диффузия квантовых систем гораздо слабее, чем у их классических аналогов [1, 2]. Существует несколько объяснений этого феномена. Одно из них связывает подавление квантовой диффузии с влиянием интерференции, «сглаживающей» экспоненциальную чувствительность отдельных классических траекторий к начальным условиям [3]. Другое принимает во внимание тот факт, что, несмотря на хаотичность отдельных траекторий, динамика ансамблей траекторий, так называемых лагранжевых многообразий, может быть довольно устойчивой [4].

Все сказанное выше о проявлениях хаоса в квантовых системах может быть отнесено и к волновым системам, описываемым сходными по своей форме уравнениями [5]. Поэтому методы теории квантового хаоса нашли широкое применение, например, в исследовании свойств микроволновых оптических резонаторов (эта проблема широко освещена в книге [2]), а сравнительно недавно предмет пристального внимания стала проблема волнового хаоса при дальнем распространении звука в океане [6–12].

Интерес к последней проблеме во многом связан с развитием методов акустической томографии океана. Классическая схема томографии, разработанная Манком и Вуншем [13], предполагает построение системы собственных лучей, связывающих источник и приемник. Анализ времен прихода сигналов, распространяющихся вдоль различных лучей, позволяет в принципе решение обратной задачи — определение параметров среды. Однако даже малые вариации среды вдоль трассы акустического волновода, вызываемые океаническими внутренними волнами, способны привести к неустойчивости лучей по Ляпунову и хаосу. С учетом того что собственные лучи могут быть найдены лишь с конечной точностью, лучевой хаос приводит к экспоненциальному росту числа собственных лучей с увеличением расстояния между источником и приемником [14]. Таким образом, решение соответствующей краевой задачи становится существенно вырожденным, что препятствует томографической инверсии среды. Преодоление ограничений, накладываемых хаосом на акустическую томографию, позволило бы, например, отслеживать структуру и перемещение крупномасштабных вихрей, динамику течений и решение других практических задач. Таким образом, принципиально важной задачей является описание динамических механизмов хаоса, а также выявление таких методов передачи звуковых сигналов, при которых влияние этих механизмов подавлялось. В этом смысле представляется перспективным поиск условий, при которых распространение звука стабилизируется за счет волновых поправок к лучевой картине.

В представленной работе внимание сконцентрировано на распространении звука вдоль приосевых, практически горизонтальных лучей. Именно эти лучи наиболее подвержены хаосу в экспериментах [15]. В разделе 2 проводится анализ поведения лучей в присутствии быстроосциллирующей в вертикальном направлении неоднородности, моделирующей тонкую структуру поля внутренних волн. Исследуются механизмы возникновения хаоса приосевых лучей. Раздел 3 посвящен сопоставительному анализу лучевой и волновой диффузии в фазовом пространстве. В заключение проводится обсуждение основных результатов работы.

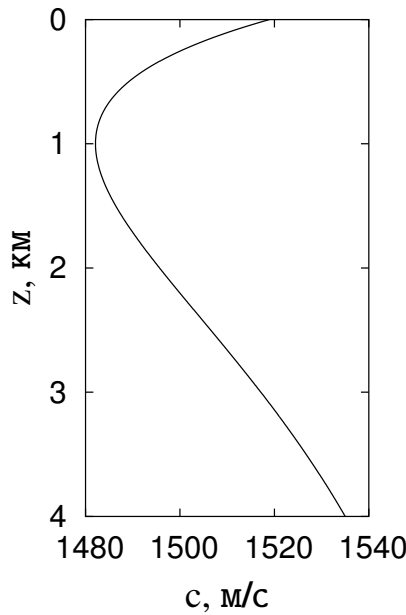


Рис. 1. Невозмущенный профиль скорости звука

2. Модель волновода

Рассмотрим двумерный акустический волновод в глубоком океане с профилем скорости звука, представляемым как

$$c(z, x) = c_0 + \Delta c(z) + \delta c(z, x), \quad (2.1)$$

где z — глубина, x — горизонтальная координата, c_0 — значение скорости звука на некоторой глубине. Функция $\Delta c(z)$ задает невозмущенный профиль скорости звука, а $\delta c(z, x)$ — некоторое малое возмущение.

В малоугловом приближении акустическое поле описывается параболическим уравнением

$$\frac{i}{k_0} \frac{\partial \varphi(z, x)}{\partial x} = -\frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, x)}{\partial z^2} + \frac{\Delta c(z) + \delta c(z, x)}{c_0} \varphi(z, x), \quad (2.2)$$

где волновое число k_0 определяется частотой сигнала f с помощью соотношения $k_0 = 2\pi f/c_0$. Параболическое уравнение (2.2) формально совпадает с нестационарным уравнением Шредингера. Это позволяет рассматривать распространение звука с точки зрения теории гамильтоновых систем с полутора степенями свободы. При этом горизонтальная координата x играет роль времени, функция $\Delta c(z)$ — невозмущенного потенциала, δc — нестационарного возмущения и k_0^{-1} — постоянной Планка.

В настоящей работе мы будем рассматривать модель волновода, в которой функции $\Delta c(z)$ и $\delta c(z, x)$ задаются выражениями [10]

$$\Delta c(z) = -\frac{c_0 b^2}{2} (\mu - e^{-az})(e^{-az} - \gamma), \quad (2.3)$$

$$\delta c(z, x) = \varepsilon c_0 F(z) \sin \frac{2\pi z}{\lambda_z} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_x}, \quad (2.4)$$

где $c_0 = c(z = h) = 1535$ м/с, $\gamma = \exp(-ah)$, $h = 4.0$ км — глубина океана, $\mu = 1.078$, $a = 0.5$ км⁻¹, $b = 0.557$, $\varepsilon = 0.005$, $\lambda_z = 0.2$ км, $\lambda_x = 5$ км. Функция $\delta c(z, x)$ осциллирует как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях, при этом масштаб горизонтальных колебаний на порядок больше, чем вертикальных. Вертикальные колебания в данном случае моделируют так называемую тонкую структуру поля внутренних волн. Амплитуда вертикальных колебаний медленно меняется с глубиной

$$F(z) = \frac{z}{B} e^{-2z/B}, \quad (2.5)$$

где $B = 1$ км. Одной из главных целей данной работы является выяснение того, каким образом тонкая структура влияет на свойства звукового поля.

Функция $\Delta c(z)$, задающая невозмущенный профиль скорости звука, имеет минимум на глубине

$$z_a = \frac{1}{a} \ln \frac{2}{\mu + \gamma} \simeq 1 \text{ км}. \quad (2.6)$$

В дальнейшем мы будем называть горизонтальную прямую $z = z_a$ осью канала.

3. Лучевая картина

В этом разделе мы дадим описание динамики волнового поля в лучевом пределе. В этом случае параболическое уравнение сводится к системе лучевых уравнений в гамильтоновой форме

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad (3.1)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{c_0} \frac{d\Delta c}{dz} - \frac{1}{c_0} \frac{d\delta c}{dz}. \quad (3.2)$$

Здесь p — тангенс угла скольжения луча. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = -1 + \frac{p^2}{2} + \frac{\Delta c(z)}{c_0} + \frac{\delta c(z, x)}{c_0}. \quad (3.3)$$

Лучевые уравнения (3.1) и (3.2) формально совпадают с классическими уравнениями движения точечной частицы с единичной массой внутри слабозвозмущенной потенциальной ямы; это «совпадение» получило название оптико-механической аналогии.

Рассматриваемый невозмущенный профиль скорости звука допускает существование двух типов лучей, не контактирующих с поглощающим дном, что делает возможным дальнейшее распространение звука вдоль этих лучей. Для того чтобы определить эти лучи, введем параметр E :

$$E = 1 + H_0|_{\delta c=0} = \frac{p^2}{2} + \frac{\Delta c(z)}{c_0}. \quad (3.4)$$

Этот параметр играет роль «энергии» колебаний луча в волноводе, являясь инвариантом лучевой траектории в отсутствие неоднородности. Лучи первого типа распространяются внутри водной толщи, не достигая поверхности океана. Для них параметр E удовлетворяет неравенству

$$E < E_r = \frac{b^2}{2}(1 - \mu)(1 - \gamma). \quad (3.5)$$

Лучи второго типа испытывают отражения от поверхности океана и характеризуются неравенством

$$E_r \leq E < 0. \quad (3.6)$$

В данной работе мы ограничимся исследованием распространения звука вблизи оси волновода, что соответствует лучам первого типа. Эти лучи формируют позднюю часть принимаемого сигнала, являющуюся, как следует из экспериментов, наиболее хаотической.

3.1. Переменные действие-угол

При рассмотрении свойств звуковых лучей иногда целесообразно использовать переменные действие-угол

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dz, \quad \vartheta = \frac{\partial}{\partial I} \int_{z_0}^z p dz, \quad (3.7)$$

где в качестве z_0 обычно выбирается верхняя или нижняя точка поворота луча (в нашем случае — верхняя). Переменные действие-угол вводятся для однородного волновода и выступают в роли удобного базиса для описания резонансных явлений в классической динамике лучей, а также позволяют связать лучевое и модовое представления акустического поля. Эта связь устанавливается посредством правил квантования Бора–Зоммерфельда

$$k_0 I_m = m - \frac{\beta_{\text{up}} + \beta_{\text{low}}}{2\pi}, \quad (3.8)$$

где m — номер моды, β_{up} и β_{low} — фазы коэффициента отражения в верхней и нижней точках заворота соответственно.

Преобразование гамильтониана при переходе к переменным действие-угол позволяет в явном виде разделить горизонтально-однородную и горизонтально-неоднородную составляющие:

$$H(I, \vartheta, x) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \vartheta, x). \quad (3.9)$$

Лучевые уравнения преобразуются к виду

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{dx} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \quad (3.10)$$

где ω — пространственная частота колебаний луча в волноводе. Переменные действие и угол для лучей с $E < E_r$ выглядят следующим образом:

$$I = \frac{b}{a} \left(\frac{\mu + \gamma}{2} - \sqrt{\mu\gamma - \frac{2E}{b^2}} \right), \quad (3.11)$$

$$\vartheta = \pm \frac{\pi}{2} \mp \arcsin \frac{\mu + \gamma - (2\mu\gamma - 4E/b^2) e^{az}}{Q}, \quad (3.12)$$

где Q дается выражением

$$Q = \sqrt{(\mu - \gamma)^2 + \frac{8E}{b^2}}. \quad (3.13)$$

Верхний и нижний знаки в выражении (3.12) соответствуют лучам, распространяющимся вниз и вверх соответственно. Формулы обратного преобразования от переменных действие-угол к переменным $p - z$ выглядят следующим образом:

$$z(I, \vartheta) = \frac{1}{a} \ln \frac{a^2 b^2 (\mu + \gamma - Q(I) \cos \vartheta)}{2\omega^2(I)}, \quad (3.14)$$

$$p(I, \vartheta) = \frac{\omega(I) Q(I) \sin \vartheta}{a (\mu + \gamma - Q(I) \cos \vartheta)}. \quad (3.15)$$

Пространственная частота колебаний луча связана с действием с помощью формулы

$$\omega(I) = -a^2 I + \frac{1}{2} ab(\mu + \gamma). \quad (3.16)$$

3.2. Вертикальный резонанс

Последний член в правой части (3.2) может быть переписан в следующем виде:

$$\frac{1}{c_0} \frac{d\delta c}{dz} = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{dF}{dz} (\cos \psi^- - \cos \psi^+) - k_z F (\sin \psi^- - \sin \psi^+) \right), \quad (3.17)$$

где введены обозначения $\psi^\pm = k_z z \pm k_x$, $k_z = 2\pi/\lambda_z$, $k_x = 2\pi/\lambda_x$. В нашем случае k_z — большой параметр, поэтому фазы ψ^\pm быстро меняются вдоль лучевых траекторий. Исключение составляют те случаи, когда траектория проходит через резонанс, соответствующим одному из условий:

$$\frac{d\psi^+}{dx} = k_z p + k_x \simeq 0 \quad (3.18)$$

или

$$\frac{d\psi^-}{dx} = k_z p - k_x \simeq 0. \quad (3.19)$$

Поскольку появление этих резонансов связано с вертикальными колебаниями неоднородности волновода, мы можем условно назвать их *вертикальными резонансами* [16]. Вдали от вертикальных резонансов движение лучей может быть сведено к интегрируемому с помощью метода усреднения [17].

Теория вертикального резонанса и его аналогов была развита в работах [16, 18–23]. Кратко рассмотрим его свойства. В качестве примера вы возьмем резонанс (3.18). Прежде всего несколько упростим уравнение (3.17). Во-первых, мы оставим в правой части только доминирующие члены, которые пропорциональны k_z . Во-вторых, мы отбросим нерезонансный член, пропорциональный $\sin \psi^-$. В итоге мы приходим к уравнению

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{c_0} \frac{d\Delta c}{dz} - \frac{1}{2} \varepsilon k_z F(z) \sin \psi^+. \quad (3.20)$$

Дважды дифференцируя ψ^+ по x и опуская надстрочный индекс «+», получаем

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} \varepsilon k_z^2 F(z) \sin \psi + \frac{k_z}{c_0} \frac{d\Delta c}{dz} = 0. \quad (3.21)$$

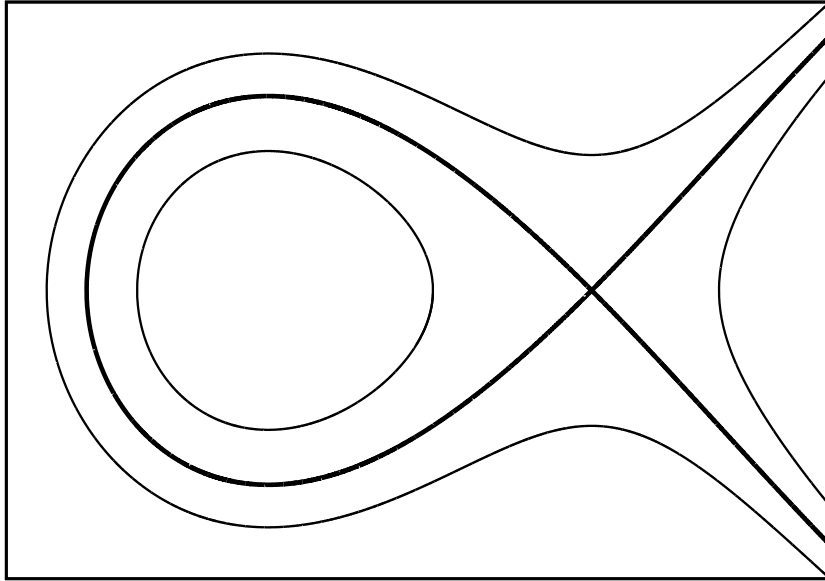


Рис. 2. Фазовый портрет маятника с постоянным крутящим моментом

В классической механике это уравнение соответствует маятнику с постоянным крутящим моментом. Оно может быть переписано в виде пары уравнений первого порядка в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= Y, \\ \frac{dY}{dx} &= -\frac{1}{2}\varepsilon k_z^2 F(z) \sin \psi - \frac{k_z}{c_0} \frac{d\Delta c}{dz}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

соответствующих гамильтониану \tilde{H} :

$$\tilde{H}(Y, \psi) = \frac{Y^2}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon k_z^2 F(z) \cos \psi + \psi \frac{k_z}{c_0} \frac{d\Delta c}{dz}. \quad (3.23)$$

В выражениях (3.21)–(3.23) глубина луча z рассматривается как медленно меняющийся параметр. При выполнении неравенства

$$\left| \frac{1}{c_0} \frac{d\Delta c}{dz} \right| < \frac{\varepsilon k_z F(z)}{2} \quad (3.24)$$

фазовый портрет системы уравнений (3.22) содержит область финитного движения, ограниченную сепаратрисой (см. рис. 2) и соответствующую вертикальному резонансу. Площадь этой области зависит от z и поэтому меняется вдоль траектории луча. За счет этого изменения луч может пересечь сепаратрису и попасть в резонансную область. Это означает, что вращательная динамика фазы ψ меняется на колебательную, и тангенс угла скольжения луча p задерживается в окрестности резонансного значения $p_{\text{res}} = -k_r/k_z$. Площадь резонансной области достигает максимума при $z = z_a$ и затем начинает уменьшаться. В результате в некоторый момент луч покидает резонанс, и фаза ψ вновь переходит во вращательный режим. Каждое прохождение резонанса сопровождается скачком переменной действия. Этот скачок экспоненциально зависит

от начальных условий траектории луча. Как следствие, многократные прохождения лучей через вертикальный резонанс порождают хаотическую диффузию в фазовом пространстве.

Зададимся целью найти расположение формирующегося хаотического слоя в фазовом пространстве. Учитывая, что неравенство (3.24) выполняется только вблизи оси канала, где $d\Delta c/dz = 0$, мы можем переписать резонансное условие (3.18) в следующем виде:

$$p(z = z_a, E) = -\frac{k_x}{k_z}. \quad (3.25)$$

Тангенс угла скольжения на оси канала выражается с помощью формулы (3.4) как

$$p(z = z_a, E) = \sqrt{2E + \frac{b^2(\mu - \gamma)^2}{4}}. \quad (3.26)$$

Подставляя (3.26) в (3.18), мы находим резонансное значение параметра E :

$$E_{\text{res}} = \frac{\lambda_z^2}{2\lambda_r^2} - \frac{b^2(\mu - \gamma)^2}{8}. \quad (3.27)$$

Важно отметить, что формула (3.27) имеет тот же самый вид и для резонанса (3.19). Резонансы (3.18) и (3.19) отличаются только знаком резонансного значения тангенса угла скольжения. Это означает, что они влияют приблизительно на одни и те же лучи, но на разных участках траектории. Таким образом, мы можем записать общее условие вертикального резонанса как

$$|p(z = z_a, E)| = \frac{k_x}{k_z}. \quad (3.28)$$

При $\lambda_z = 0.2$ км и $\lambda_r = 5$ км условие (3.28) выполняется для приосевых лучей. Соответственно хаотический слой, вызванный вертикальным резонансом, должен находиться вблизи точки $z = z_a$, $p = 0$. Это подтверждается сечением Пуанкаре, изображенным на рис. 3. Хаотический слой ограничен, и достаточно крутые лучи, не подверженные вертикальному резонансу, демонстрируют устойчивую динамику.

3.3. Вертикальный резонанс как локальное усиление нелинейного резонанса

Формула (3.28) может быть получена в рамках теории обычного нелинейного резонанса. Под «обычным» нелинейным резонансом мы здесь подразумеваем выполнение условия

$$m\omega = nk_x, \quad (3.29)$$

где ω — частота невозмущенных колебаний луча в волноводе. Амплитуда резонанса (3.29) может быть охарактеризована его шириной по действию

$$\Delta I = \sqrt{\frac{\varepsilon V_{mn}}{\omega'_I}}, \quad (3.30)$$

где $\omega'_I = d\omega(I = I_{\text{res}})/dI$, а V_{mn} — коэффициент разложения возмущения в двойной ряд Фурье:

$$H_1(I, \vartheta, x) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} V_{mn} \exp(im\omega - ink_x x) + \text{к. с.} \quad (3.31)$$

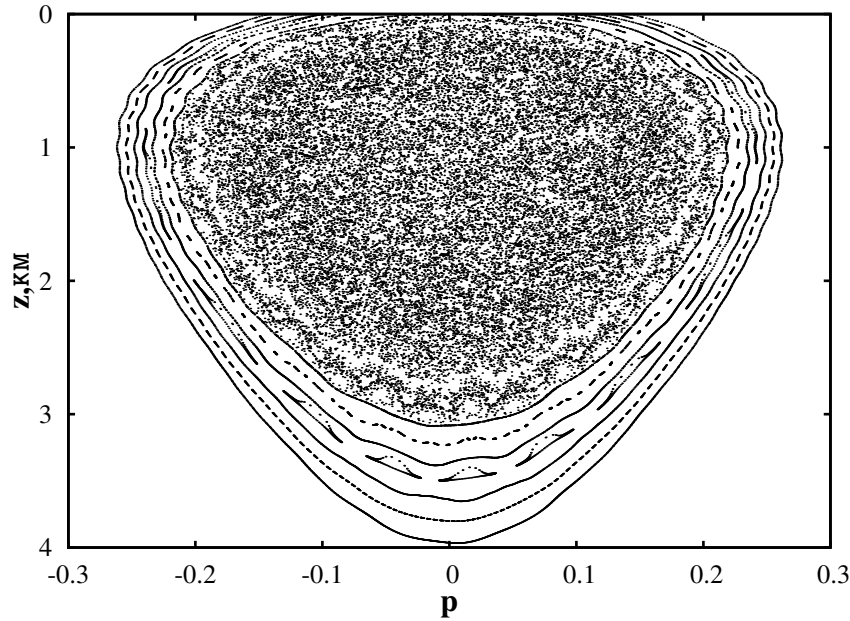


Рис. 3. Сечение Пуанкаре

Ограничимся анализом только наиболее значительных целочисленных резонансов с $n = 1$. Оценка коэффициентов V_{m1} сводится к вычислению интегралов

$$V_{m1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(I, \vartheta) \sin k_z z(I, \vartheta) \cos m\vartheta d\vartheta. \quad (3.32)$$

Функция $F(I, \vartheta)$ разлагается в ряд Фурье

$$F(I, \vartheta) = \sum_l F_l \cos l\vartheta. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.32), получаем

$$V_{m1} = \frac{1}{2\pi} \sum_l F_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos l\vartheta \sin k_z z(I, \vartheta) \cos m\vartheta d\vartheta. \quad (3.34)$$

При $I < I(E_r)$ функция $F(\vartheta)$ не имеет особенностей и коэффициенты F_l экспоненциально спадают с ростом l :

$$F_l \sim \exp(-\beta(I)l), \quad \beta(I) \geq 0. \quad (3.35)$$

Для рассматриваемой нами функции $F(z)$ (2.5) скорость спадания фурье-гармоник дается выражением

$$\beta(I) = -\ln \left(\frac{\mu + \gamma}{Q(I)} - \sqrt{\frac{(\mu + \gamma)^2}{Q^2(I)} - 1} \right). \quad (3.36)$$

β стремится к бесконечности при $I \rightarrow 0$, поэтому при рассмотрении приосевых лучей мы можем оставить в сумме (3.34) только доминирующий член с $l = 1$. При больших значениях k_z получающийся интеграл может быть решен методом стационарной фазы, при этом максимальное

значение будет достигаться при одновременном обращении в нуль первой и второй производных подынтегрального выражения, т. е. при

$$k_z|p| \simeq (m \pm 1)\omega, \quad \frac{dp}{dx} \simeq 0. \quad (3.37)$$

Второе условие выполняется на оси канала, где значение p дается формулой (3.26). Учитывая также (3.29), условие максимума для резонансной фурье-гармоники принимает вид

$$k_z p(z = z_a, H_0) = k_x \pm \omega. \quad (3.38)$$

Поскольку $\omega \ll k_x$, мы можем оставить в правой части (3.38) только k_x , получая, таким образом, формулу (3.28). Иными словами, условие (3.28) означает усиление нелинейного резонанса в определенной области фазового пространства за счет роста резонансной фурье-амплитуды ряда (3.31). Таким образом, в области фазового пространства, определяемой соотношением (3.28), целочисленный нелинейный резонанс может иметь достаточно большую ширину для перекрытия с соседями. Это приводит к образованию хаотического слоя, который виден на сечении Пуанкаре. В то же время фурье-гармоники, соответствующие целочисленным резонансам в других областях фазового пространства, являются малыми вследствие наличия быстроосциллирующего члена в подынтегральном выражении (3.32). Вследствие этого усиление перекрытия, обусловленное вертикальным резонансом, является локальным, и хаотический слой ограничен инвариантными кривыми.

3.4. Расплывание лучевого пучка внутри хаотического слоя

Рассмотрим динамику узконаправленного пучка лучей, изначально принадлежащего хаотическому слою в фазовом пространстве. Глубину источника зададим по формуле

$$z_{st} = \frac{1}{a} \ln \frac{a^2 b^2 (\mu + \gamma + Q_{res})}{2\omega_{res}^2}, \quad (3.39)$$

где $Q_{res} = Q(E_{res})$, $\omega_{res} = \omega(E_{res})$. Эта глубина соответствует нижней точке поворота для луча с $E = E_{res}$. При численном расчете для моделирования пучка использовался ансамбль из 10000 лучей с незначительным разбросом начальных условий. Эволюция пучка представлена на рис. 4. На первом рисунке изображен начальный пучок. Мы можем рассматривать данный пучок, в силу его компактности, как лагранжево многообразие [24]. На начальном этапе компактное пятнышко вытягивается в слегка закрученную «струнку». Затем, после каскада складываний и растяжений, различные сегменты лагранжева многообразия начинают накладываться друг на друга и в конце концов исходное пятнышко превращается в расплывчатое облако.

Механизм запутывания лагранжева многообразия становится понятным, если обратить внимание на отдельные лучевые траектории. Рис. 5 изображает три луча, испускаемые с глубины $z = z_{st}$ начальными значениями тангенса угла скольжения, равными -0.0001 , 0 и 0.0001 , соответственно. Все три луча попадают в вертикальный резонанс уже на первом цикле своей траектории. Затем два луча выходят из резонанса и распространяются подобно невозмущенным лучам, осциллируя в широком интервале глубин и медленно расходясь друг с другом. Третий луч снова попадает в вертикальный резонанс, «застревает» в верхнем слое океана и затем пересекается с двумя другими лучами в противоположной фазе траектории. Если мы построим лагранжево многообразие, включающее в себя эти три луча, то сегмент, содержащий третий луч, будет «отставать» от сегмента, содержащего первые два луча, пока эти сегменты не пересекутся друг с другом трансверсально. Таким образом, происходит вытягивание и закручивание лагранжева многообразия.

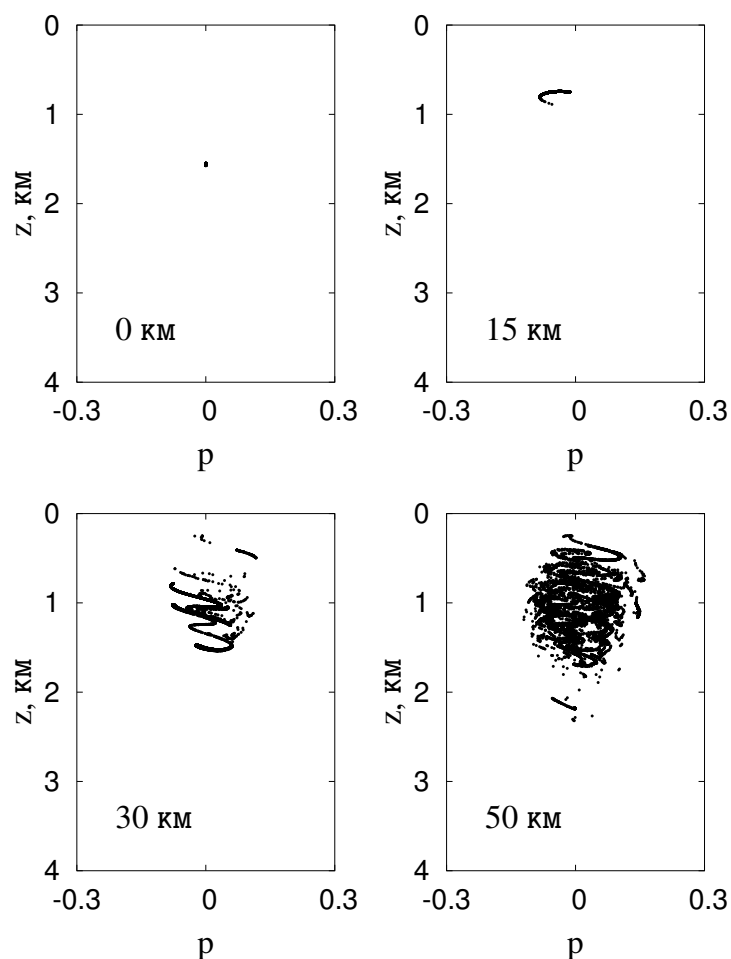


Рис. 4. Расплывание узконаправленного лучевого пучка в фазовом пространстве. Расстояние от источника указано на рисунке

4. Сравнение лучевой и волновой диффузии

Практически любому компактному пучку лучей может быть поставлен в соответствие определенный волновой пакет, и диффузионное распыление лучевого пучка предполагает распыление волнового пакета [25]. Однако даже при достаточно высоких частотах сигнала возможно существенное расхождение лучевой и волновой теорий. Как было показано в предыдущем разделе, в условиях хаоса расстояние между ближайшими сегментами лагранжева многообразия быстро уменьшается с ростом горизонтальной дистанции от источника. Когда расстояние между сегментами лагранжева многообразия становится порядка длины волны, необходимо учитывать интерференцию, и лучевое приближение не дает точного описания волнового поля [27, 26]. Тем не менее учет набегов фаз вдоль лучей позволяет существенно расширить область применимости лучевого приближения [28]. Более того, лучевое приближение может давать более точную картину в хаотическом случае, чем в регулярном [29]. Таким образом, даже в хаотическом случае полуклассические методы сохраняют свою ценность.

Приведенные рассуждения относятся к той ситуации, когда лучевое (или полуклассическое) приближение адекватно описывает рефракцию волн, и волновые (квантовые) поправки

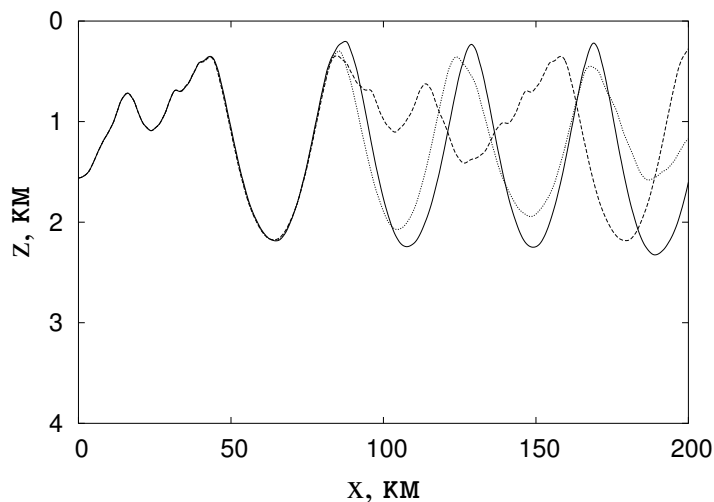


Рис. 5. Три близких луча, испытывающих рассеяние на вертикальном резонансе

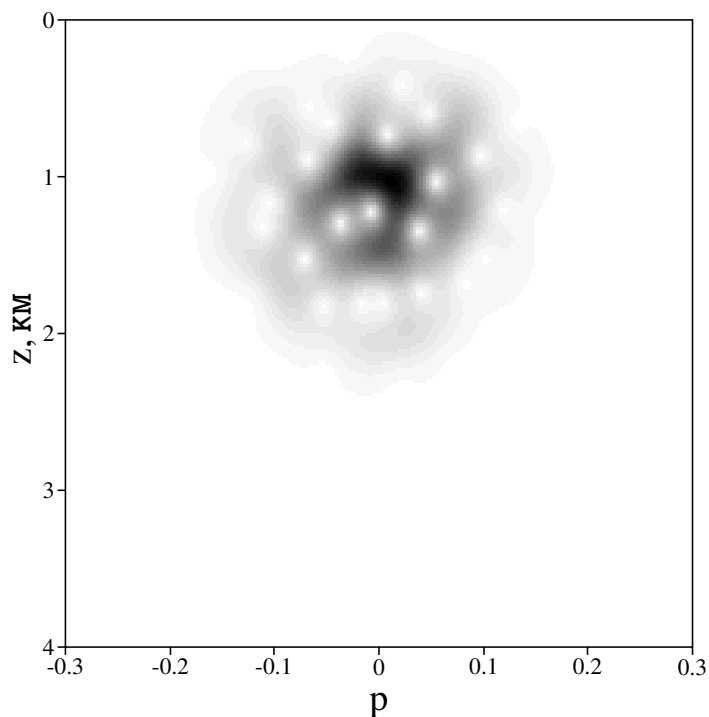


Рис. 6. Распределение Хузи для волнового пакета с частотой 100 Гц на расстоянии 200 км от источника

могут рассматриваться, выражаясь языком Берри и Маунта [30], как «плоть» для «классического скелета», создаваемого лучевой картиной. Однако при интерпретации результатов акустических экспериментов вопрос лучевого-волнового соответствия имеет дополнительные нюансы. При дальнем распространении звука в океане используются низкочастотные сигналы и рефрак-

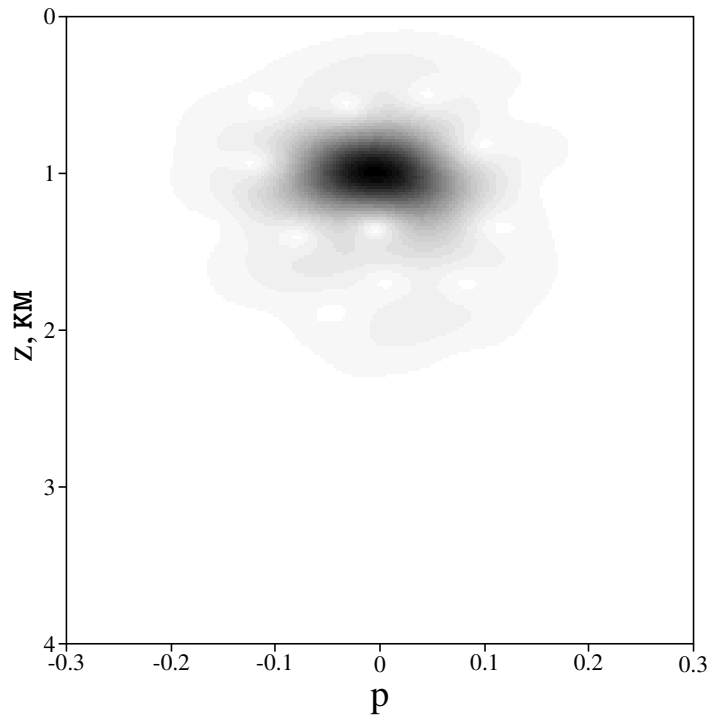


Рис. 7. Распределение Хузами для волнового пакета с частотой 50 Гц на расстоянии 1000 км от источника

ция волн нечувствительна к мелкомасштабным особенностям профиля скорости звука [31]. Отсюда следует ожидать подавления тех свойств лучей, которые связаны с тонкой структурой поля внутренних волн, порождающей в нашем случае хаотический слой в фазовом пространстве.

Таким образом, возникает вопрос: каким образом динамика волнового пакета внутри хаотического слоя меняется с ростом длины волны? С этой целью мы рассмотрим эволюцию гауссова пакета, задаваемого выражением

$$\varphi(z, x = 0) = (2\pi\sigma_z^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(z - z_a)^2}{4\sigma_z^2}\right). \quad (4.1)$$

Полуширина пакета σ_z связана с частотой сигнала с помощью формулы

$$\sigma_z = \frac{3c_0}{4\pi f p_0}, \quad (4.2)$$

где $p_0 = 0.1$. Волновой пакет (4.1) является аналогом так называемого когерентного состояния — квантового состояния с минимальной неопределенностью.

Чтобы связать динамику волнового пакета с классическим фазовым пространством, воспользуемся представлением Вигнера. Поскольку функция Вигнера из-за быстрых осцилляций является довольно неудобной для анализа, ее сглаживают, как правило, по угловым и пространственным масштабам. Частным случаем сглаженной функции Вигнера является хорошо известное распределение Хузами

$$W_h(z, p, x) = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\Delta_z^2}} \int dz' \varphi(z', x) \exp\left(ik_0 p(z' - z) - \frac{(z' - z)^2}{4\Delta_z^2}\right) \right|^2. \quad (4.3)$$

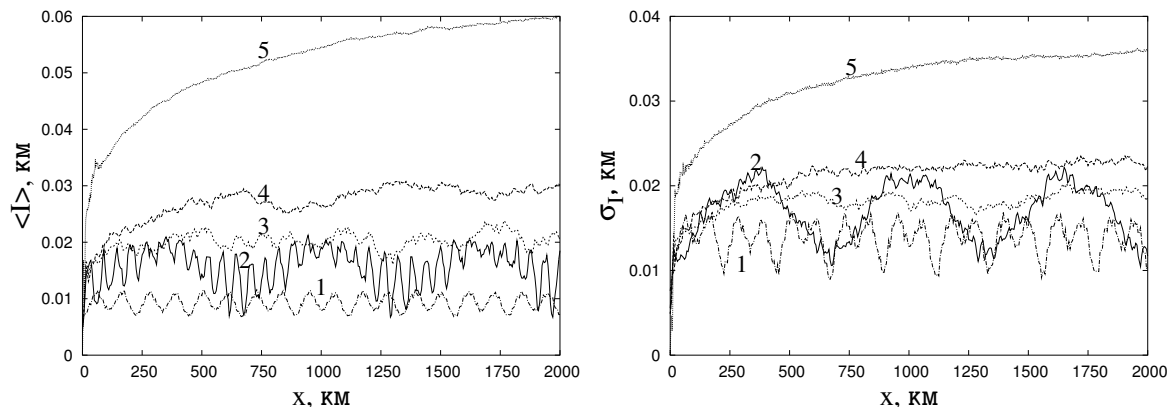


Рис. 8. Зависимость среднего действия (слева) и дисперсии действия (справа) от расстояния от источника. Кривые 1–4 — результат волновых вычислений с помощью распределения Хузими, кривая 5 — лучевой расчет

Распределение Хузими получается в результате гауссова сглаживания, при котором масштабы сглаживания удовлетворяют условию $2k_0\Delta_z\Delta_p = 1$. При численных расчетах мы приняли $\Delta_z = 100$ м.

Эволюция распределения Хузими позволяет выделить качественные особенности распределения звука. Так, при частоте сигнала 100 Гц волновой пакет быстро покрывает обширную площадь в фазовом пространстве, при этом нули и пики распределения Хузими распределены нерегулярно (рис. 6), что указывает на хаотический характер распространения звука [32, 33]. Расплывание волнового пакета с частотой 50 Гц гораздо слабее и значительная часть акустической энергии остается возле точки $z = 1$ км, $p = 0$ даже на расстоянии 1000 км от источника. Это соответствует почти горизонтальному распространению звука вдоль оси подводного звукового канала.

Чтобы более четко сопоставить свойства волновой и лучевой диффузии, можно использовать то обстоятельство, что функция Вигнера обладает некоторыми свойствами плотности вероятности в фазовом пространстве [34]. Функция Хузими (4.3), будучи неотрицательной по определению, более подходит для роли классической плотности вероятности, хотя такая трактовка не имеет строгого математического обоснования и может быть использована только как качественный метод изучения волнового-лучевого соответствия. В частности, функция Хузими может быть использована для вычисления так называемой энтропии Верля волнового поля [36, 35].

В этом разделе мы используем функцию Хузими в качестве плотности вероятности для описания эволюции волнового пакета в пространстве переменных действия, определяя среднее действие для волнового пакета по формуле

$$\langle I \rangle (x) = \int W_h(z, p, x) I(z, p) dz dp. \quad (4.4)$$

Вычисляя аналогичным образом среднее значение квадрата действия, мы также рассчитаем дисперсию действия

$$\sigma_I(x) = \sqrt{\langle I^2 \rangle (x) - \langle I \rangle^2 (x)}. \quad (4.5)$$

Функции $\langle I \rangle$ и $\sigma_I(x)$ имеют простой физический смысл — в соответствии с правилами квантования Бора–Зоммерфельда (3.8), они характеризуют полосу модового спектра, в которой кон-

центрируется основная доля акустической энергии:

$$m' - \Delta m \leq m \leq m' + \Delta m, \quad (4.6)$$

где $m' = k_0 \langle I \rangle - 1/2$, $\Delta m \simeq \sigma_I/k_0$,

Результаты вычислений приведены на рис. 8. Для сравнения приведены результаты лучевых расчетов тех же величин для ансамбля 10000 лучей с начальным распределением по глубине

$$\rho(z) = |\varphi(z, x = 0)|^2, \quad (4.7)$$

где $\varphi(z, x = 0; k_0)$ дается формулой (4.1). Все лучи испускаются параллельно оси канала, т. е. для всех лучей $p(x = 0) = 0$. Отметим, что поведение функций $\langle I \rangle(x)$ и $\sigma_I(x)$ оказалось похожим для различных значений ширины распределения (4.7) по глубине, формула для которой (4.2) содержит зависимость от частоты. Результаты лучевых расчетов, представленные на рисунке, относятся к случаю $f = 200$ Гц. Наблюдается быстрое расплывание лучевого распределения при малых x , после чего этот процесс сильно замедляется. Замедление связано с тем, что ансамбль лучей полностью занимает хаотический слой. Тем не менее и $\langle I \rangle(x)$, и $\sigma_I(x)$ сохраняют слабый рост даже при больших значениях x , что может быть вызвано прилипанием лучей к островкам, расположенным возле границы хаотического слоя (см. рис. 3). Эти островки приводят к слабому нарушению эргодичности диффузии лучей.

В отличие от лучевого ансамбля, низкочастотные волновые пакеты демонстрируют не монотонное нарастание $\langle I \rangle$ и σ_I , а колебания, т. е. волновой пакет испытывает пульсации со временем. Эти пульсации являются регулярными при частоте сигнала 50 Гц, слабо нерегулярными при частоте 100 Гц и хаотическими при частоте 500 Гц. Колебательная динамика меняется на монотонное возрастание только при частоте 1000 Гц, хотя значения $\langle I \rangle$ и σ_I и в этом случае гораздо меньше, чем у лучевого ансамбля.

Возможное объяснение пульсациям волнового пакета дано в работе [37]. В ней показано, что в низкочастотном случае вертикальная неоднородность ослабляет взаимодействие между соседними модами. Вместе с тем вертикальная неоднородность усиливает взаимодействие между модами, имеющими большую разницу номеров. Этот процесс имеет простое физическое толкование — при взаимодействии медленно меняющихся с глубиной первых мод поля с быстроосциллирующей в вертикальном направлении неоднородностью возбуждается дифрагированная волна, состоящая преимущественно из высоких мод. Таким образом, при низких частотах происходит интенсивный обмен энергией между далеко отстоящими компонентами модового спектра. Поскольку эти компоненты соответствуют разным частям фазового пространства, процесс перетекания энергии между модами сопровождается пульсациями распределения Хузами. Это не согласуется с лучевой (другими словами — рефракционной) картиной трансформации мод, предполагающей обратную ситуацию — ослабление межмодового взаимодействия с ростом разницы номеров. Таким образом, мы приходим к ситуации, когда лишь незначительная часть энергии волнового пакета эволюционирует в соответствии с лучевой картиной. По мере того как с уменьшением частоты ослабевает взаимодействие соседних мод, пульсации волнового пакета становятся все более и более регулярными.

5. Заключение

В представленной работе мы рассмотрели свойства распространения звука в океаническом волноводе со слабой, быстроосциллирующей с глубиной неоднородностью. Как следует из полученных результатов, характер влияния неоднородности на волновую динамику качественно зависит от частоты сигнала.

При высоких частотах динамика волн хорошо описывается лучевым приближением. В этом случае приосевые лучи испытывают рассеяние на вертикальном резонансе и демонстрируют хаотическую диффузию. Хаотическая диффузия приводит к образованию обширного хаотического слоя с быстрым перемешиванием внутри. Находясь внутри хаотического слоя, волновой пакет быстро расплывается и занимает всю его площадь, затем расплывание прекращается.

По мере понижения частоты снижается чувствительность рефракции волн к мелкомасштабным вертикальным неоднородностям и, как следствие, влияние вертикального резонанса ослабевает. На первый план выходят дифракционные эффекты, проявляющиеся как периодические пульсации волнового пакета. Полученные результаты свидетельствуют о принципиальной возможности подавления хаоса приосевых лучей при понижении частоты сигнала.

Особый интерес вызывает переходная стадия от устойчивости к хаосу при повышении частоты сигнала. Сначала периодические пульсации становятся слегка «зашумленными», а затем — сильнохаотическими, при этом волновой пакет начинает в среднем расплываться.

Работа поддержана грантами Президента Российской Федерации (проект МК-9007.2006.5), Программой Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике» и Программой фундаментальных исследований Дальневосточного отделения РАН (проект 06-III-B-07-297). Авторы благодарны М. Ю. Улейскому, А. И. Нейштадту, А. Л. Вировлянскому и С. В. Пранцу за содействие и полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

- [1] Casati, G., Chirikov B.V., and Shepelyansky D.L., Quantum limitation for chaotic excitation of the hydrogen atom in a monochromatic field, *Phys. Rev. Lett.*, 1984, vol. 53, pp. 2525–2528.
- [2] Штокман, Х.Ю., *Квантовый хаос: введение*. Демиховский, В.Я., ред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 376 с.
- [3] Grepel, D.R., Prange, R.E., and Fishman, S., Quantum dynamics of a nonintegrable system, *Phys. Rev. A*, 1984, vol. 29, pp. 1639–1647.
- [4] Cerruti, N.R., Tomsovic, S., Sensitivity of wavefield evolution and manifold stability in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 88, 054103.
- [5] Абдуллаев, С.С., Заславский, Г.М., Классическая нелинейная динамика и хаос лучей в задачах распространения волн в неоднородных средах, *УФН*, 1991, т. 161, сс. 1–43.
- [6] Palmer, D.R., Brown, M.G., Tappert, F.D. and Bezdek H.F., Classical chaos in nonseparable wave propagation problems, *Geophys. Res. Lett.*, 1988, vol. 15, pp. 569–572.
- [7] Smirnov I.P., Virovlyansky, A.L., and Zaslavsky, G.M., Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics, *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 64, 036221.
- [8] Brown M.G., Colosi, J.A., Tomsovic, S., Virovlyansky, A.L., Wolfson, M.A. and Zaslavsky, G.M. Ray dynamics in long-range deep ocean sound propagation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 113, pp. 2533–2547.
- [9] Virovlyansky, A.L., Ray travel times at long ranges in acoustic waveguides, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 113, pp. 2523–2532.
- [10] Makarov, D.V., Uleysky, M.Yu. and Prants, S.V., Ray chaos and ray clustering in an ocean waveguide, *Chaos*, 2004, vol. 14, pp. 79–95.
- [11] Smirnov, I.P., Virovlyansky, A.L., Edelman, M. and Zaslavsky, G.M., Chaos-induced intensification of wave scattering, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 72, 026206.

- [12] Makarov, D.V., Uleysky, M.Yu., Budyansky, M.V. and Prants, S.V., Clustering in randomly driven Hamiltonian systems, *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, 066210.
- [13] Munk, W., Wunsch, C., Ocean acoustic tomography: A scheme for large scale monitoring, *Deep-Sea Res.*, 1979, vol. 26, pp. 123–161.
- [14] Tappert, F.D., Xin Tang., Ray chaos and eigenrays, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996, vol. 99, pp. 185–195.
- [15] Veron-Vera, F.J., Brown, M.G., Colosi, J.A., Tomsovic, S., Virovlyansky, A.L., Wolfson, M.A. and Zaslavsky, G.M., Ray dynamics in a long-range acoustic propagation experiment, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 114, pp. 1226–1242.
- [16] Макаров, Д.В., Улейский, М.Ю., Высвечивание лучей из горизонтально-неоднородного подводного звукового канала, *Акустический журнал*, 2007, т. 53, сс. 565–573.
- [17] Боголюбов, Н.Н., Митропольский, Ю.А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1955, 408 с.
- [18] Itin, A.P., Neishtadt, A.I. and Vasiliev, A.A., Captures into resonance and scattering on resonance in dynamics of a relativistic particle in magnetic field and electrostatic wave, *Physica D*, 2000, vol. 141, pp. 281–296.
- [19] Нейштадт, А.И., *Захват в резонанс и рассеяние на резонансе в двухчастотных системах*, Труды математического института им. В.А. Стеклова, 2005, т. 250, сс. 198–218.
- [20] Макаров, Д.В., Улейский, М.Ю., Генерация баллистического транспорта частиц при воздействии слабого переменного возмущения на периодическую гамильтонову систему, *Письма в ЖЭТФ*, 2006, т. 83, сс. 614–617.
- [21] Vainchtein, D.L., Neishtadt, A.I. and Mezic, I., On passage through resonances in volume-preserving systems, *Chaos*, 2006, vol. 16, 043123.
- [22] Makarov, D.V., Uleysky, M.Yu. Resonant influence of spatial oscillations of a perturbation on motion of a nonlinear oscillator, *Nonlinear Science and Complexity*, Luo, A.C., Dai, L. and Hamidzadeh, H.R., Eds. World Scientific Publishing Co, 2007, pp. 54–61.
- [23] Makarov, D.V., Uleysky, M.Yu., Giant acceleration in slow-fast space-periodic Hamiltonian systems, *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 75, 065201.
- [24] Кравцов, Ю.А., Орлов, Ю.И., Каустики, катастрофы и волновые поля, *УФН*, 1983, т. 141, сс. 591–627.
- [25] Latka, M., Grigolini, P. and West, B.J., Classical-quantum correspondence in the driven surface-state-electron model, *Phys. Rev. A*, 1993, vol. 47, pp. 4649–4662.
- [26] Kolovsky, A.R., Quantum coherence, evolution of the Wigner function, and transition from quantum to classical dynamics for a chaotic system, *Chaos*, 1996, vol. 6, pp. 534–542.
- [27] Berman, G.P., Zaslavsky, G.M., Condition of stochasticity in quantum nonlinear system, *Physica A*, 1978, vol. 91, pp. 1450–1460.
- [28] Tomsovic, S., Heller, M.V., Semiclassical dynamics of chaotic motion: unexpected long-time accuracy, *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol. 67, pp. 664–667.
- [29] Kaplan, L., Semiclassical accuracy in phase space for regular and chaotic dynamics, *Phys. Rev. E.*, 2004, vol. 70, 026223.
- [30] Berry, M.V., Mount, K.E., Semiclassical approximations in wave mechanics, *Rep. Prog. Phys.*, 1972, vol. 35, pp. 315–397.
- [31] Hegewisch, K.C., Cerruti, N.R. and Tomsovic, S., Ocean acoustic wave propagation and ray method correspondence: internal wave fine structure, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005, vol. 117, pp. 1582–1594.

- [32] Bala Sundaram, Zaslavsky, G.M., Wave analysis of ray chaos in underwater acoustics, *Chaos*, 1999, vol. 9, pp. 483–492.
- [33] Zyczkowski, K., Quantum chaotic system in the generalized Husimi representation, *Phys. Rev. A*, 1987, vol. 35, pp. 3546–3549.
- [34] Татарский, В.И., Вигнеровское представление квантовой механики, *УФН*, 1983, т. 26, сс. 587–619.
- [35] Sugita, A., Aiba, H., Second moment of the Husimi distribution as a measure of complexity of quantum states, *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 65, 036205.
- [36] Wehrl, A., General properties of entropy, *Rev. Mod. Phys.*, 1978, vol. 50, pp. 221–260.
- [37] Макаров, Д.В., Коньков, Л.Е. и Улейский, М.Ю., Лучевое-волновое соответствие и подавление хаоса при дальнем распространении звука в океане. *Акустический журнал* (отправлено в печать).