

## Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе

**В. С. Анищенко, С. М. Николаев**

Саратовский государственный университет  
410026, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83  
wadim@chaos.ssu.runnet.ru, sergeyn@chaos.ssu.runnet.ru

**J. Kurths**

Group of Nonlinear Dynamics, Institute of Physics  
University of Potsdam, D-14415, Potsdam, Germany  
juergen@agnld.uni-potsdam.de

*Получено 14 декабря 2007 г.*

Исследуется синхронизация резонансного предельного цикла на двумерном торе внешним гармоническим сигналом. Режим резонансного цикла реализуется в системе двух связанных генераторов Ван дер Поля, рассматриваются резонансы  $1 : 1$  и  $1 : 3$ . Анализируется влияние степени связи между генераторами. Показано, что эффект синхронизации резонансного предельного цикла на торе осуществляется в общем случае через разрушение резонанса с последующим захватом вначале одной, а затем второй из базовых частот автономной системы. Представлен бифуркационный механизм эффекта синхронизации.

Ключевые слова: предельный цикл, тор, седло-узловая бифуркация, синхронизация

**V. S. Anishchenko, S. M. Nikolaev, J. Kurths**

### Synchronization mechanisms of resonant limit cycle on two-dimensional torus

We investigate synchronization of a resonant limit cycle on a two dimensional torus by an external harmonic signal. The regime of resonant limit cycle is realized in a system of two coupled Van der Pol oscillators, we consider the resonances  $1:1$  and  $1:3$ . We analyse the influence of the generators coupling strength. We show, that generally the effect of synchronization of a resonant limit cycle on torus is followed by the destruction of the resonance in the system, next one of the basic frequencies of the system becomes locked, and then another. We consider the bifurcation mechanism of synchronization effect.

Keywords: limit cycle, torus, saddle-node bifurcation, synchronization

Mathematical Subject Classifications: 39Axx, 93D05

## 1. Введение

Квазипериодическими колебаниями называют устойчивые решения динамических систем, которые зависят от конечного числа периодических функций  $\phi_k(\omega_k t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), имеющих период  $T_k = 2\pi/\omega_k$  по каждому аргументу. Квазипериодические решения описывают достаточно сложные процессы колебаний с  $n$  независимыми частотами  $\omega_k$ , которые в общем случае рационально не связаны. Эти частоты  $\omega_k$  представляют собой с физической точки зрения независимые частотные моды парциальных колебательных систем, взаимодействующих между собой. Результатом такого взаимодействия и являются квазипериодические колебания.

Квазипериодические колебания с двумя и более независимыми частотами являются широко распространенным типом колебаний. В фазовом пространстве им отвечает предельное множество в виде  $n$ -мерного тора. Устойчивость, бифуркации и переходы к хаосу через квазипериодические колебания представляют достаточно сложную и во многом не до конца решенную задачу, которой посвящено большое количество работ [1–6]. Однако важная проблема синхронизации квазипериодических колебаний оказалась наименее исследованной. По существу, впервые синхронизация квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами была частично решена в [7, 8]. В работе [7] исследовано явление захвата числа вращения в системе двух связанных генераторов двухчастотных колебаний. Уже в этой работе установлено, что режим полной синхронизации реализуется в результате последовательного захвата сначала одной, а затем двух базовых частот. В работе [8] описаны результаты по синхронизации двухчастотных резонансных колебаний внешним гармоническим сигналом. Установлено принципиальное явление: при синхронизации предельного цикла на торе каждая из двух базовых частот системы синхронизируется независимо, несмотря на резонанс, при котором эти частоты рационально связаны. Эффект подтвержден численно и экспериментально для резонансов  $\Theta = 1 : 4$  и  $\Theta = 1 : 3$  [8].

Настоящая работа, по существу, решает ту же проблему, что и работа [8]. Возникает естественный вопрос, с чем это связано? Причин несколько, и состоят они в следующем. Во-первых, используемый в работе [8] генератор двухчастотных колебаний обеспечивает модуляционные автоколебания с частотами  $f_0$  и  $f_1$ , амплитуды которых существенно различны, и не допускает их вариацию в необходимых пределах. Во-вторых, исследуемая в [8] система не позволяет реализовать режим резонанса  $\Theta = 1 : 1$ , представляющий особую важность для понимания бифуркационного механизма синхронизации. Наконец, в-третьих, автономный генератор в [8] не позволяет управлять внутренней связью между базовыми колебательными модами, что существенно усложняет понимание наблюдаемых эффектов.

Учитывая вышесказанное, мы предлагаем другую, более удобную, модель, которая лишена указанных недостатков. Эта модель представляет собой систему из двух симметрично связанных генераторов Ван дер Поля, где амплитуды парциальных генераторов, их частоты и степень связи легко управляются путем задания соответствующих значений параметров. С использованием этой модели нам удалось не только подтвердить основные результаты [7, 8], но и установить бифуркационный механизм, лежащий в основе эффекта синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе.

## 2. Взаимная синхронизация двух симметрично связанных генераторов. Резонансный предельный цикл на двумерном торе

Рассмотрим детали классического механизма синхронизации двух связанных генераторов периодических колебаний. В качестве парциальной автоколебательной системы выберем модель генератора Ван дер Поля в режиме предельного цикла как образа устойчивых почти гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $m$  — параметр возбуждения,  $\alpha_1^2 = (2\pi f_1)^2$ ,  $f_1 = 1/T_0$ , где  $f_1$  — частота,  $T_0$  — период колебаний. Как хорошо известно, автоколебания в системе (2.1) возникают вследствие бифуркации Андронова–Хопфа в точке  $m^* = 0$ , их амплитуда при  $m > m^*$  растет пропорционально  $\sqrt{m}$ .

В качестве второй системы рассмотрим тот же генератор Ван дер Поля (2.1), введя расстройку по частоте ( $\alpha_2 \neq \alpha_1$ ). Будем исследовать режим автоколебаний в случае симметричной связи между генераторами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь параметр  $k$  характеризует степень внутренней связи между генераторами, параметр  $m$  будет одинаковым для обоих генераторов, а частоты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выберем различными, но достаточно близкими друг к другу.

Рассмотрим режимы автоколебаний в системе (2.2) при значениях параметров  $m = 0, 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $k = 0, 02$ . Параметр  $\alpha_2$  будем изменять в пределах  $0,98 < \alpha_2 < 1, 02$ , исследуя влияние расстройки парциальных частот  $f_1$  и  $f_2$  на динамику системы.

На рис. 1 представлен результат расчета области синхронизации, которая характеризует эффект захвата частоты на основном тоне. Первый генератор ( $\alpha_1 = 1$ ) захватывает частоту второго и в результате в области синхронизации (область I на рис. 1) частоты взаимодействующих генераторов равны:  $f_1 = f_2$ . При этом частота  $f_2 = f_1$  в области I не совпадает с парциальной частотой второго генератора в отсутствие связи ( $k = 0$ ). Рис. 1 иллюстрирует эффект взаимной синхронизации двух генераторов путем захвата частоты. Область синхронизации I на плоскости параметров связь ( $k$ ) — расстройка ( $\alpha_2$ ) представляет собой «клюв» или «язык» Арнольда с числом вращения Пуанкаре  $\Theta = 1 : 1$ , что отвечает синхронизации на основном тоне.

Вне области синхронизации (на рис. 1 это области II) наблюдаются режимы двухчастотных колебаний или биений, при которых частоты парциальных генераторов не совпадают ( $f_1 \neq f_2$ ).

Рассмотрим этот эффект с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений. В области II образом автоколебательного режима является нерезонансный (в общем случае) эргодический двумерный тор, отвечающий режиму двухчастотных квазипериодических колебаний.

При входе в область I из области II (с пересечением бифуркационных линий  $l_s$  (рис. 1)) на двумерном торе рождается структура в виде устойчивого и седлового предельных циклов, лежащих на поверхности тора. Устойчивый цикл отвечает режиму взаимной синхронизации двух генераторов, характеризуя устойчивое периодическое движение с частотой  $f_1 = f_2$  в режиме захвата частоты.

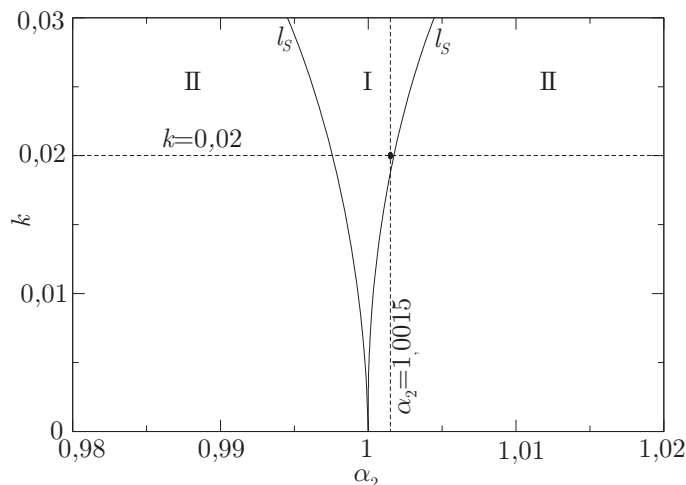


Рис. 1. Область взаимной синхронизации генераторов (2.2) при  $m = 0, 1; \alpha_1 = 1$ . I — область существования резонансного предельного цикла с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$ . II — область квазипериодических колебаний

Вышесказанное иллюстрирует рис. 2, где представлены проекции фазовых портретов двумерного тора  $T^2$  (рис. 2а) и устойчивого ( $L_0$ ) и седлового ( $L_0^*$ ) резонансных предельных циклов на нем (рис. 2б). Отметим весьма важное обстоятельство: тор  $T^2$  существует как в области II, так и в области I! В эксперименте в области I мы видим только устойчивый предельный цикл  $L_0$ . Однако этот цикл лежит на поверхности двумерного тора, и мы это покажем. С этой целью рассмотрим сечение Пуанкаре плоскостью  $x = 0$  как для режима рис. 2а, так и рис. 2б. Результаты представлены на рис. 3. Рис. 3а иллюстрирует замкнутую инвариантную кривую  $l$  как образ  $T^2$  в сечении Пуанкаре. Рис. 3б необходимо пояснить более детально. В области синхронизации I (рис. 1) на торе существуют два предельных цикла: устойчивый и седловой (рис. 2б). В сечении Пуанкаре (рис. 3б) им отвечают устойчивая неподвижная точка  $P$  и седловая  $Q$ . Неустойчивые сепаратрисы седла  $Q$  замыкаются на устойчивый узел  $P$ , образуя замкнутую инвариантную кривую. Эта кривая и есть образ резонансного двумерного тора в области синхронизации. Если двигаться в плоскости параметров области I в направлении к бифуркационным линиям  $l_s$  (рис. 1), то имеет место следующая картина: седло  $Q$  и узел  $P$  идут на сближение, на бифуркационных линиях  $l_s$  они сливаются и с входом в область II они исчезают в результате седло-узловой бифуркации. Таким образом, режиму синхронизации отвечает область существования устойчивого и седлового предельных циклов на двумерном торе, а разрушению режима синхронизации — седло-узловая бифуркация этих циклов.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы, важные для понимания результатов исследований, описываемых в настоящей работе:

1. Режиму синхронизации через захват частоты отвечает устойчивый предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора.
2. Этот предельный цикл не является образом колебаний ни первой, ни второй из взаимодействующих подсистем, он возникает как результат их взаимодействия.

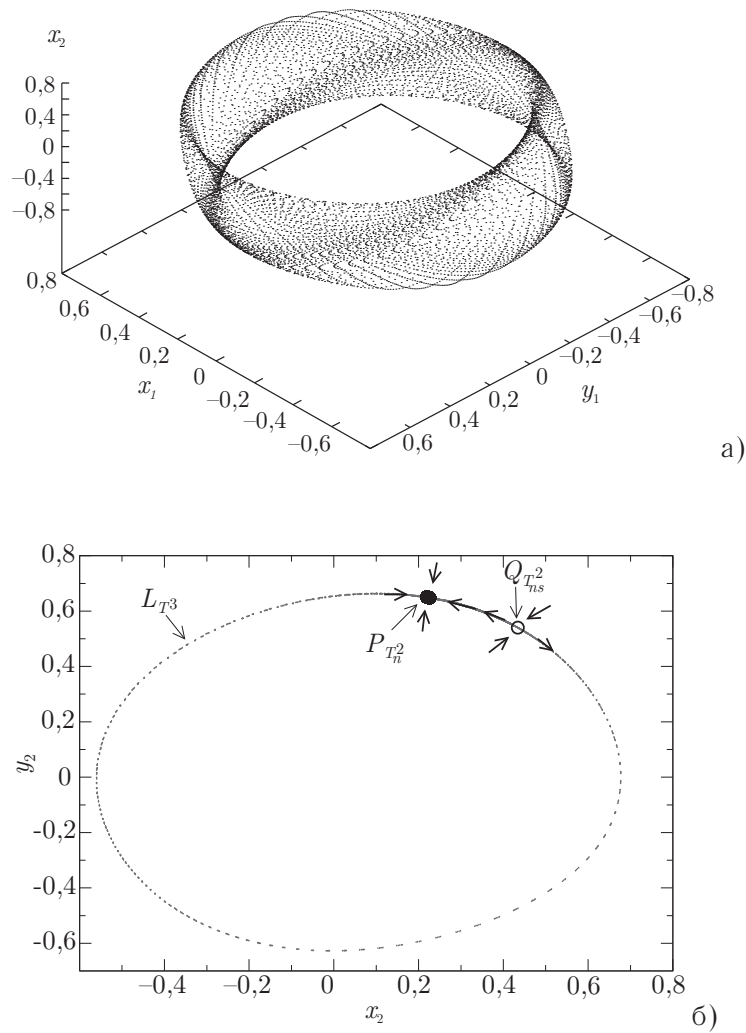


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий на плоскость переменных  $(x_1, y_1, x_2)$  системы (2.2) для значений параметров  $m = 0, 1; k = 0, 02; \alpha_1 = 1$  для области II (а)  $\alpha_2 = 1, 003$  и области I (б)  $\alpha_2 = 1, 0015$ . Проекция двумерного тора вне резонанса изображена серым, устойчивый ( $L_0$ ) и седловой ( $L_0^*$ ) циклы на торе в области резонанса

В заключение этого раздела отметим, что изложенная выше качественная теория взаимной синхронизации двух генераторов описывает и режим внешней синхронизации, который отличается лишь тем, что частота синхронных (захваченных) колебаний всегда будет совпадать с частотой внешнего воздействия. Кроме того, изложенный механизм синхронизации на основном тоне ( $\Theta = 1 : 1$ ) полностью идентичен и случаю  $\Theta = p : q$ , где  $p$  и  $q$  — рациональные числа. В этом случае седло-узловые бифуркации будут иметь место для более сложных (многообходных) циклов, что не имеет принципиального значения.

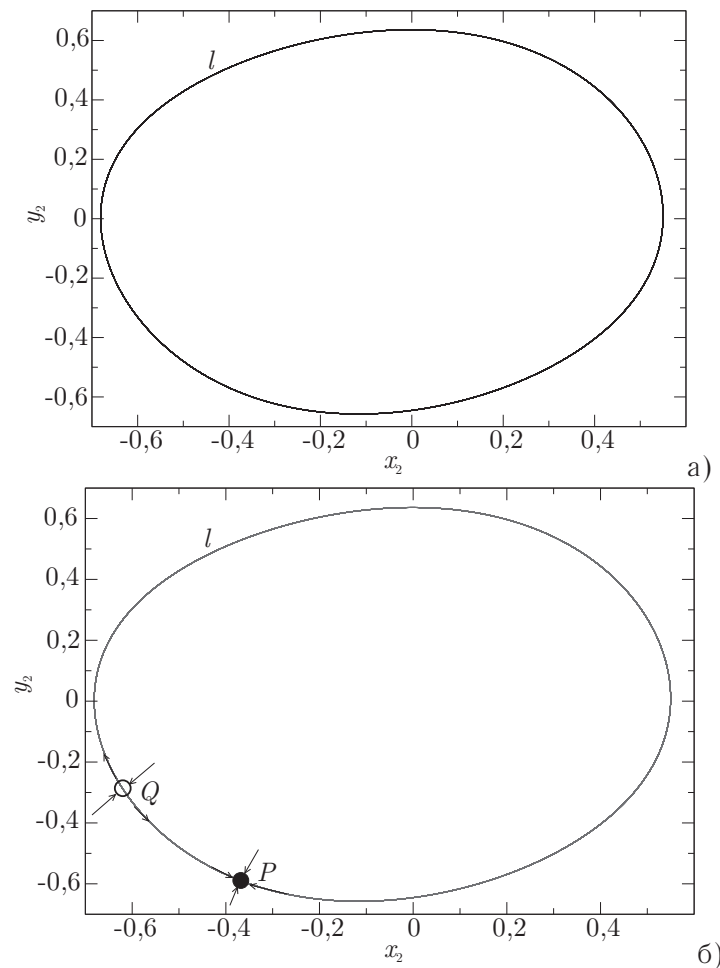


Рис. 3. Сечения эргодического тора (а) и резонансных циклов на нем (б) для случаев (а) и (б) рис. 2 соответственно

### 3. Воздействие внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов

Исследуем реакцию системы (2.2) на внешний периодический сигнал. С этой целью введем источник гармонического воздействия  $k_e \sin[(2\pi f_e)t]$  во второе уравнение системы (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1) + k_e \sin[(2\pi f_e)t], \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выберем режим колебаний автономной системы (3.1) ( $k_e = 0$ ), отвечающий области резонанса I (рис. 1), задав значения параметров  $m = 0,1$ ;  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1,0015$ ,  $k = 0,02$ . Этому режиму отвечает указанная точка на плоскости параметров рис. 1. Автономная система будет реализовывать режим устойчивых периодических автоколебаний. Ему отвечает устойчивый предельный цикл  $L_0$ . Отметим, что с точки зрения экспериментатора, наблюдающего режим периодических колебаний, это обычное устойчивое периодическое движение с частотой  $f_1$  и спектром,

включающим нечетные гармоники  $f_n = 2n + 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) в силу симметрии. Тот факт, что предельный цикл  $L_0$  лежит на поверхности двумерного тора никак не сказывается в обычном эксперименте. Однако более детальные исследования показали, что этот факт является принципиальным и приводит к весьма существенным отличиям при анализе эффекта внешней синхронизации, если речь идет о синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе.

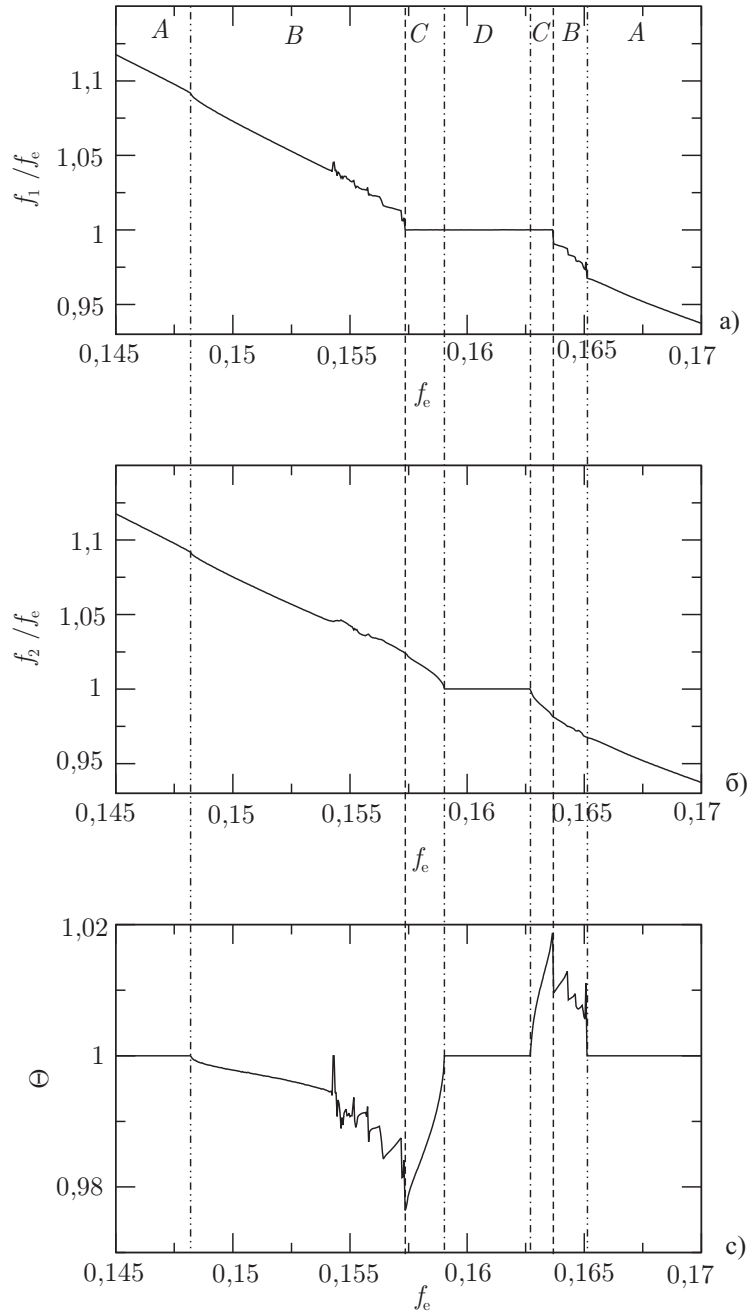


Рис. 4. Зависимости отношений частот генераторов  $f_1$  (а) и  $f_2$  (б) к частоте внешнего воздействия  $f_e$  и числа вращения  $\Theta = f_1 : f_2$  (в) от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0,025$

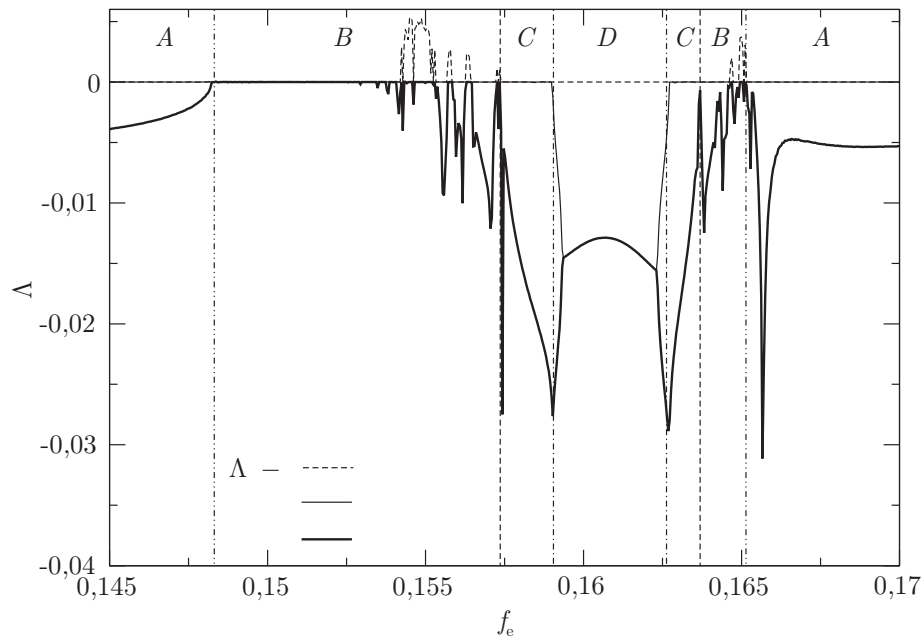


Рис. 5. Зависимости трех старших показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0,025$

На рис. 4а–4б представлены зависимости частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  от частоты внешнего сигнала  $f_e$ . Амплитуда сигнала воздействия была выбрана  $k_e = 0,025$ , частоты  $f_1$  и  $f_2$  нормировались на частоту внешнего сигнала  $f_e$ . Рис. 4в иллюстрирует зависимость числа вращения  $\Theta = f_1 : f_2$  от частоты внешнего воздействия. Как видно из графиков, на рис. 4 целесообразно выделить области  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , в которых динамика системы качественно различна. Используем для анализа результаты расчета спектра ляпуновских характеристических показателей, представленные на рис. 5.

В области  $A$  частота внешнего сигнала достаточно удалена от частоты предельного цикла  $f_1 = f_2 \approx 0,158$ . В системе реализуются квазипериодические колебания с частотами  $f_e$  и  $f_1 = f_2$ . Им отвечает существование в фазовом пространстве двумерного тора, что подтверждается наличием двух нулевых показателей Ляпунова в спектре ЛХП (рис. 5). Условие резонанса  $f_1 = f_2$  в области  $A$  еще не нарушается.

В области  $B$  режим взаимной синхронизации (см. рис. 1–3) разрушается. Частоты  $f_1$  и  $f_2$  становятся различными, о чем свидетельствует график зависимости числа вращения  $\Theta$  (рис. 4в), и возникает режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_e$ . Ему отвечает аттрактор в виде трехмерного тора и наличие трех нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 5). Динамика системы в области  $B$  достаточно сложна. На трехмерном торе с изменением частоты  $f_e$  могут возникать частичные резонансы в виде  $T^2$  и даже хаотические режимы. Однако исследования этих бифуркаций пока не входит в нашу задачу.

В области  $C$  реализуется первое из явлений, представляющих особый интерес: имеет место захват базовой частоты первого генератора внешним сигналом, при котором  $f_e = f_1$ , но  $f_1 \neq f_2$ . На трехмерном торе возникает резонансная структура в виде двумерного тора, что доказывается наличием двух нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 5). Расчеты показали, что сечение Пуанкаре в этом режиме имеет вид одномерной замкнутой инвариантной кривой.



Наконец, в области  $D$  реализуется режим полной синхронизации: внешний сигнал захватывает обе частоты взаимодействующих генераторов, и выполняется условие  $f_e = f_1 = f_2$ . В области  $D$  в спектре ЛХП лишь один показатель является нулевым, фазовый портрет представляет собой аттрактор в виде предельного цикла.

Изложенные выше результаты свидетельствуют о весьма важном отличии эффекта синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе от классического случая. Это отличие заключается в том, что внешнее воздействие вначале разрушает режим исходной взаимной синхронизации, а затем осуществляется последовательный захват вначале одной базовой частоты, потом второй. В итоге реализуется эффект полной синхронизации, которому отвечает эффект захвата числа вращения (рис. 4в, область  $D$ ).

#### 4. Основные бифуркации квазипериодических режимов в системе (3.1) при синхронизации резонансного предельного цикла автономной системы (2.2)

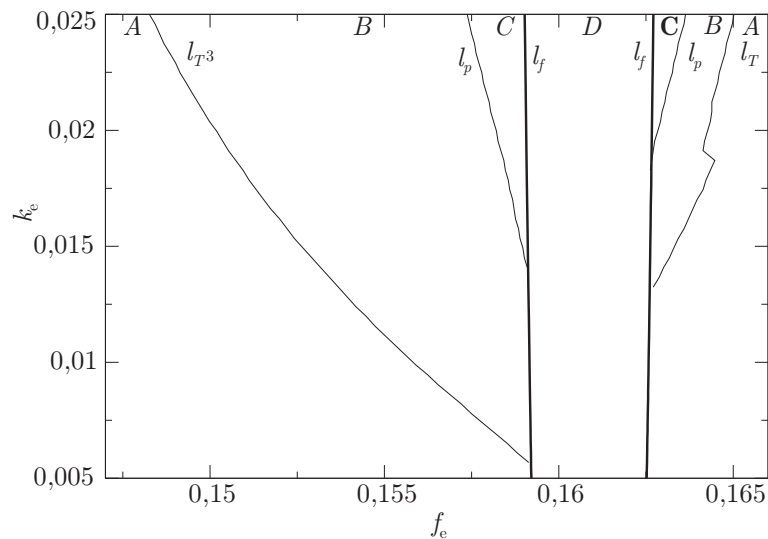


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма системы (3.1) на плоскости параметров  $(f_e, k_e)$ , построена для фиксированных значений  $m = 0, 1; \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1,0015, k = 0,02$

С целью более детального понимания механизмов перестройки режимов колебаний в системе (3.1) при вариации частоты внешнего воздействия была построена бифуркационная диаграмма системы на плоскости параметров «амплитуда-частота» внешней силы (рис. 6). Графики, представленные на рис. 4 и 5, соответствуют движению по прямой  $k_e = 0,025$  диаграммы рис. 6. Переходам из областей A в области B отвечают бифуркационные линии  $l_{T3}$ , из областей B в области C — линии  $l_p$ , из областей C в область D — линии  $l_f$ . Как видно из диаграммы, переходы в область D (полная синхронизация резонансного цикла) могут осуществляться из областей A или B через бифуркационные линии  $l_f$ . Рассмотрим более детально бифуркационные явления, которым отвечают вышеуказанные бифуркационные линии  $l_{T3}, l_p$  и  $l_f$ .

Как показали исследования, основным колебательным режимом системы (3.1) является режим трехчастотных квазипериодических колебаний с частотами  $f_e \neq f_1 \neq f_2$ . Соответствующим аттрактором является трехмерный тор  $T^3$ , область существования которого на диаграмме рис. 6 обозначена символом  $B$ . Все основные бифуркации в системе (3.1), ведущие к синхронизации исходного резонансного цикла, связаны с бифуркациями именно режима  $T^3$ .

Рассмотрим область  $B$ , где существует устойчивый трехмерный тор  $T^3$ . С целью более наглядного представления бифуркаций трехмерного тора будем использовать двойное сечение Пуанкаре. Для получения двойного сечения Пуанкаре сначала производился расчет обычного сечения Пуанкаре, а затем в полученную последовательность точек вводилась дополнительная секущая плоскость. Далее, так как вероятность того, что полученные решения окажутся близки к дополнительной секущей плоскости, мала, производилась линейная аппроксимация решений в ее окрестности. Обычное сечение Пуанкаре для  $T^3$  даст нам двумерный тор  $T_{T^3}$ . Двойное сечение Пуанкаре будет представлять собой инвариантную замкнутую кривую в виде цикла  $L_{T^3}$ . неподвижная точка на этой инвариантной кривой будет являться образом резонансного двумерного тора, лежащего на  $T^3$ .

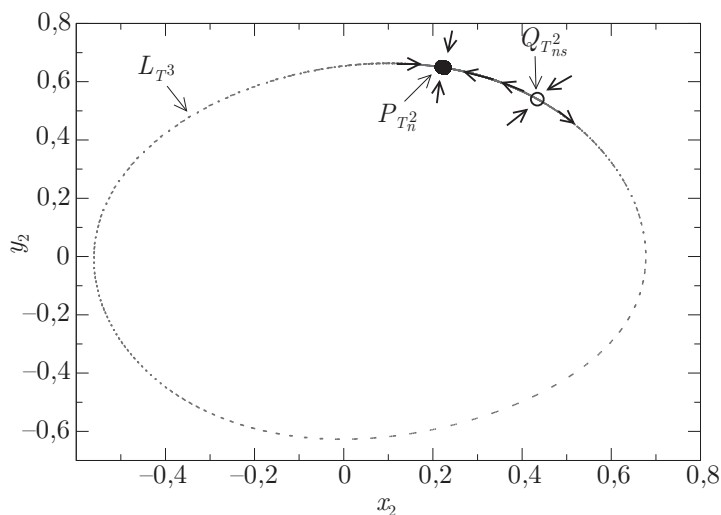


Рис. 7. Седло-узловая бифуркация в двойном сечении Пуанкаре, соответствующая пересечению линии  $l_{T^3}$  из области  $B$  в область  $A$ .  $L_{T^3}$  — инвариантная кривая,  $P_{T_n^2}$  — устойчивый узел,  $Q_{T_{ns}^2}$  — седло. Расчеты представлены для значений параметров:  $f_e = 1,482$ ;  $k_e = 0,025$ ,  $m = 0,1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1,0015$ ,  $k = 0,02$

Исследуем переход из области  $B$  в область  $A$  диаграммы рис. 6 через бифуркационную линию  $l_{T^3}$ . На рис. 7 представлены результаты соответствующих расчетов с использованием двойного сечения Пуанкаре. Образом  $T^3$  здесь является кривая  $L_{T^3}$ , отвечающая режиму  $T^3$  в области  $B$ . При достижении бифуркационной точки (точки пересечения линии  $l_{T^3}$  из области  $B$  в направлении области  $A$ ) на кривой  $L_{T^3}$  рождается неподвижная точка типа «седло-узел». Смещение по параметрам в область  $A$  приводит к расщеплению седло-узла на устойчивый узел и седло. В представлении двойного сечения Пуанкаре реализуется классическая седло-узловая бифуркация.

В полном фазовом пространстве системы (3.1) картина, представленная на рис. 7, отвечает рождению (исчезновению) пары двумерных торов на трехмерном торе  $T^3$ . Один из этих торов устойчивый ( $T_n^2$ ), другой — седловой ( $T_{ns}^2$ ).

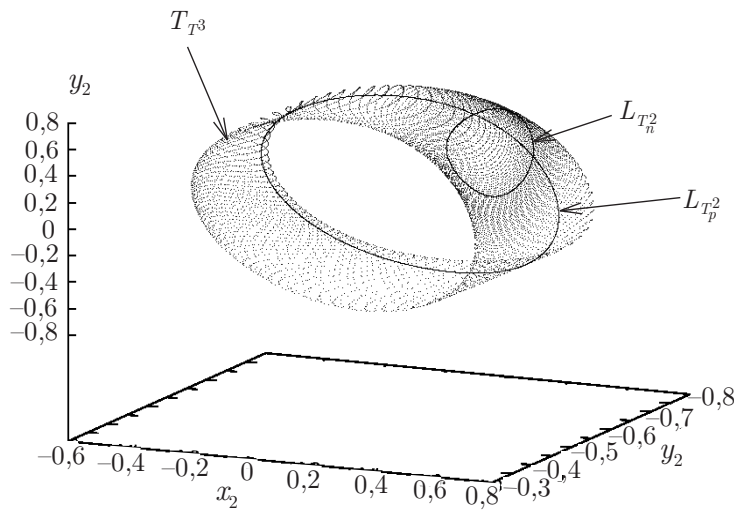


Рис. 8. Проекция сечений Пуанкаре трехмерного тора  $T_{T^3}$  ( $f_e = 0,15$ ) и резонансных двумерных торов  $L_{T_n^2}$  ( $f_e = 0,1482$ ) и  $L_{T_p^2}$  ( $f_e = 0,158$ )

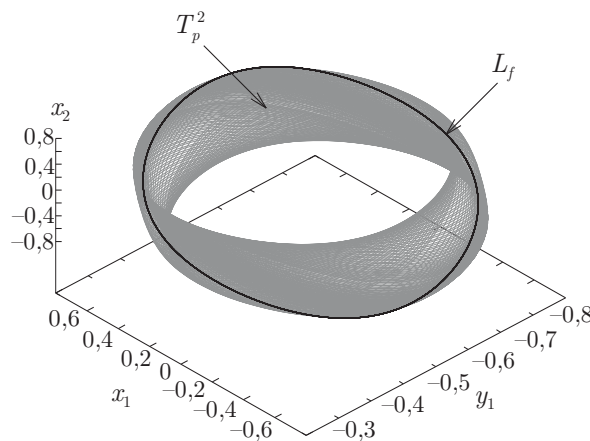


Рис. 9. Проекция фазовых портретов двумерного тора  $T_p^2$  (серый) и резонансного предельного цикла  $L_f$  (черный) на нем, рассчитанные для значений частоты  $f_e = 0,1587$  ( $T_p^2$ ) и  $f_e = 0,1592$  ( $L_f$ )

Исследуем бифуркационный переход из области  $B$  в область  $C$ , которому отвечает пересечение бифуркационных линий  $l_p$  на диаграмме рис. 6. Расчеты показали, что на линии  $l_p$  реализуется также седло-узловая бифуркация и в области  $C$  рождаются также устойчивый и седловой резонансные двумерные торы, лежащие на трехмерном торе  $T^3$ . Результаты расчетов иллюстрирует рис. 8. Режиму колебаний в области  $B$  отвечает трехмерный тор  $T^3$ , сечение Пуанкаре которого обозначено  $T_{T^3}$  на рис. 8. Резонансному устойчивому двумерному тору в области  $C$  отвечает инвариантная замкнутая кривая, обозначенная на рис. 8  $L_{T_p^2}$ . Для сравнения на рис. 8 представлен и образ устойчивого двумерного резонансного тора  $L_{T_n^2}$  в области  $A$ . Седловые торы на рис. 8 не приведены.

Торы  $T_n^2$  и  $T_p^2$  различные, так как с физической точки зрения отвечают разным условиям частичной синхронизации. В области  $A$  —  $f_1 = f_2$  и  $f_e \neq f_1$ , а в области  $C$  —  $f_e = f_1$  и  $f_1 \neq f_2$ .

Наконец, рассмотрим бифуркационный переход из области  $C$  в область  $D$  путем пересечения линии  $l_f$ . Этому переходу отвечает эффект захвата второй частоты  $f_2 = f_e$  и возникновение режима полной синхронизации  $f_1 = f_2 = f_e$ . Исследования показали, что линия  $l_f$  отвечает классической седло-узловой бифуркации резонансных циклов, лежащих на двумерном торе  $T_p^2$ . На двумерном торе  $T_p^2$ , который существует в области  $C$  и является резонансной структурой на  $T^3$ , в бифуркационной точке (на линии  $l_f$ ) рождается устойчивый и седловой циклы. При пересечении линии  $l_f$  в направлении области  $D$  возникает устойчивое периодическое движение, отвечающее режиму полной синхронизации. Результаты иллюстрирует рис. 9, где представлены фазовые проекции двумерного тора  $T_p^2$  (в области  $C$ ) и устойчивого резонансного предельного цикла  $L_f$  на нем (область  $D$ ).

## 5. Особенности синхронизации резонансных предельных циклов автономной системы (2.2) при различных значениях числа вращения $\Theta$ и коэффициента связи $k$

Изучение эффектов синхронизации, представленных выше, показало, что рассмотренный случай резонанса с числом вращения  $\Theta = 1 : 1$  является наиболее общим и достаточно сложным с точки зрения теории бифуркаций. Представляется важным изучение эффектов синхронизации при других значениях числа вращения, отвечающих резонансам  $\Theta = m : n$ , где  $m, n = 1, 2, \dots$ . Кроме того, эффекты синхронизации в системе (3.1) должны зависеть от коэффициента связи генераторов  $k$ . Эта зависимость важна для понимания механизмов синхронизации генераторов квазипериодических колебаний, в которых параметр связи может не входить явным образом в динамическую модель или в силу конструктивных особенностей системы не являться независимым параметром. В связи с вышесказанным представляется интересным исследовать особенности бифуркационных свойств системы (3.1) при различных значениях параметра связи  $k$ .

Рассмотрим режим резонансного предельного цикла в системе (2.2) с числом вращения  $\Theta = 1 : 3$  и попытаемся осуществить его синхронизацию внешним периодическим сигналом (3.1).

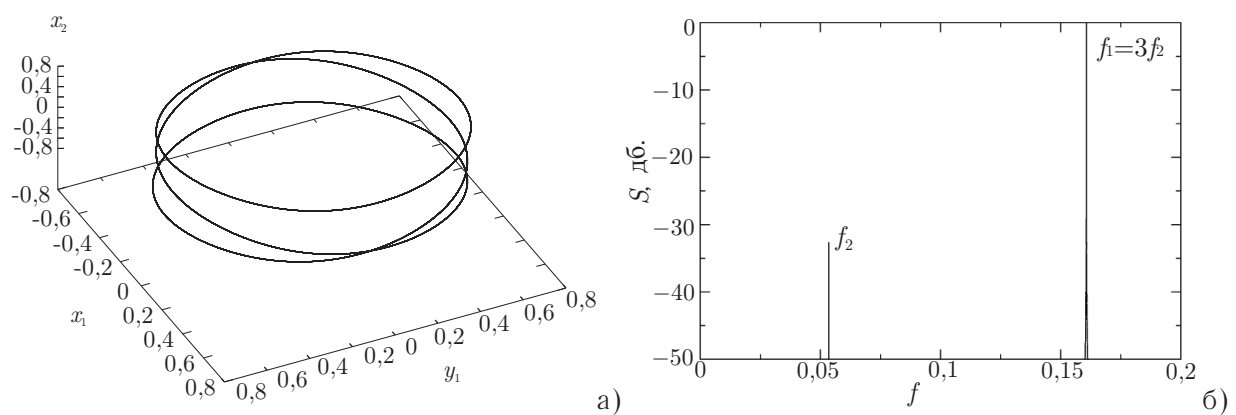


Рис. 10. Предельный цикл в системе (2.2) в условиях резонанса  $\Theta = 1 : 3$  (а) и соответствующий спектр мощности колебаний (б), рассчитанные для значений параметров  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0,328$ ,  $m = 0,1$  и  $k = 0,005$

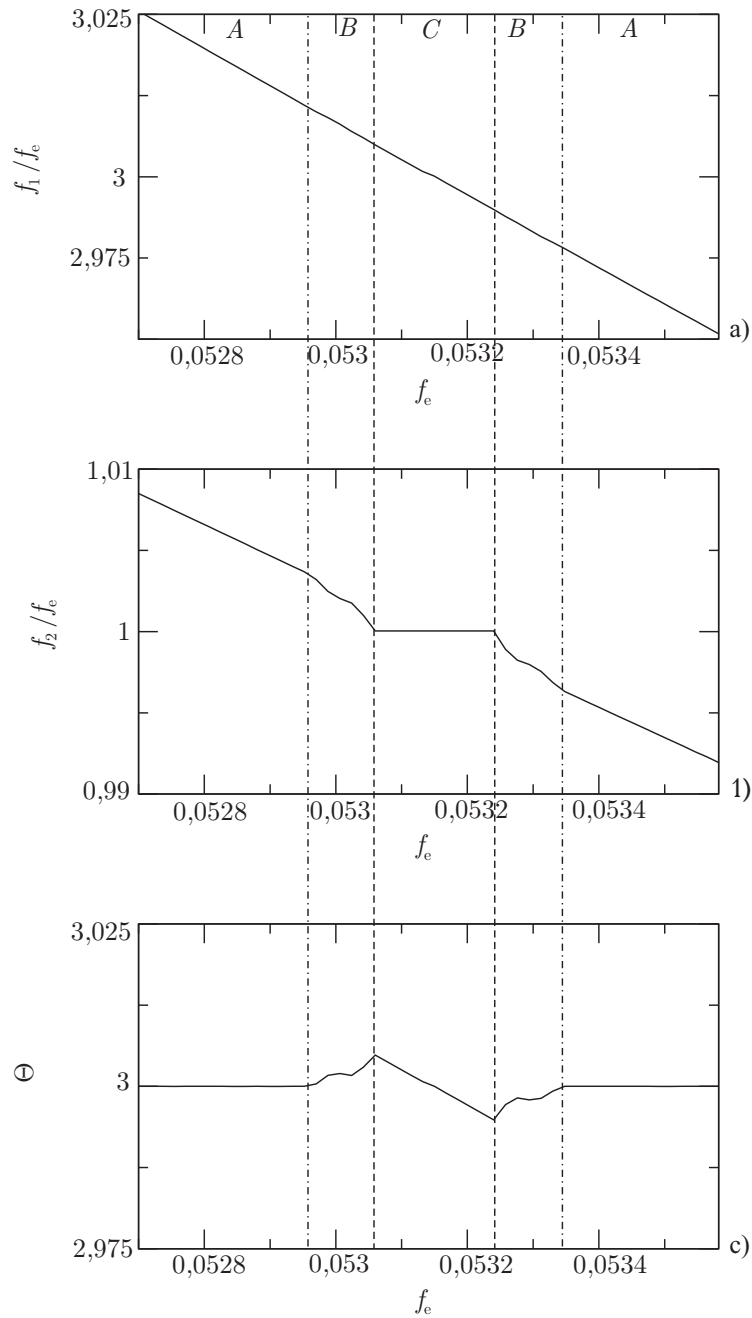


Рис. 11. Зависимость отношений частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  к частоте  $f_e$  и числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0,005$  для резонанса 1 : 3

В автономной системе (3.1) при значениях параметров  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0,328$ ,  $m = 0,1$  и  $k = 0,005$  реализуется эффект взаимной синхронизации, и существует устойчивый резонансный цикл на двумерном торе с числом вращения  $\Theta = 1 : 3$ . Фазовый портрет этого цикла и спектр мощности показаны на рис. 10. Введем внешнее воздействие (3.1) и будем изменять  $f_e$  вблизи частоты  $f_2$ .

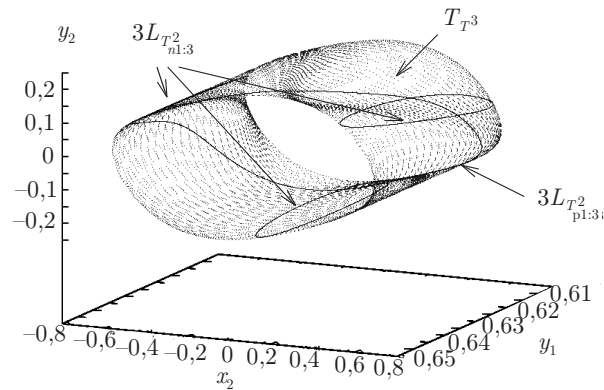


Рис. 12. Проекция сечений Пуанкаре двумерных торов в виде циклов:  $3L_{T_{n1:3}^2}$ , отвечающего области  $A$  (рис. 11) ( $f_e = 0,0527$ ), и  $L_{T_{p1:3}^2}$  отвечающего области  $C$  (рис. 11) ( $f_e = 0,0531$ ), лежащих на поверхности трехмерного тора  $T^3$

Результаты внешнего воздействия представлены на рис. 11. Главное отличие результатов от случая  $\Theta = 1 : 1$  (см. рис. 4) заключается в том, что эффект полной синхронизации здесь не имеет места. Реализуется эффект захвата второй частоты ( $f_e = f_2$ ), но при этом частота  $f_1$  не изменяется под действием внешней силы. Этот результат повторяет качественно данные работы [8]. Как и в случае резонанса  $1 : 1$ , при условии, что частота  $f_e$  далека от  $f_2$ , существует область  $A$ , в которой реализуется резонансный двумерный тор  $T_{n1:3}^2$  на поверхности трехмерного тора  $T^3$ . Также имеется область  $B$ , в которой ввиду разрушения резонанса  $1 : 3$  существует трехмерный тор  $T^3$ . Далее, реализуется переход из области  $B$  в область  $C$ , при котором возникает резонансный двумерный тор  $T_{p1:3}^2$ , отвечающий режиму частичной синхронизации  $f_e = f_2$ ,  $f_1 \neq 3f_2$ . Область  $D$  в данном случае отсутствует. Для полной синхронизации резонансного цикла в рассматриваемом случае необходимо использовать дополнительный внешний сигнал, по частоте близкий к  $f_1$ . На рис. 12 представлены в виде циклов  $L$  проекции сечений Пуанкаре двумерных торов, отвечающих областям  $A$  ( $T_{n1:3}^2$ ) и  $C$  ( $T_{p1:3}^2$ ) (рис. 11), лежащие на трехмерном торе  $T^3$ , представленном в сечении Пуанкаре в виде двумерного тора  $T_{T^3}$ .

Представленные на рис. 11 и 12 результаты еще раз подтверждают данные работы [8] и свидетельствуют об их общности.

Результаты рис. 11 получены для относительно малой величины коэффициента связи  $k = 0,005$ . Интересно выяснить, как повлияет увеличение степени взаимосвязи генераторов на эффекты синхронизации. С этой целью были проведены расчеты для значения  $k = 0,02$ , представленные на рис. 13. Как видно из рис. 13, с увеличением связи появляется область  $D$  — область полной синхронизации резонансного цикла на торе. Исследования показали, что с ростом  $k > 0,02$  ширина области  $D$  увеличивается и реализуется картина, качественно повторяющая случай резонанса  $1 : 1$  (см. рис. 4).

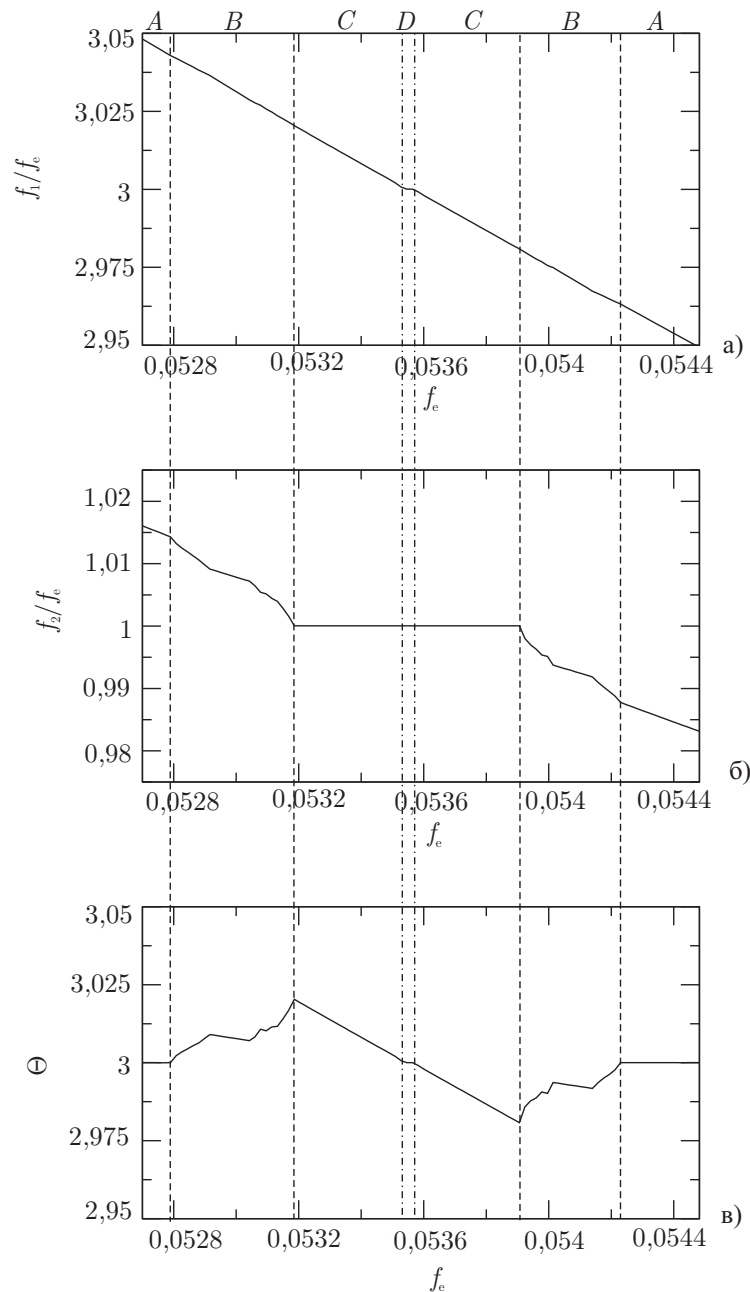


Рис. 13. Зависимость отношений частот генераторов  $f_1$  и  $f_2$  к частоте  $f_e$  и числа вращения  $\Theta$  от частоты внешнего воздействия  $f_e$  при  $k_e = 0,005$  и  $k = 0,02$  для резонанса 1 : 3

## 6. Выводы

Представленные результаты численного моделирования синхронизации предельного цикла, который отвечает резонансу на двумерном торе, свидетельствуют о следующем:

1. В общем случае резонансный цикл на двумерном торе невозможно синхронизировать внешним гармоническим сигналом. Под воздействием внешнего сигнала в общем случае резонанс на двумерном торе разрушается, колебания становятся квазипериодическими

с тремя независимыми частотами (см. области  $B$  на рис. 4, 6, 11 и 13). Далее имеет место захват одной из базовых частот автономной системы (2.2) и затем – второй.

2. Для резонансов  $\Theta = p : q$  ( $p = 1, q \geq 3$ ) при малых значениях коэффициента связи между генераторами внешнее воздействие синхронизирует, как правило, одну частоту из базовых частот системы (2.2),  $f_1$  или  $f_2$ . Однако путем увеличения степени связи можно добиться эффектов захвата вначале одной, а затем и второй базовой частоты (рис. 13).
3. В общем случае для синхронизации резонансного цикла на двумерном торе всегда достаточно использовать в качестве внешнего синхронизирующего воздействия квазипериодический двухчастотный сигнал с близким значением числа вращения. В этом случае будет иметь место эффект захвата числа вращения, установленный в работе [7].

Результаты работы показывают, что эффекту захвата одной из двух базовых частот двухчастотных квазипериодических автоколебаний отвечает седло-узловая бифуркация устойчивого и седлового двумерных торов на трехмерном торе. Эта бифуркация обнаружена впервые и представляет интерес с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений.

## Приложение 1

С целью удобства анализа и содержания настоящей статьи ниже приводится таблица основных обозначений, используемых в работе.

	Трехмерный тор в области « $B$ »	Двумерный тор в области « $A$ » (несинхронный режим)		Двумерный тор в области « $C$ » (режим частичной синхронизации)		Цикл в области « $D$ » (полная синхронизация)	
		Устойчивый	Седловой	Устойчивый	Седловой	Устойчивый	Седловой
Фазовый портрет	$T^3$	$T_n^2$	$T_{ns}^2$	$T_p^2$	$T_{ps}^2$	$L_f$	$L_{fs}$
Сечение Пуанкаре	$T_{T^3}$	$L_{T_n^2}$	$L_{T_{ns}^2}$	$L_{T_p^2}$	$L_{T_{ps}^2}$	$P_{L_f}$	$Q_{L_{fs}}$
Двойное сечение Пуанкаре	$L_{T^3}$	$P_{T_n^2}$	$Q_{T_{ns}^2}$	$P_{T_p^2}$	$Q_{T_{ps}^2}$	-	-

## Приложение 2

Как видно из бифуркационной диаграммы рис. 6, переход к режиму полной синхронизации (в область  $D$ ) при определенных значениях интенсивности воздействия ( $k_e < 0,014$ ) может осуществляться непосредственно из области  $B$  в область  $D$ . Другими словами, от трехмерного тора можно сразу перейти к режиму предельного цикла. Как показали специальные исследования, это не так. Этот переход осуществляется опять через режим частичного резонанса, т. е. через двумерный тор. Однако эффекты возникновения этих резонансов и их структура достаточно сложны, и мы не можем отразить эти результаты в настоящей статье. Мы планируем посвятить указанной проблеме специальную работу.



Работа была частично поддержана в рамках аналитической целевой Программы Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 годы».

В заключение авторы считают своим долгом выразить благодарность проф. Т. Е. Вадивасовой за интерес к работе и полезные дискуссии.

## Список литературы

- [1] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence, *Commun. Math. Phys.*, 1971, V. 20, p. 167–192.
- [2] Newhouse S., Ruelle D., Takens F. Occurrence of strange axiom  $A$  attractors near quasiperiodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$ , *Commun. Math. Phys.*, 1978, V. 64, p. 35–40.
- [3] Franceshini V. Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations, *Physica D*, 1983, V. 3, p. 285–304.
- [4] Kaneko K. *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems.*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [5] Афраймович В.С., Шильников Л.П. Методы качественной теории дифференциальных уравнений, *Изд. ГГУ, Горький*, 1983, с. 3–26.
- [6] Гонченко С.В., Стенькин О.В., Шильников Л.П. О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями, *Нелинейная динамика*, 2006, т. 2, №1, с. 3–25.
- [7] Anishchenko V., Nikolaev S. and Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: synchronization of quasiperiodic motions, *Phys. Rev. E*, 2006, V. 73, 056202.
- [8] Anishchenko V., Nikolaev S. and Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus, *Phys. Rev. E*, 2007, V. 76, 046216.