УДК 517.9

Аттракторы двух краевых задач для модифицированного нелинейного телеграфного уравнения

А. Н. Куликов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Ярославль, ул. Советская, 14
kulikov_d_a@mail.ru

Получено 14 декабря 2007 г.

Рассматриваются две краевые задачи для модифицированного нелинейного телеграфного уравнения. Для первой из них изучена задача о бифуркации инвариантных торов. Показано, что асимптотически устойчивым из них может быть лишь тор наибольшей размерности, а также что размерность этого аттрактора увеличивается с уменьшением основного бифуркационного параметра. Последнее означает, что в данной задаче реализуется сценарий турбулентности Ландау.

Для второй краевой задачи показано существование бесконечномерного аттрактора, составленного из неустойчивых по Ляпунову решений.

Ключевые слова: аттрактор, устойчивость, бифуркация, краевые задачи

A. N. Kulikov

The attractors of two boundary value problems for a modifieded nonlinear telegraph equation

Two boundary value problems for a modified nonlinear telegraph equation are considered. The problem of invariant torus bifurcation has been studied for first of them. It is shown that only the torus of a larger dimension can be asymptotically stable and also that the dimension of this attractor increases as the main bifurcation parameter decreases. The latter means that Landau's scenario of turbulence is realised in the problem under study. The existence of an infinitely dimensional attractor built up of unstable according to Lyapunov solutions has been shown for the second boundary value problem.

Keywords: attractor, bifurcation, nonlinear boundary value problems
Mathematical Subject Classifications: 35L70, 35B10, 34C23, 34C30, 34D20

1. Введение

При изучении нелинейных динамических систем всегда большое значение придавалось изучению содержательных примеров. Для динамических систем с конечномерным фазовым пространством в качестве такого примера часто рассматривается уравнение вида

$$\ddot{u} - \varepsilon\dot{u} + \omega^2 u + f(u,\, \dot{u}) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon,\, \omega \in \mathrm{R}$, $(\omega \neq 0)$, $f(u,\, \dot{u})$ — достаточно гладкая функция, имеющая по совокупности переменных порядок малости в нуле выше первого. Если $f(u,\, \dot{u}) = au^2u_t$ $(a > 0)$, то получаем классическое уравнение Ван дер Поля, при $f(u,\, \dot{u}) = au^2u_t + bu^3$ — уравнение Ван дер Поля—Дуффинга.

Во второй половине прошлого столетия в связи с актуальными проблемами физики, механики сплошной среды, математической биологии больший интерес вызывает изучение динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. К ним относятся различные нелинейные эволюционные уравнения с частными производными.

Уравнение (1.1) послужило основой получения двух простейших уравнений с частными производными

$$w_{tt} - \varepsilon w_t + \omega^2 w - w_{xx} + f(w,\, w_t) = 0 \tag{1.2}$$

и его регуляризации

$$w_{tt} - \varepsilon w_t + \omega^2 w - w_{xx} - \varepsilon\beta w_{xxt} + f(w,\, w_t) = 0. \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.2), (1.3) $w = w(t,\, x)$, а нелинейность заимствована от обыкновенного дифференциального уравнения (1.1). Уравнения (1.2), (1.3) можно поэтому называть распределенным уравнением Ван дер Поля, но чаще для уравнения (1.2) встречается название «нелинейное телеграфное уравнение» [1, 2, 3], хотя указанные ранее нелинейности непосредственного отношения к описанию электрических колебаний не имеют. Обычно уравнение (1.2), (1.3) рассматривают вместе с краевыми условиями Дирихле

$$w(t,\, x)|_{x=0} = w(t,\, x)|_{x=\pi} = 0 \qquad (x \in [0;\, \pi]) \tag{1.4}$$

или Неймана

$$w_x(t,\, x)|_{x=0} = w_x(t,\, x)|_{x=\pi} = 0 \qquad (x \in [0;\, \pi]). \tag{1.5}$$

Особенно популярны условия (1.5), так как при их выполнении уравнение (1.2) или уравнение (1.3) допускают решения $w(t,\, x) = u(t)$, где $u(t)$ уже подчинено классическому уравнению (1.1). Обе краевые задачи для (1.2), (1.3) были подвергнуты достаточно подробному анализу в ряде работ (см., например, [1, 2, 4]). Оказалось, что в ситуации общего положения в этих краевых задачах существуют аттракторы, но этими аттракторами являются лишь предельные циклы (в том числе и пространственно неоднородные). Инвариантные торы существуют, но всякий раз оказываются неустойчивыми. Упомянутые выводы относятся к локальному анализу, т. е. анализу достаточно малой окрестности состояния равновесия.

В данной работе предлагаются два варианта модификации нелинейности уравнений (1.2), (1.3), которые позволяют обнаружить у полученных краевых задач более сложные аттракторы, чем циклы.

В разделе 1 предлагается к рассмотрению следующая модификация уравнения: (1.3)

$$w_{tt} - 2\varepsilon w_t + \omega^2 w - w_{xx} - \varepsilon\beta w_{xxt} + aw\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi w^2\, dx\right) = 0, \tag{1.6}$$

где ε — малый положительный параметр. Указанный вид нелинейности индуцирован задачами теории упругой устойчивости [5, 7].

Уравнение (1.6) рассматривается вместе с однородными условиями Неймана. Следовательно, краевая задача (1.5), (1.6) допускает решения $w(t,\, x) = u(t)$, которые не зависят от x, а функция $u(t)$ удовлетворяет в этом случае классическому уравнению Ван дер Поля. Для этой задачи удается показать, что у нее существует аттрактор в виде инвариантного тора T_{m+1} размерности $m+1$, где m — наибольшее целое число, для которого справедливо неравенство $1 - \beta m^2/2 > 0$. Последняя формула показывает, что размерность тора существенным образом зависит от параметра β и возрастает при его уменьшении. При $\beta \geqslant \beta_1 = 2$ существует лишь устойчивый предельный цикл. Если $\beta \in (\beta_2;\, \beta_1)$ $(\beta_2 = 1/2)$, то цикл теряет устойчивость, но рождается асимптотически устойчивый двумерный тор. Если β становится меньше $\beta_m = 2/m^2$, то рождается тор размерности $m+1$. Этот тор асимптотически устойчив при $\beta \in (\beta_{m+1},\, \beta_m)$, а все торы меньшей размерности, хотя и продолжают существовать, но будут уже неустойчивы. Эти замечания означают, что в данной задаче реализуется сценарий Ландау для объяснения турбулентности [8].

В разделе 2 будет рассмотрена аналогичная по духу, но несколько более сложная модификация уравнения (1.2). Для первой краевой задачи у рассмотренного в разделе 2 уравнения показывается существование аттрактора, у которого все траектории, принадлежащие ему, неустойчивы по Ляпунову. В данном случае устойчивость (неустойчивость) понимается в смысле энергетической нормы краевой задачи [9].

2. Инвариантные торы. Сценарий турбулентности Ландау

В этом разделе рассматривается краевая задача

$$w_{tt} - w_{xx} + \omega^2 w = 2\varepsilon w_t + \varepsilon\beta w_{txx} - aw\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi w^2 dx\right), \tag{2.1}$$

$$w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $x \in [0;\, \pi]$, $w = w(t,\, x)$, β, a, ω — положительные постоянные, а ε — малый положительный параметр. В этой части работы будет рассмотрен вопрос о структуре малой окрестности нулевого решения краевой задачи (2.1), (2.2) в норме ее фазового пространства решений. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий) можно выбрать $\overset{\circ}{W}{}_2^2[0;\, \pi] \times W_2^1[0;\, \pi]$, т. е. $f(x) = w(0,\, x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2[0;\, \pi]$, $g(x) = w_t(0,\, x) \in W_2^1[0;\, \pi]$. Как обычно через $W_2^k[0;\, \pi]$ обозначается соболевское пространство функций, а «ноль» над знаком $W_2^2[0;\, \pi]$ означает, что функции, входящие в это пространство, удовлетворяют краевым условиям (2.2). Разрешимость задачи Коши для данного класса нелинейных краевых задач вытекает из результатов работы [9].

Следуя методике, изложенной, например, в [1, 2, 3], решения краевой задачи (2.1), (2.2) будем искать в следующем виде: асимптотического ряда

$$w(t,\, x,\, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} u(t,\, s,\, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v(t,\, s,\, x) + \ldots, \tag{2.3}$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости относительно $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $s=\varepsilon t$. Наконец,

$$
\begin{gathered}
u(t,\,s,\,x)=\frac{z_0(s)\exp(i\omega_0 t)+\overline{z}_0(s)\exp(-i\omega_0 t)}{2}+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n(s)\exp(i\omega_n t)+\overline{z}_n(s)\exp(-i\omega_n t)\right)\cos nx,
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

а $\omega_n^2=\omega^2+n^2$, $\omega_0=\omega$. Сразу отметим, что функция, определенная равенством (2.2), принадлежит ядру оператора

$$Aw=w_{tt}-w_{xx}+\omega^2 w,$$

если $\varepsilon=0$ функции $z_k(s)$ $(k=0,\,1,\,2,\ldots)$ выбраны таким образом, чтобы при всех рассматриваемых t и s функция, определенная равенством (2.4), принадлежала фазовому пространству данной краевой задачи. Это будет так, если, например, для $z_n(s)$ выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n(s)|^2 n^4<\infty.$$

Подставляя (2.3) в краевую задачу (2.1), (2.2) и приравнивая слагаемые при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ для определения функции $v(t,\,s,\,x)$, получим неоднородную краевую задачу

$$Av=-2u_{ts}+2u_t+\beta u_{txx}-au\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u^2\,dx\right), \tag{2.5}$$

$$v_x(t,\,s,\,0)=v_x(t,\,s,\,\pi)=0. \tag{2.6}$$

У неоднородной краевой задачи (2.5), (2.6) будем искать решения в следующем виде:

$$v(t,\,s,\,x)=\frac{v_0(t,\,s)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\,s)\cos nx, \tag{2.7}$$

где $v_n(t,\,s)$ — тригонометрические полиномы относительно переменной t. Коэффициенты ряда (2.7) $v_0(t,\,s)$, $v_1(t,\,s),\ldots$ удовлетворяют счетной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\ddot{v}_0+\omega_0^2 v_0=-2i\omega_0\left(z_0'(s)\exp(i\omega_0 t)-\overline{z}_0'(s)\exp(-i\omega_0 t)\right)+\\
+2i\omega_0\left(z_0(s)\exp(i\omega_0 t)-\overline{z}_0(s)\exp(-i\omega_0 t)\right)-\\
-a\left(z_0(s)\exp(i\omega_0 t)+\overline{z}_0(s)\exp(-i\omega_0 t)\right)F(u),\\
\ddot{v}_n+\omega_n^2 v_n=-2i\omega_n\left(z_n'(s)\exp(i\omega_n t)-\overline{z}_n'(s)\exp(-i\omega_n t)\right)+\\
+2i\omega_n\left(z_n(s)\exp(i\omega_n t)-\overline{z}_n(s)\exp(-i\omega_n t)\right)-\\
-a\left(z_n(s)\exp(i\omega_n t)+\overline{z}_n(s)\exp(-i\omega_n t)\right)F(u).
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Здесь точкой обозначена производная по t, штрихом — по переменной s,

$$F(u) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{2}(z_0(s)\exp(i\omega_0 t) + \overline{z}_0(s)\exp(-i\omega_0 t))^2 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(z_n(s)\exp(i\omega_n t) + \overline{z}_n(s)\exp(-i\omega_n t))^2\Big].$$

Из условий разрешимости уравнений системы (2.8) в классе тригонометрических полиномов можно получить счетную систему для определения $z_0(s),\ z_1(s),\ldots$ В итоге получаем

$$z_0'(s) = z_0(s) - \frac{a}{2}z_0(s)|z_0(s)|^2, \tag{2.9}$$

$$z_k'(s) = \left(1 - \frac{\beta}{2}k^2\right)z_k(s) - az_k(s)|z_k(s)|^2, \tag{2.10}$$

где $k \in \mathrm{N}$. Систему дифференциальных уравнений часто называют квазинормальной формой. Систему дифференциальных уравнений (2.9), (2.10) следует дополнить системой уравнений для $\overline{z}_0(s), \overline{z}_k(s)$, которая, естественно, является формально сопряженной в смысле операций с комплексными числами.

Комплекснозначные функции $z_n(s)$ удобно искать в тригонометрической форме

$$z_n(s) = \rho_n^{\frac{1}{2}}(s)\exp(i\varphi(s)) \qquad (n \in \mathrm{N}).$$

Для определения $\rho_n(s),\ \varphi_n(s)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\rho_0' = 2\big(\rho_0 - \frac{a}{2}\rho_0^2\big), \quad \rho_n' = 2\Big(\big(1 - \frac{\beta}{2}n^2\big)\rho_n - a\rho_n^2\Big), \tag{2.11}$$

$$\varphi_0' = 0, \quad \varphi_n' = 0 \qquad (n \in \mathrm{N}). \tag{2.12}$$

Из системы (18) вытекает, что $\varphi_k(s) = \psi_k \in \mathrm{R}$ (k = 0, 1, 2, ...). Более детально рассмотрим систему (2.11). Элементарно проверяется справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. *Пусть n таково, что* $1 - \beta n^2/2 \leqslant 0$*, тогда соответствующее решение системы* (2.11) *с номером n имеет только нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво.*

Действительно, для таких n ($n^2 \geqslant 2/\beta$) справедливо неравенство

$$2(1 - \frac{\beta n^2}{2})\rho_n - a\rho_n^2 \leqslant -a\rho_n^2$$

и, следовательно,

$$\rho_n' \leqslant -a\rho_n^2.$$

Откуда и вытекает справедливость сформулированного утверждения.

Еще проще проверка следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть n таково, что $1-\beta n^2/2>0$. Тогда уравнение с соответствующим номером n имеет кроме нулевого состояния равновесия и нетривиальное состояние равновесия*

$$\rho=\eta_n=\left(1-\frac{\beta n^2}{2}\right)/a,\quad \rho_0=\eta_0=2/a.$$

Нулевое решение уравнения с номером n неустойчиво, а ненулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Обозначим через E_k ненулевое состояние равновесия системы (2.11), имеющее k ненулевых компонент. Так например, $E_1=(\eta_0,\,0,\,0,\ldots)$ или $E_1=(0,\,\eta_1,\ldots)$. Второй вариант реализуется, если $1-\beta/2>0$. Пусть m — наибольшее из натуральных n, для которых справедливо неравенство $1-\beta n^2/2>0$. Согласно ранее введенным обозначениям $E_{m+1}=(\eta_0,\,\eta_1,\,\ldots,\,\eta_m\,0,\,0,\,\ldots)$. Такое состояние одно.

Лемма 3. *Состояние равновесия E_{m+1} асимптотически устойчиво. Остальные ненулевые состояния равновесия системы* (2.11) *неустойчивы.*

Доказательство — простое следствие лемм 1, 2. Напомним, что нулевое состояние равновесия безусловно неустойчиво.

Из результатов, изложенных в [3] (см. раздел «основная бифуркационная теорема»), вытекает, что справедливо утверждение.

Теорема 1. *Каждому ненулевому состоянию равновесия E_k соответствует инвариантный тор T_k краевой задачи* (2.1), (2.2)*, если $\varepsilon\in(0;\,\varepsilon_0)$, а ε_0 — достаточно малая положительная постоянная. Тор T_{m+1} асимптотически устойчив, торы T_k $(k<m+1)$ неустойчивы.*

Отметим, что T_1 — тор размерности один, т. е. попросту цикл. Если $\beta\geqslant 1$, то существует лишь пространственно однородный орбитально асимптотически устойчивый цикл. Выделим критические значения параметра β, положив

$$\beta_n=\frac{2}{n^2},\qquad n\in\mathrm{N}.$$

Из формулировки теоремы 1 вытекает, что при $\beta\in(\beta_{m+1};\,\beta_m)$ тор T_{m+1} существует и асимптотически устойчив как инвариантное многообразие рассматриваемой краевой задачи. При $\beta\in$ $\in(\beta_{m+2};\beta_{m+1})$ он также существует, но при этих β рождается уже асимптотически устойчивый тор T_{m+2}, т. е. тор большей размерности. Тор T_{m+1} становится теперь неустойчивым. Решения на торе T_{m+1} задаются асимптотической формулой:

$$\begin{gathered}w(t,x)=\sqrt{\varepsilon}\Big(\frac{\exp(i\omega_0 t+i\varphi_0)+\exp(-i\omega_0 t-i\varphi_0)}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}+\\+\sum_{n=1}^{m}\sqrt{\frac{2-\beta n^2}{2a}}\big(\exp(i\omega_n t+i\varphi_n)+\exp(-i\omega_n t-i\varphi_n)\big)\cos nx\Big)+o(\sqrt{\varepsilon}),\end{gathered}\tag{2.13}$$

где $\varphi_n\in\mathrm{R}$. Из вида формулы (2.13) вытекает, что главная часть функции $w(t,\,x)$, как функция t, будет квазипериодической, так как в ситуации общего положения частоты $\omega_n=\sqrt{\omega^2+n^2}$ несоизмеримы. Последнее означает, что для решений краевой задачи (2.1), (2.2) характерна нерезонансная динамика.

Вся описанная картина характерна для сценария турбулентности Ландау [8], и если β достаточно мало, то аттрактором является тор достаточно большой размерности. Формальный предельный переход $\beta \to 0$ понятен в рамках системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1), которая перепишется в следующем виде:

$$\rho_0' = 2\big(\rho_0 - \frac{a}{2}\rho_0^2\big), \quad \rho_n' = 2\big(\rho_n - a\rho_n^2\big). \tag{2.14}$$

Все ненулевые состояния равновесия E_k с конечным числом ненулевых компонент неустойчивы, и им соответствуют неустойчивые торы T_k размерности k рассматриваемой краевой задачи (2.1), (2.2) при $\beta = 0$.

Состояние равновесия $E_\infty = \{\eta_k\}$, $\eta_0 = 2/a$, $\eta_n = 1/a$ $(n \in N)$ формально асимптотически устойчиво, но ему нельзя поставить в соответствие решение, принадлежащее фазовому пространству краевой задачи (2.1), (2.2).

Ниже на рис. 1–6 приведены графики функций

$$w(t_p,\, x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\omega_0 t_p + \sum_{n=1}^{m}\sqrt{\frac{2-\beta n^2}{a}}\cos\omega_n t_p\cos nx,$$

где $a = 1$. Первые три графика рассмотрены при $m = 5, \beta = 0,079$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$. Вторые три графика рассмотрены при $m = 23$, $\beta = 0,0036$, а $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$. Здесь приведена «главная часть» решения (2.13), нормированная на $(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$. Рассмотрен частный случай, когда все $\varphi_n = 0$. На всех рисунках видно, что реализуется режим с «обострением», т. е. такие решения, у которых норма в $W_2^2[0;\,\pi]$ растет с ростом m. Впрочем растет и норма в $W_2^1[0;\,\pi]$. В таком случае часто говорят о таком феномене, как «градиентная катастрофа». В зарубежной литературе такой феномен носит название «жесткая турбулентность» [10].

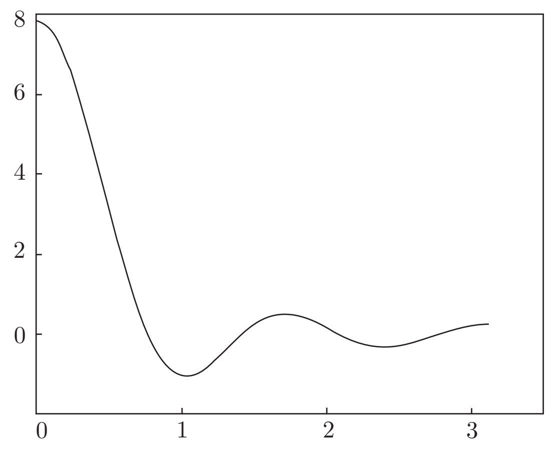

Рис. 1

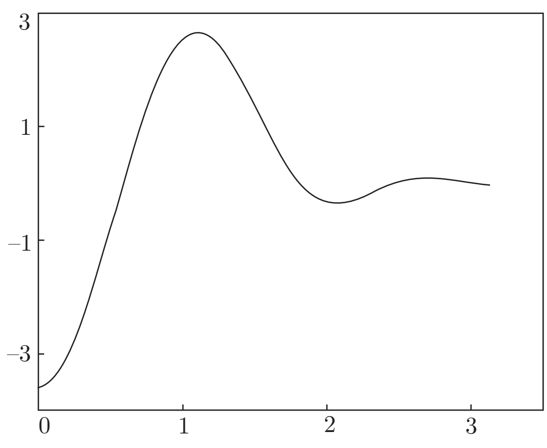

Рис. 2

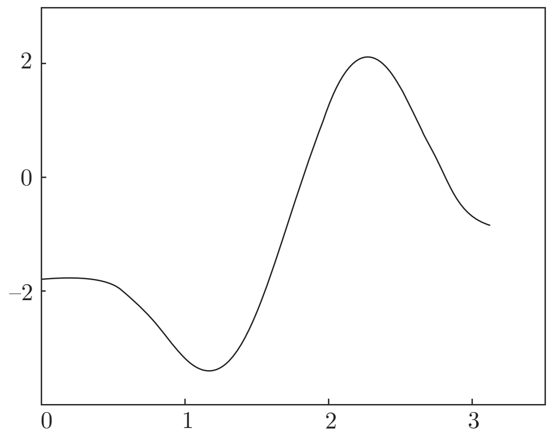

Рис. 3

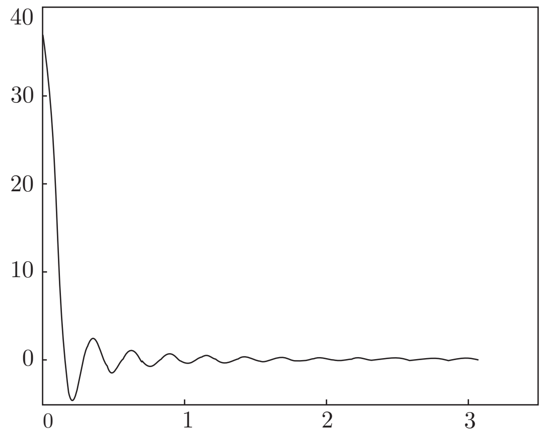

Рис. 4

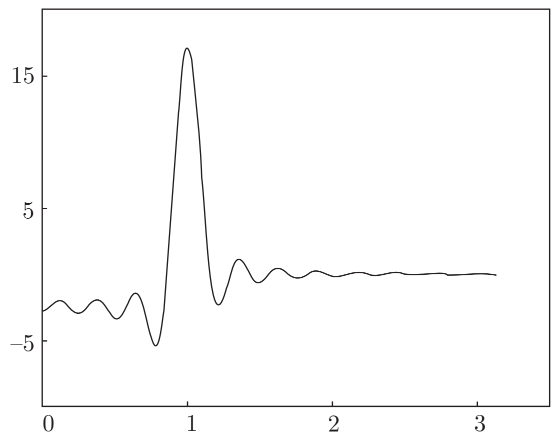

Рис. 5

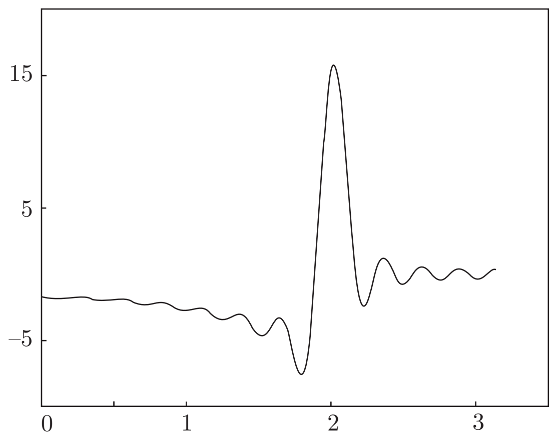

Рис. 6

3. Краевая задача, аттрактор которой состоит их неустойчивых решений

Рассмотрим краевую задачу

$$w_{tt} - w_{xx} + ah(w)w = \varepsilon w_t - w_t\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(w_t^2 + w_x^2 + ah(w)w^2\big)\,dx\Big), \tag{3.1}$$

$$w(t,\,0) = w(t,\,\pi) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь a, ε — положительные постоянные, $w = w(t,\,x)$, $x \in [0;\,\pi]$, а нелинейный функционал

$$h(w) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi w^2(0,\,x)\,dx.$$

Домножим уравнение (3.1) на w_t и проинтегрируем полученное равенство по переменной $x \in [0;\,\pi]$.

После стандартных преобразований получаем следующее интегральное равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}V(t) = \big[\varepsilon - V(t)\big]\int\limits_0^\pi w_t^2\,dx, \tag{3.3}$$

где

$$V(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(w_t^2 + w_x^2 + ah(w)w^2\big)\,dx.$$

Из равенства (3.3) вытекает, что при $V(t) > \varepsilon$ функция $V(t)$ монотонно убывает, а при $V(t) < \varepsilon$ монотонно возрастает. Следовательно, аттрактор краевой задачи (3.1), (3.2) принадлежит множеству M, выделяемому неравенством

$$V(t) = \varepsilon. \tag{3.4}$$

Решение нелинейной краевой задачи (3.1), (3.2) можно представить в виде ряда Фурье по переменной x:

$$w(t,\,x) = \sum_{n=1}^\infty w_n(t)\sin nx. \tag{3.5}$$

Уточним вид $w_n(t)$ в том случае, когда решение краевой задачи (3.1), (3.2) принадлежит аттрактору M.

Дополним краевую задачу начальными условиями

$$w(0,\,x) = f(x), \quad w_t(0,\,x) = g(x), \tag{3.6}$$

где $f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2[0;\,\pi]$, $g(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0;\,\pi]$, и разложим $f(x)$, $g(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n\sin nx, \quad g(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n\sin nx.$$

В формуле (3.5) положим

$$w_n(t) = a_n\cos\sigma_n t + \frac{b_n}{\sigma_n}\sin\sigma_n t. \tag{3.7}$$

Следовательно, функция (3.5) удовлетворяет начальным условиям (3.6). В таком случае

$$h(w) = F = \sum_{n=1}^\infty a_n^2.$$

Если функция $w(t,x)$ выбрана согласно формулам (3.5), (3.6), (3.8), то тогда справедливо равенство

$$V(t) = \sum_{n=1}^\infty \big(a_n^2\sigma_n^2 + b_n^2\big),$$

если дополнительно считать, что

$$\sigma_n^2 = n^2 + aF.$$

Выбрав теперь $a_n,\ b_n$ так, чтобы было справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2\sigma_n^2+b_n^2)=\varepsilon,$$

простой подстановкой проверяется, что функция (3.5) удовлетворяет уравнению (3.1), причем такой способ выбора $w(t,\ x)$ гарантирует обращение в ноль левой и правой части уравнения (3.1) по отдельности.

Пусть произвольным образом зафиксированы $f(x),\ g(x)$ и, следовательно, и соответствующее им решение $w(t,\ x)$. Пусть

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx,\quad g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin nx,$$

где $c_n=a_n,\ d_n=b_n$, если $n\neq p$ (p — фиксированное натуральное число), выбранное так, чтобы $a_p^2+b_p^2/\sigma_p^2\neq 0$. При $n=p$ полагаем

$$c_p=a_p+\delta_1,\quad d_p=c_p+\delta_2,$$

где $\delta_1,\ \delta_2$ — достаточно малые по модулю постоянные. Решение краевой задачи (3.1), (3.2), соответствующее $f_1(x),\ g_1(x)$, обозначим через $w_1(t,\ x)$, которое можно искать, как и $w(t,\ x)$, в виде ряда

$$w_1(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(c_n\cos\omega_nt+\frac{d_n}{\omega_n}\sin\omega_nt\Bigr)\sin nx,$$

где $\omega_n^2=n^2+aG,\ G=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2$. Числа $\delta_1,\ \delta_2$ можно выражать так, чтобы были выполнены неравенства

$$\|f(x)-f_1(x)\|_{W_2^2[0;\pi]}\leqslant\mu,\quad \|g(x)-g_1(x)\|_{W_2^1[0;\,\pi]}\leqslant\mu.$$

Здесь в качестве μ допустимо взять величину $\mu=\max(\mu_1,\ \mu_2)$, а

$$\mu_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}|\delta_1|\sqrt{1+p^2+p^4},\quad \mu_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}|\delta_2|\sqrt{1+p^2},$$

т. е. $\mu_1,\ \mu_2\to 0$, если $\delta_1,\ \delta_2\to 0$. С другой стороны, $\delta_1,\ \delta_2$ следует брать так, чтобы было выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(n^2+aF\bigr)\Bigl(a_n^2+\frac{b_n^2}{\sigma_n^2}\Bigr)=\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(n^2+aG\bigr)\Bigl(c_n^2+\frac{d_n^2}{\omega_n^2}\Bigr).$$

Последнее равенство гарантирует то, что и решение $w_1(t,\ x)$ также принадлежит аттрактору M, который был введен с помощью равенства (3.4).

Нетрудно проверить, что такой выбор $\delta_1,\ \delta_2$ возможен, так как для них получаем следующее равенство:

$$2b_p\delta_2+\delta_2^2+a\bigl(2a_p\delta_1+\delta_1^2\bigr)\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sigma_p^2+2a_p\delta_1+\delta_1^2\right]=0. \tag{3.8}$$

Равенство (28) теперь следует рассмотреть как уравнение относительно δ_2, которое имеет, конечно, решение $\delta_2(\delta_1)\to 0$ при $\delta_1\to 0$. Напомним, что $a_p^2+b_p^2\neq 0$.

Для проверки того, что решение $w(t, x)$ неустойчиво, достаточно показать существование таких положительных ε_0, t', для которых справедливо неравенство

$$\|w(t', x) - w_1(t', x)\|_{L_2(0;\pi)} \geqslant \varepsilon_0.$$

Рассмотрим функцию

$$\Delta(t) = \|w(t, x) - w_1(t, x)\|^2_{L_2(0;\pi)} = \int\limits_0^\pi \big(w(t, x) - w_1(t, x)\big)^2\,dx.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\Delta(t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(a_n\cos\sigma_n t + \frac{b_n}{\sigma_n}\sin\sigma_n t\Big) - \Big(c_n\cos\sigma_n t + \frac{d_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\Big)\Big]^2.$$

Понятно, что при всех t

$$\Delta(t) \geqslant \varphi_0(t) = \frac{\pi}{2}\Big[\Big(a_p\cos\sigma_p t + \frac{b_p}{\sigma_p}\sin\sigma_p t\Big) - \Big(c_p\cos\omega_p t + \frac{d_p}{\omega_p}\sin\omega_p t\Big)\Big]^2.$$

Рассмотрим также вспомогательную функцию

$$\varphi_1(t) = \frac{\pi}{2}\Big[a_p\big(\cos\sigma_p t - \cos\omega_p t\big) + \frac{b_p}{\sigma_p}\big(\sin\sigma_p t - \sin\omega_p t\big)\Big]^2.$$

Тригонометрические преобразования приводят эту функцию к следующему виду:

$$\varphi_1(t) = 2\pi\Big(a_n^2 + \frac{b_n^2}{\sigma_n^2}\Big)\sin^2\frac{\Delta_p t}{2}\sin^2\Big(\Big(\sigma_p + \frac{\Delta_p}{2}\Big)t + \psi_p\Big),$$

где $\Delta_p = \sigma_p - \omega_p = \mu_3/(\sigma_p + \omega_p)$, $\psi_p \in [0; 2\pi)$. Напомним, что $\mu_3 = aF - aG = (a_p^2 - c_p^2)a$. Следовательно, $\mu_3 = (-2a_p\delta_1 - \delta_1^2)a$, т. е. $\mu_3 \to 0$ при $\delta_1 \to 0$.

Выберем теперь t', Δ_p так, чтобы были выполнены неравенства

$$\frac{\Delta_p t'}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l_1, \quad \Big(\sigma_p + \frac{\Delta_p}{2}\Big)t' + \psi_p = \frac{\pi}{2} + \pi l_2,$$

где $l_1, l_2 \in Z$. Из первого равенства следует исключить t', выбирая l_1, l_2 так, чтобы t' было больше нуля. После этого Δ_p находится как корень уравнения

$$\Big(\sigma_p + \frac{\Delta_p}{2}\Big)\frac{\pi + 2\pi l_1}{\Delta_p} + \psi_p = \frac{\pi}{2} + \pi l_2.$$

Его решение

$$\Delta_p = \frac{2\sigma_p\pi(1 + 2l_1)}{2\pi(l_2 - l_1) - 2\psi_p}$$

стремится к 0, если $|l_2|$ достаточно большое натуральное число. При этом и $t'(l_2) \to \infty$, если $|l_2| \to \infty$.

Итак, $\varphi_1(t') = \pi(a_p^2 + b_p^2/\sigma_p^2)/2$. Учитывая малость $\delta_1,\ \delta_2$, можно добиться того, что

$$\varphi_0(t') \geqslant \frac{1}{2}\varphi_1(t') = \pi\left(a_p^2 + \frac{b_p^2}{\sigma_p^2}\right) = \varepsilon_0^2,$$

т. е. ε_0 — фиксированная положительная величина.

Последнее неравенство и доказывает, что выбранное решение неустойчиво по Ляпунову. Для предания большей математической строгости, быть может, полезно напомнить, что для произвольной функции $f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2[0;\ \pi]$ справедливо неравенство

$$\|f(x)\|_{W_2^2[0;\,\pi]} \geqslant \|f(x)\|_{W_2^1[0;\,\pi]} \geqslant \|f(x)\|_{L_2[0;\,\pi]}.$$

Еще раз уместно подчеркнуть, что инвариантное множество M выделяется равенством

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big[g^2(x) + \big(f'(x)\big)^2 + f^2(x)h(f)\Big]\,dx = \varepsilon,$$

где $h(f) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f^2(x)\,dx$. Это инвариантное множество является аттрактором краевой задачи (3.1), (3.2) в норме пространства $W_2^1[0;\ \pi] \times L_2[0;\ \pi]$.

Теорема 2. *Инвариантное множество M является аттрактором краевой задачи* (3.1)*,* (3.2) *в норме* $W_2^1[0;\ \pi] \times L_2[0;\ \pi]$. *Все решения, принадлежащие этому аттрактору, неустойчивы в указанной норме, а также в норме фазового пространства краевой задачи* (3.1)*,* (3.2).

Список литературы

[1] Мищенко Е.Ф.,Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*. М.: Физматлит., 2005, 431 с.

[2] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*. М.: Физматлит., 2004, 405 с.

[3] Колесов А.Ю., Куликов А.Н. *Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений*. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2003, 107 с.

[4] Колесов Ю.С. Аттракторы резонансных уравнений волнового типа – разрывные колебания, *Математические заметки*, 1994, Т.56, В.1, с. 41–48.

[5] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. М.: Физматлит., 1961, 340 с.

[6] Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcations to divergence and flutter in flow — induced oscillations: an infinite — dimensional analysis, *Automatica*, V.14, pp. 367–384.

[7] Куликов А.Н. Жесткое возбуждение колебаний характерно для флаттера при малом коэффициенте демпфирования, *Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения*, 2006, №11, с. 131–135.

[8] Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. *Теоретическая физика. Гидродинамика*. М.: Наука, 1988, Т.6, 733 с.

[9] Якубов С.Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных уравнений гиперболического типа, *Труды Московского матем. общества*, 1970, Т. 23, с.37–60.

[10] Bartuccelli M.,Constantin P.,Doering G.R.,Gibbon J.D., Gisselfält M. On the possibility of soft and hard torbulence in the complex Ginzburg - Landau equation, *Phisika D*, 1990, V. 44, №. 3, P. 421–444.