

## Критическая точка накопления *fold-flip* бифуркаций и критический квазиаттрактор (обзор и новые результаты)

А. П. Кузнецов<sup>1,2</sup>, С. П. Кузнецов<sup>1,2</sup>, И. Р. Сатаев<sup>1</sup>, Ю. В. Седова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
410019, Саратов, ул. Зеленая, 38

<sup>2</sup>Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского,  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mails: alkuz@sgu.ru, spkuz@rambler.ru, sataevir@rambler.ru, sedovayv@rambler.ru

*Получено 03 декабря 2007 г.*

В настоящей работе представлен пример системы, динамика которой укладывается в концепцию «критического квазиаттрактора». Наряду с кратким обзором ранее полученных результатов, приведены новые, включающие иллюстрации скейлинга бассейнов притяжения элементов критического квазиаттрактора, ренормгрупповой анализ в присутствии аддитивного некоррелированного шума, определение универсальной константы перенормировки интенсивности шума, иллюстрации инициированных шумом переходов между сосуществующими аттракторами.

Ключевые слова: квазиаттрактор, метод ренормгруппы, тип критического поведения, бифуркация, скейлинг, шум

**A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, I. R. Sataev, J. V. Sedova**

### **Critical point of accumulation of fold-flip bifurcation points and critical quasi-attractor (the review and new results)**

In paper we suggest an example of system which dynamics is answered to conception of a «critical quasi-attractor». Besides the brief review of earlier obtained results the new results are presented, namely the illustrations of scaling for basins of attraction of elements of critical quasi-attractor, the renormalization group approach in the presence of additive uncorrelated noise, the calculation of universal constant responsible for the scaling regularities of the noise effect, the illustrations of transitions initialized by noise that are realized between coexisted attractors.

Keywords: quasi-attractor, renormalization group method, type of criticality, bifurcation, scaling, noise

Mathematical Subject Classifications: 37E20, 37H99

## 1. Введение

Одной из ключевых идей теории динамических систем, восходящей к Анри Пуанкаре, является анализ устройства пространства параметров и выявление в этом пространстве областей с качественно разным типом поведения [1, 2]. Этот анализ может быть выполнен по возрастанию «сложности» задачи: сначала определяются и исследуются возможные типы поведения в системах с одним параметром, затем с двумя, тремя и т. д. Таким образом, в центре внимания теории оказываются последовательно качественные перестройки динамики (бифуркации) коразмерности один, два, три и так далее.

В случае ситуаций коразмерности один были выявлены три основных типа бифуркаций периодических режимов: это седло-узловая бифуркация с мультипликатором  $\mu = +1$ , бифуркация удвоения периода с  $\mu = -1$  и бифуркация Неймарка–Сакера с комплексным мультипликатором  $|\mu| = 1$ . Следует отметить, что разные авторы используют разную терминологию, что приходится учитывать при изложении. Так, случай  $\mu = +1$  называют также *fold*-бифуркацией, а случай  $\mu = -1$  — *flip*-бифуркацией [3].

Если система характеризуется большим числом параметров, то необходимо учитывать бифуркации коразмерности два. Известен список важнейших таких бифуркаций. Характерными «новыми» бифуркациями, для которых существенными являются оба мультипликатора, являются (по терминологии [3]):

- *fold-flip* с мультипликаторами  $\mu_1 = +1$  и  $\mu_2 = -1$ ,
- резонанс 1:1 с мультипликаторами  $\mu_1 = +1$  и  $\mu_2 = +1$ ,
- резонанс 1:2 с мультипликаторами  $\mu_1 = -1$  и  $\mu_2 = -1$ .

Более подробный список бифуркаций коразмерности два и обсуждение их свойств можно найти в монографии [3]<sup>1</sup>.

В настоящей работе будет существенной бифуркация *fold-flip*. В типичном случае в точке такой бифуркации сходятся линии бифуркаций коразмерности один с мультипликаторами  $\mu_1 = +1$  и  $\mu_2 = -1$ . Несмотря на видимую простоту, бифуркация *fold-flip* вызывает интерес и является предметом исследования до самого последнего времени [4, 5], например, с точки зрения численного определения коэффициентов соответствующей нормальной формы.

Бифуркации являются локальными характеристиками пространства параметров. С другой стороны, хорошо известно, что бифуркации могут образовывать каскады на основе движений все возрастающих периодов. В этом случае говорят о сценариях перехода к хаосу или о критических явлениях [6]. Последний термин подчеркивает аналогию с физикой фазовых переходов, которая возникает благодаря применению метода ренормализационной группы (РГ), позволяющего обосновать универсальность того или иного типа динамики. Таким образом, идея коразмерности оказывается применима и к сценариям перехода к хаосу [6, 7].

Простейшим примером сценария перехода к хаосу при вариации одного параметра является переход через каскад бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума). Установлено, что в случае двух управляющих параметров возможно накопление точек бифуркации коразмерности два к некоторым критическим точкам. Соответствующая картина может быть названа сценариями перехода к хаосу коразмерности два [6, 7].

В настоящей работе мы обратимся к ситуации, связанной с накоплением точек бифуркаций *fold-flip*. «Зарезервируем» за сценарием Фейгенбаума обозначение  $F$ , а указанный тип поведения вслед за [6, 7] будем обозначать  $C$ .

<sup>1</sup>Целиком вопросу о бифуркациях коразмерности два для итерируемых отображений посвящена недавняя диссертация (Ph. D. Thesis) Н. Г. Е. Meijer, доступная в Интернете [4].

## 2. Синхронизация и критические точки типа *C*. Критический квазиаттрактор

Наряду с математическим аспектом, необходимым для теории бифуркаций, также является важным выявление характерных физических ситуаций и примеров, которые представляют тот или иной тип поведения. В работах [8,9] была впервые продемонстрирована возможность существования бифуркационной ситуации типа *fold-flip* в автогенераторе под внешним периодическим воздействием. Можно предположить, что бифуркация *fold-flip* должна быть типичной в задачах о синхронизации автоколебаний. Действительно, границей языка синхронизации является седло-узловая бифуркация. Пусть теперь система характеризуется еще и внутренним параметром, который может вызывать удвоения периода. Тогда при вариации одного из параметров воздействия (например, частоты) и внутреннего параметра системы станет характерной и бифуркация коразмерности два *fold-flip*. Будем еще больше увеличивать внутренний параметр системы. Если бифуркация удвоения принадлежит к фейгенбаумовскому каскаду, то в этом случае будут происходить все новые и новые удвоения. Это заставляет предположить, что «в игру» будут вступать также и все новые точки *fold-flip*-бифуркаций на базе движений удвоенного периода.

Проиллюстрируем эти качественные рассуждения на конкретном примере популярной в теории динамического хаоса системы Ресслера, находящейся под внешним гармоническим воздействием [10]:

$$\dot{x} = -y - z + A \sin 2\pi\Omega t, \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + z(x - r). \quad (2.1)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $z$  — динамические переменные,  $p$ ,  $q$  и  $r$  — внутренние параметры системы Ресслера,  $A$  и  $\Omega$  — амплитуда и частота внешнего воздействия. Мы устанавливаем  $p = q = 0, 2$  и рассматриваем  $r$  как основной управляющий параметр. В автономной системе при малых значениях параметра  $r$  существует предельный цикл, и увеличение параметра  $r$  приводит к каскаду бифуркаций удвоения периода и переходу к хаосу [6].

На рис. 1 показана главная область синхронизации в трехмерном пространстве параметров  $(\Omega, r, A)$ . Она ограничена поверхностями бифуркаций  $\mu = +1$ . Если посмотреть на рисунок «слева-сбоку», то мы увидим типичный язык Арнольда на плоскости параметров частота  $\Omega$  — амплитуда воздействия  $A$ . Внутренность трехмерного языка синхронизации содержит поверхности бифуркаций удвоения периода, которые имеют место при увеличении параметра  $r$ .

Чтобы сделать интересующие нас бифуркации и критические точки более наглядными, выполним сечение рисунка 1 горизонтальной поверхностью  $A = 0, 1$  (рис. 2). Средняя часть рисунка, показанная белым цветом, представляет собой область синхронизации. Светло-серые области по ее бокам соответствуют квазипериодическим режимам. Пусть параметр  $r$  мал. Если двигаться налево или направо в полученном сечении, то мы пересечем линию седло-узловой бифуркации. Если же перемещаться в зоне синхронизации вверх, мы пересечем линию бифуркации удвоения периода. Соответственно на границе области синхронизации располагается точка *fold-flip* бифуркации, к которой подходит и заканчивается линия удвоения периода. Такие точки образуются парами — на левой и правой границах языка синхронизации. Выделенные фрагменты демонстрируют бифуркационное устройство окрестности этих точек. Они включают сегменты линий бифуркации Неймарка–Сакера, как показано вставками на рис. 2. Присутствие пересекающихся бифуркационных кривых указывает на присутствие сосуществующих аттракторов, жестких переходов и гистерезиса. На самом деле окрестность точек *fold-flip* бифуркаций включает и линии глобальных бифуркаций, которые на рис. 2 не показаны. Более детально окрестность точек *fold-flip* бифуркаций для ее нормальной формы описана в [3–5]. Существенно, что возможны два типа устройства окрестности точки такой бифуркации, что также демонстрирует представленный пример.

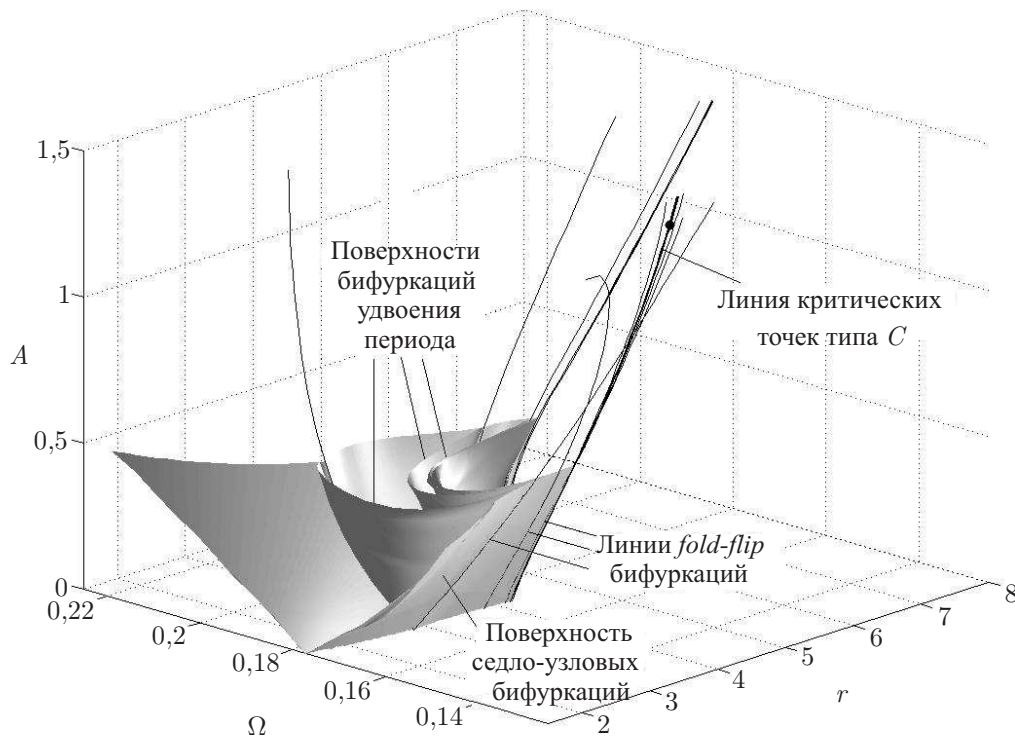


Рис. 1. Устройство пространства параметров  $(\Omega, r, A)$  периодически возбуждаемого осциллятора Ресслера (2.1). Показаны поверхности седло-узловых бифуркаций и бифуркаций удвоения периода, линии *fold-flip*-бифуркаций, а также линия критических точек  $C$

Если и далее увеличивать управляющий параметр  $r$ , то можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода внутри области синхронизации. Соответственно точки бифуркаций *fold-flip* на базе циклов удвоенного периода накапливаются к критическим точкам типа  $C$ .

Из приведенного обсуждения вытекает, что наличие точек типа  $C$  должно быть характерной особенностью задач синхронизации. (Если только система не редуцируется к одномерному отображению.) И это оказывается действительно так. Соответствующие точки обнаруживаются не только в системе (2.1), но и в системе взаимно связанных осцилляторов Ресслера [11], в системе взаимно связанных логистических отображений [12], на границе языков Арнольда в модельном отображении с бифуркацией Неймарка–Сакера [13].

Критическая точка  $C$  обладает еще одним замечательным свойством. В этой точке сосуществует бесконечный набор устойчивых периодических орбит учетверяющегося периода. Так, для левой точки  $C$  на рис. 2 устойчивыми являются циклы периода 1, 4, 16, 64, 256,  $\dots$ ,  $4^n$ ,  $\dots$ ,  $n$  — целое (период измерен по отношению к периоду внешней силы.) На рис. 3 представлены фазовые портреты устойчивых циклов периода 1, 4, 16, 64 системы (2.1). Для критической точки  $C$ -типа на другом крае языка Арнольда устойчивыми являются циклы с периодами  $2 \cdot 4^n$ , т. е. 2, 8, 32, 128  $\dots$

Указанное свойство позволяет говорить о данной системе как о примере **критического квазиаттрактора**. Напомним, что в математической теории динамического хаоса является существенной концепция квазиаттрактора — объекта, который характеризуется сосуществованием в фазовом пространстве как хаотического притягивающего множества, так и бесконеч-

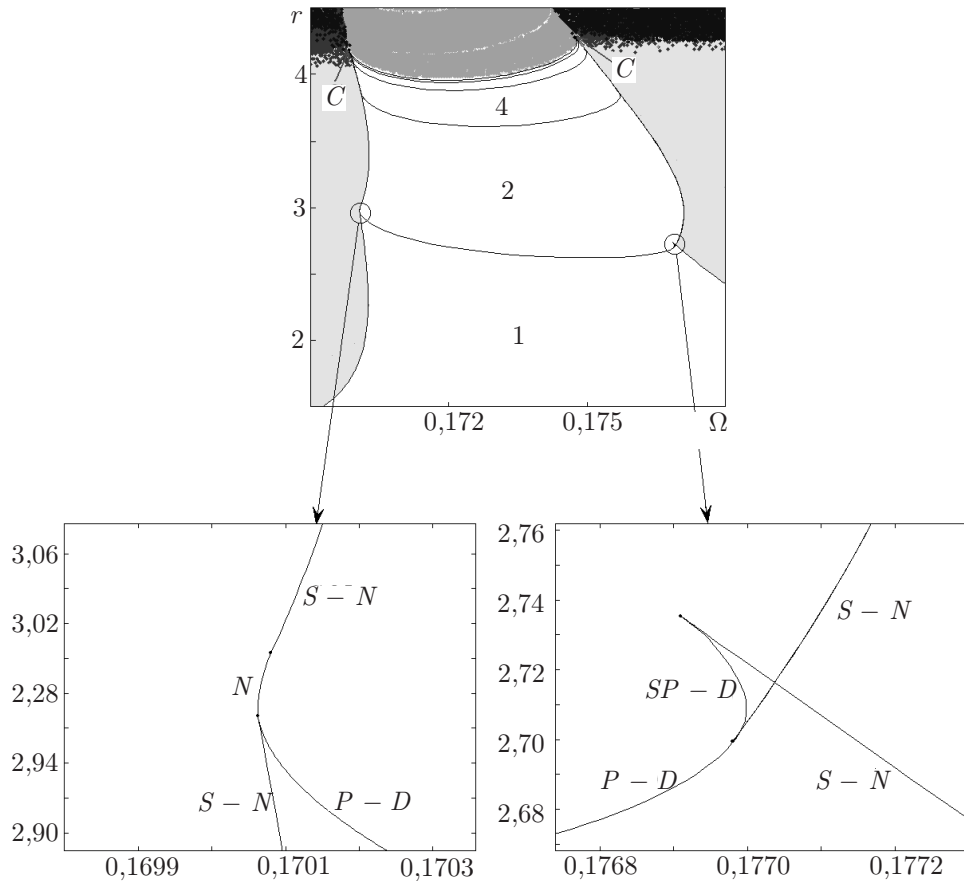


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для периодически возбуждаемого осциллятора Ресслера (2.1) на плоскости параметров  $(\Omega, r)$  при  $A = 0, 1$ . Белая область в середине — область синхронизации. Светло-серым обозначены области квазипериодических и долгопериодических режимов, темно-серая область наверху соответствует синхронным хаотическим режимам, черные области — несинхронной хаотической динамике. Отдельно указано положение критических точек  $C$ -типа. Увеличенные фрагменты демонстрируют детали бифуркационной структуры вблизи точек *fold-flip* бифуркаций. Линии удвоения периода обозначены как  $P - D$ , субкритической бифуркации удвоения периода —  $SP - D$ , седло-узловой (касательной) бифуркации —  $S - N$ , бифуркации Неймарка —  $N$

ного числа устойчивых долгопериодических циклов и, во-вторых, крайне выраженной структурной неустойчивостью [6, 14]. В реальных радиофизических системах свойства квазиаттракторов впервые были экспериментально исследованы в работах [9, 15] на примере генератора Анищенко–Астахова.

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на существенность указанного типа поведения для теории динамических систем, дать краткий обзор основных его свойств, а также обсудить некоторые новые моменты, относящиеся к устройству бассейнов притяжения критического квазиаттрактора, свойствам скейлинга (самоподобия) бассейнов, динамике в присутствии шума, включая ренормгрупповой анализ с шумом и инициированные шумом переходы от одного «элемента» критического квазиаттрактора к другому.

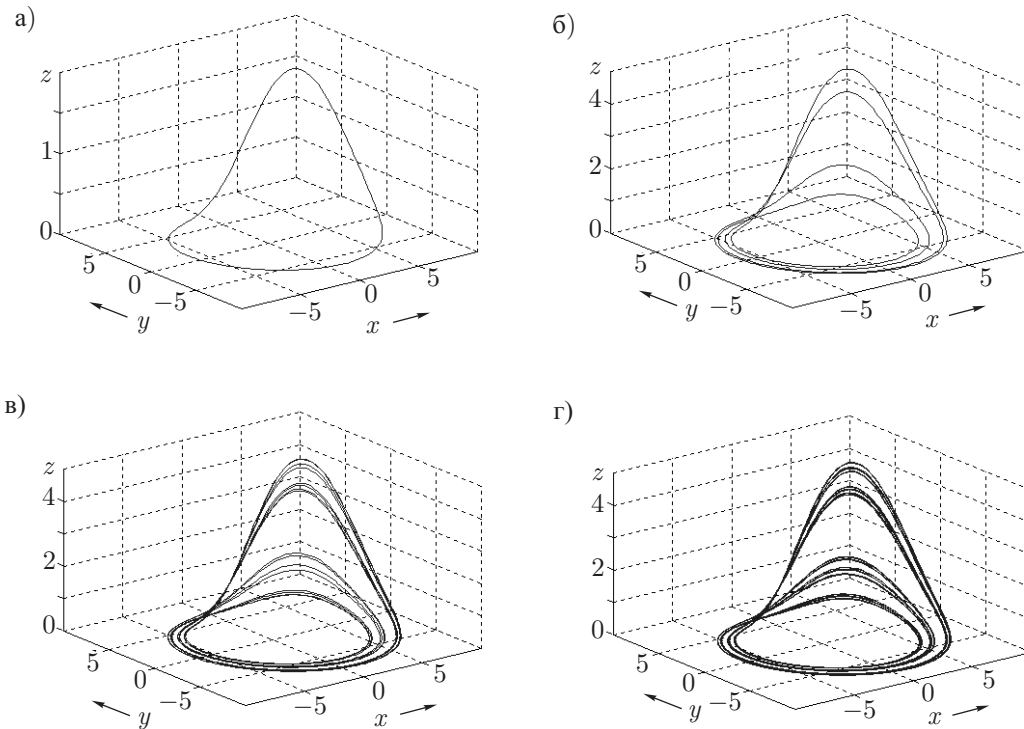


Рис. 3. Устойчивые циклы периодов 1 (а), 4 (б), 16 (в) и 64 (г) для периодически возбуждаемого осциллятора Ресслера в критической точке  $r_c = 4,93570167738716$ ,  $\Omega_c = 0,1482534881146906$ ,  $A_c = 1,35$ . Это четыре первых представителя бесконечного множества устойчивых циклов, составляющих критический квазиаттрактор системы (2.1)

### 3. Модельное отображение с критической точкой типа $C$

Так же, как и в теории бифуркаций, при описании критических явлений важным является установление и анализ простейшей модельной системы с данным типом поведения. Представленный выше пример относится к системе, описываемой дифференциальными уравнениями с размерностью фазового пространства, равной четырем (с учетом неавтономного характера системы). Такая система, хотя и является физически мотивированной, не может претендовать на роль простейшего представителя с обсуждаемым типом поведения. В работах [16–18] была получена простая и удобная для исследования критического квазиаттрактора модель — двумерное отображение с тремя параметрами

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n. \quad (3.1)$$

На рис. 4 показана карта режимов отображения (3.1) на плоскости параметров  $a$  и  $d$  при фиксированной величине  $b = -0,6663$ . При построении карты в каждой точке плоскости параметров численно определялся период соответствующего цикла, а затем эта точка (пиксель) «окрашивалась» в определенный цвет [6]. Оттенками серого цвета обозначены периодические режимы, черным цветом — хаос и квазипериодика, белый цвет соответствует выходу решения на бесконечность. Как можно видеть из рисунка, обычный фейгенбаумовский каскад удвоения периода наблюдается в левой части рисунка. Границей хаоса является фейгенбаумовская критическая линия, т. е. линия накопления линий бифуркации удвоения периода.

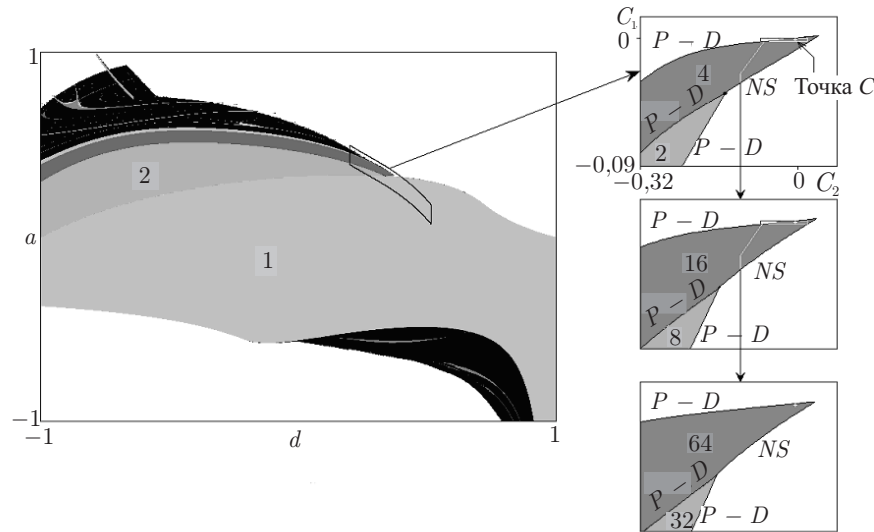


Рис. 4. Топография плоскости параметров для отображения (3.1),  $b = -0,6663$  (слева) и области устойчивости для циклов периодов 2, 4, ..., 64 в скейлинговых координатах (4.9) (справа). Криволинейный четырехугольник на большой диаграмме соответствует области, представленной в скейлинговых координатах на правой верхней картинке. Линии основных бифуркаций обозначены как  $PD$  — удвоение периода и  $NS$  — Неймарка–Сакера (более детальный бифуркационный анализ в окрестности точки  $C$  можно найти в [16, 17])

Для больших значений  $d$  наблюдается изменение динамики системы, в частности, появляются седло–узловые бифуркации. Отслеживая какую-либо из бифуркационных линий удвоения периода, по мере увеличения  $d$  приходим в бифуркационную точку коразмерности два *fold-flip*, где два мультипликатора периодической орбиты на пороге потери устойчивости равны соответственно  $-1$  и  $+1$ . Вычисления показывают, что каждая линия удвоения периода имеет свою такую конечную точку, причем все вместе они образуют бесконечную последовательность, в пределе сходящуюся к критической точке

$$a_c = 0,249902800, \quad d_c = 0,452902880 \quad (3.2)$$

при  $b = -0,6663$ . Можно определить аналогичные точки и при других значениях третьего параметра в отображении (3.1). Так, при  $b = 0,6544$ :

$$a_c = 0,566620683, \quad d_c = 1,597132592. \quad (3.3)$$

Это и есть критические точки типа  $C$ . (Заметим, что выбор значений  $b = -0,6663$  и  $b = 0,6544$  не случаен и объясняется ниже.)

#### 4. Ренормгрупповой анализ и его следствия

Для исследования типов критического поведения, присущих двумерным отображениям и не имеющих аналогов для случая одной переменной, необходимо использовать двумерное обобщение ренормгруппового уравнения Фейгенбаума–Цвитановича [6, 7, 17, 18]. С этой целью рассмотрим двумерное отображение точно в критической точке

$$X_{n+1} = g(X_n, Y_n), \quad Y_{n+1} = f(X_n, Y_n).$$

Пусть в двумерном фазовом пространстве выбрана такая система координат<sup>2</sup>, что масштабное преобразование, выполняемое по ходу ренормгруппового анализа, имеет вид пересчета масштабов на некоторые факторы  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$X \rightarrow X/\alpha, \quad Y \rightarrow Y/\beta.$$

Оператор эволюции за  $2^k$  шагов задан парой функций  $\{g_k(X, Y), f_k(X, Y)\}$ , причем  $g(0, 0) = 1$ ,  $f(0, 0) = 1$ . Применим отображение дважды и выполним замену  $X \rightarrow X/\alpha_k$ ,  $Y \rightarrow Y/\beta_k$ , где  $\alpha_k = 1/g_k(1, 1)$  и  $\beta_k = 1/f_k(1, 1)$ . Тогда для перенормированного оператора эволюции за  $2^{k+1}$  шагов нетрудно получить соответствующее уравнение ренормгруппы [6, 7, 17, 18]:

$$\begin{aligned} g_{k+1}(X, Y) &= \alpha_k g_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), \quad f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)), \\ f_{k+1}(X, Y) &= \beta_k f_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), \quad f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)). \end{aligned} \quad (4.1)$$

В том случае, когда критическое поведение ассоциируется с неподвижной точкой РГ-преобразования, уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= \alpha g(g(X/\alpha, Y/\beta), \quad f(X/\alpha, Y/\beta)), \\ f(X, Y) &= \beta f(g(X/\alpha, Y/\beta), \quad f(X/\alpha, Y/\beta)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\alpha = 1/g(1, 1)$  и  $\beta = 1/f(1, 1)$ .

Теперь можно выписать соответствующие двумерные линейаризованные уравнения ренормгруппы в неподвижной точке  $(g, f)$ :

$$\begin{aligned} \nu u(X, Y) &= \alpha [g'_X(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))u(X/\alpha, Y/\beta) + \\ &+ g'_Y(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))v(X/\alpha, Y/\beta) + \\ &+ u(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))], \\ \nu v(X, Y) &= \beta [f'_X(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))u(X/\alpha, Y/\beta) + \\ &+ f'_Y(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))v(X/\alpha, Y/\beta) + \\ &+ v(g(X/\alpha, Y/\beta), f(X/\alpha, Y/\beta))]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь индексы обозначают производные по аргументам  $X$  и  $Y$ . Количество существенных собственных чисел уравнения (4.3), по абсолютному значению превышающих 1, определяет коразмерность критической точки, а сами собственные значения  $\nu$  являются факторами скейлинга вдоль соответствующих направлений в пространстве параметров [6, 7]. Универсальные мультипликаторы для двумерного случая являются собственными значениями матрицы Якоби, вычисленной в неподвижной точке.

Расчеты, основанные на итерациях модельного отображения в критической точке (3.2) при использовании скейлинговых переменных  $X = x$ ,  $Y = y + 1, 3164475$ , показывают, что соответствующее решение уравнения РГ (4.2) представляет собой цикл периода 2:  $(g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow (g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow \dots$ . Значения параметра  $b$  (отрицательное  $-0,6663$  и положительное  $0,6544$ ) специально выбраны так, чтобы обеспечить наискорейший выход решения на ренорм-цикл. В точках (3.2) и (3.3) реализуются противоположные по фазе колебания решения, а именно в критической точке (3.3) при использовании скейлинговых переменных  $X = x$ ,  $Y = y - 1, 7093522$  решение уравнения РГ (4.2) выглядит иначе:  $(g_2, f_2) \rightarrow (g_1, f_1) \rightarrow (g_2, f_2) \rightarrow (g_1, f_1) \rightarrow \dots$ .

<sup>2</sup>Заметим, что «скейлинговые переменные»  $X, Y$ , для которых выполняются соответствующие масштабные закономерности, не совпадают точно с «естественными» переменными модельного отображения (3.1). Поэтому для их поиска необходимо реализовать специальную численную процедуру, описанную, например в [17, 18]. В результате можно получить:  $X = x$ ,  $Y = y + 1, 3164475$ .



Численное решение системы функциональных уравнений

$$\begin{aligned} g_2(X, Y) &= \alpha_1 g_1(g(X/\alpha_1, Y/\beta_1), f_1(X/\alpha_1, Y/\beta_1)), \\ f_2(X, Y) &= \beta_1 f_1(g(X/\alpha_1, Y/\beta_1), f_1(X/\alpha_1, Y/\beta_1)), \\ g_1(X, Y) &= \alpha_2 g_2(g(X/\alpha_2, Y/\beta_2), f_2(X/\alpha_2, Y/\beta_2)), \\ f_1(X, Y) &= \beta_2 f_2(g(X/\alpha_2, Y/\beta_2), f_2(X/\alpha_2, Y/\beta_2)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

позволяет найти функции  $g_{1,2}$  и  $f_{1,2}$  в виде разложений по степеням двух переменных:

$$\begin{aligned} g_1(X, Y) &= 1 - 1,2770X^2 - 0,4995Y + 0,1391X^2Y + \dots, \\ f_1(X, Y) &= 1 - 2,3210X^2 + 0,2267Y + 0,5051X^2Y + \dots, \\ g_2(X, Y) &= 1 - 1,5293X^2 + 0,2314Y - 0,0592X^2Y + \dots, \\ f_2(X, Y) &= 1 - 1,6598X^2 + 1,3491Y + 0,2212X^2Y + \dots, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где  $\alpha_{1,2} = 1/g_{1,2}(1, 1)$ ,  $\beta_{1,2} = 1/f_{1,2}(1, 1)$ .

Ренормгрупповое преобразование, лежащее в основе теории Фейгенбаума, называют «преобразованием удвоения». В данной ситуации уместно говорить о «преобразовании учетверения», неподвижными точками которого являются пары функций  $g_1, f_1$  и  $g_2, f_2$ . Масштабные факторы, найденные численно для этого преобразования учетверения [17, 18]

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2 = 6,565350 \text{ и } \beta = \beta_1\beta_2 = 22,120227, \tag{4.6}$$

отвечают за скейлинг в фазовом пространстве в критической точке. Пересчет масштабов на эти факторы по соответствующим координатным осям в фазовом пространстве отвечает пересчету временного масштаба в 4 раза.

Отображение  $x \rightarrow g_1(x, y), y \rightarrow f_1(x, y)$  при  $b = -0,6663$  имеет **устойчивую** неподвижную точку  $X_* = 0,25039, Y_* = 1,59489$  с мультипликаторами  $\mu_1^{(1)} = -0,725255$  и  $\mu_2^{(1)} = 0,847450$ . Напомним, что, в силу уравнения РГ, отображение  $x \rightarrow g_1(x, y), y \rightarrow f_1(x, y)$ , проитерированное четырежды и подвергнутое преобразованию масштабов ( $X \rightarrow X/\alpha, Y \rightarrow Y/\beta$ ), превращается в себя. Поэтому наличие устойчивой неподвижной точки влечет за собой существование бесконечного множества аттракторов — устойчивых циклов периода  $4^k, k = 1, 2, \dots, \infty$ , причем все мультипликаторы равны вышеприведенным универсальным значениям и каждый аттрактор обладает своей областью притяжения в фазовом пространстве. (Заметим, что по крайней мере одна точка из орбиты цикла периода  $4^k$  легко может быть вычислена:  $X_*/\alpha^k, Y_*/\beta^k$ .) Это множество можно назвать **критическим квазиаттрактором** (см. соответствующее обсуждение в п. 2).

Наряду с устойчивыми циклами периода  $4^k$ , в критической точке (3.2) имеется счетное множество **неустойчивых** циклов периода  $2 \cdot 4^k$ . Это связано с тем, что отображение  $x \rightarrow g_1(x, y), y \rightarrow f_1(x, y)$  имеет неустойчивый цикл периода 2 с мультипликаторами  $\mu_1^{(2)} = -0,848865$  и  $\mu_2^{(2)} = 1,174459$ . Заметим, что отображение  $x \rightarrow g_2(x, y), y \rightarrow f_2(x, y)$ , наоборот, имеет неустойчивую неподвижную точку с мультипликаторами  $\mu_1^{(2)}, \mu_2^{(2)}$  и устойчивый цикл периода два с мультипликаторами  $\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}$ . В таблице 1 приведены значения координат элементов циклов  $4^k$  и  $2 \cdot 4^k, k=1, 2, 3, 4$ , а также значения мультипликаторов для них в критических точках (3.2) и (3.3).

Линеаризуя уравнения (4.1), можно получить задачу на собственные значения для возмущений найденного решения под действием РГ-преобразования учетверения. Наибольшие собственные числа:

$$\delta_1 = 92,43126348, \quad \delta_2 = 4,19244418, \quad \delta_3 \approx 0,93. \tag{4.7}$$



Таблица 1. Циклы отображения (3.1) в критических точках (3.2) и (3.3)

Период	Критическая точка (3.2)		Критическая точка (3.3)	
	$x, y$	$\mu_{1,2}$	$x, y$	$\mu_{1,2}$
4	0, 0470280	-0, 746088	0, 0877511	-0, 852625
	-1, 249667476	0, 836959	1, 647055174	1, 178436
8	-0, 0329270	-0, 841748	-0, 0186563	-0, 723036
	-1, 303805726	1, 171938	1, 693668330	0, 847867
16	0, 00710492	-0, 729383	0, 0133566	-0, 849490
	-1, 313341282	0, 845411	1, 706481364	1, 174766
32	-0, 00504333	-0, 847568	-0, 00285310	-0, 724878
	-1, 315875350	1, 174246	1, 708642053	0, 847642
64	0, 00107864	-0, 725956	0, 00203414	-0, 848973
	-1, 316306374	0, 846812	1, 709221776	1, 174447
128	-0, 000768793	-0, 848677	-0, 000434772	-0, 725202
	-1, 316421603	1, 174723	1, 709320067	0, 847534
256	0, 000164128	-0, 725310	0, 000309820	-0, 848877
	-1, 316441156	0, 847087	1, 709346278	1, 174403
512	-0, 000117196	-0, 848865	-0, 0000662279	-0, 725256
	-1, 3164463	1, 174791	1, 709350733	0, 847509

Только  $\delta_1$  и  $\delta_2$  больше единицы, поэтому формально коразмерность равна 2: данный тип поведения будет встречаться как типичный феномен при двухпараметрическом анализе в некоторых точках на плоскости параметров. Поскольку третье собственное число  $\delta_3$  лишь немного меньше единицы, это приводит к очень медленной сходимости. В общем случае, как правило, количественная универсальность  $C$ -типа будет наблюдаться только после очень большого числа бифуркаций удвоения периода. Если в системе есть дополнительный управляющий параметр, то можно попытаться подобрать его так, чтобы устранить вклад медленно затухающей моды. Именно этим объясняется выбор специальных значений  $b = -0,6663$  и  $b = 0,6544$ , для которых проводились все расчеты.

Нормированное отображение, описывающее эволюцию  $X$  и  $Y$  после достаточно большого числа шагов времени ( $2^{2k}$  или  $2^{2k+1}$ ), будет принадлежать двумерному неустойчивому многообразию РГ-цикла:

$$\begin{aligned} \{g(X, Y), f(X, Y)\}_{2k+1} &= \left\{ G_1(X, Y, C_1\delta_1^k, C_2\delta_2^k), F_1(X, Y, C_1\delta_1^k, C_2\delta_2^k) \right\}, \\ \{g(X, Y), f(X, Y)\}_{2k} &= \left\{ G_2(X, Y, C_1\delta_1^k, C_2\delta_2^k), F_2(X, Y, C_1\delta_1^k, C_2\delta_2^k) \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $G_{1,2}(X, Y, 0, 0) = g_{1,2}(X, Y)$ ,  $F_{1,2}(X, Y, 0, 0) = f_{1,2}(X, Y)$ . Из уравнений (4.8) можно заключить следующее о свойствах универсальности и скейлинга.

1. Форма оператора эволюции зависит только от двух коэффициентов:  $C_1$  и  $C_2$ ,
2. Оператор эволюции является инвариантом по отношению к изменению коэффициентов  $C_1 \rightarrow C_1/\delta_1$ ,  $C_2 \rightarrow C_2/\delta_2$ , сопровождающимся сдвигом по времени  $k \rightarrow k + 2$  (это означает учетверение масштаба времени).

Коэффициенты  $C_{1,2}$  будем называть *скейлинговыми координатами*. Они зависят от конкретной формы первоначального отображения. Связь между скейлинговыми координатами и пара-

метрами исходного модельного отображения [17, 18]

$$a = a_c + C_1 - C_2 + qC_2^2 - rC_2^3, \quad d = d_c - pC_2, \tag{4.9}$$

где  $p = -0,79016607$ ,  $q = -1,546069$ ,  $r = 2,15$  для критической точки (3.2) и  $p = 0,45431477$ ,  $q = -0,782222$ ,  $r = 0,65$  для критической точки (3.3).

Итак, мы представили РГ-анализ, который говорит о существовании критического квазиаттрактора, а также целого ряда свойств скейлинга в системе с критической точкой данного типа. Можно ожидать, что эти выводы распространяются на все системы, в частности, перечисленные в п. 2, принадлежащие к классу универсальности, ассоциирующемуся с данным типом критического поведения.

### 5. Свойства скейлинга и критический квазиаттрактор

Первый вывод, который можно сделать из ренормгруппового анализа, говорит о самоподобном устройстве плоскости параметров системы в окрестности критической точки. Это свойство системы (3.1) иллюстрирует рис. 4. На этом рисунке на вставках показаны увеличенные в разной степени фрагменты плоскости параметров в окрестности точки (3.2). Используются скейлиновые параметры  $(C_1, C_2)$ , что отвечает некоторой криволинейной системе координат с центром в критической точке. Для наглядности на основной карте режимов выделен соответствующий криволинейный фрагмент, который затем преобразуется в прямоугольник. При переходе от одной вставки к другой параметры пересчитываются по правилу  $C_1 \rightarrow C_1/\delta_1, C_2 \rightarrow C_2/\delta_2$ , где константы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  заданы соотношениями (4.7). Чтобы сделать свойство самоподобия более наглядным, цвет областей при переходе с одного уровня скейлинга на другой также изменяется по «правилу учетверения». Соответствующие периоды циклов на рис. 4 указаны цифрами. Можно видеть хорошее совпадение картинок, по крайней мере на визуальном уровне. Таким образом, при переходе с уровня на уровень масштабы времени изменяются в 4 раза.

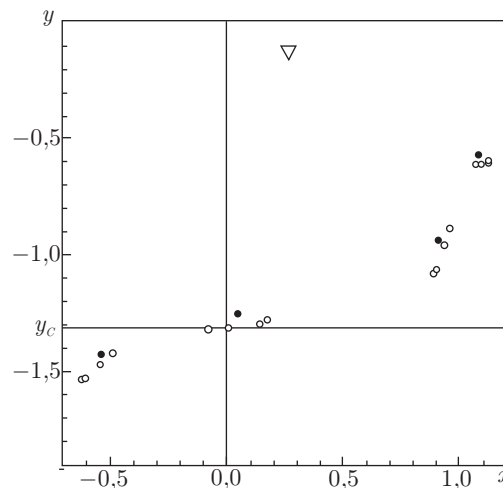


Рис. 5. Расположение на фазовой плоскости отображения (3.1) неподвижной точки (▽) и точек, принадлежащих устойчивым циклам периода 4 (●) и 16 (○) в критической точке типа С при  $b = -0,6663$ . Это первые члены бесконечного семейства аттракторов, сосуществующих в критической точке



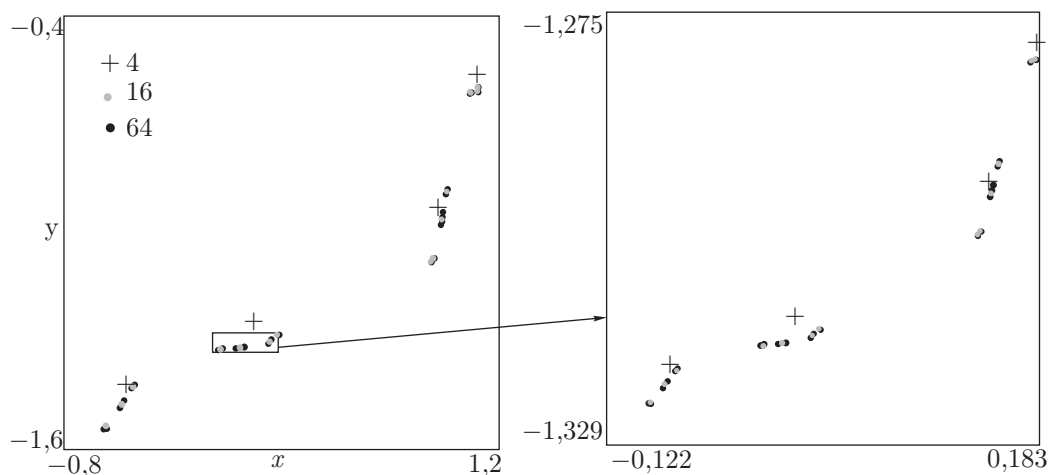


Рис. 6. Иллюстрация скейлинговых свойств множества сосуществующих аттракторов на фазовой плоскости модельного отображения (3.1) в критической точке (3.2) при  $b = -0,663$

Еще один вывод ренормгруппового анализа — сосуществование в критической точке устойчивых циклов, периоды которых отличаются в 4 раза. Рис. 5 иллюстрирует это утверждение. На фазовой плоскости  $(x, y)$  показано взаимное расположение трех первых аттракторов из бесконечного множества, сосуществующих в критической точке  $C$ . Это неподвижная точка (период 1), циклы периода 4 и 16. Можно отметить характерную особенность картины — элементы 16-цикла группируются по 4 точки в окрестности элементов 4-цикла. При этом такие группы изображающая точка при движении в фазовом пространстве посещает в соответствии с правилом обхода 4-цикла. Аналогичным образом в окрестности каждого элемента 16-цикла группируются по четыре элемента 64-цикла и т. д.

Элементы циклов «учетверенных» периодов, лежащие на фазовой плоскости в окрестности начала координат, подчиняются свойству скейлинга. Это свойство иллюстрирует рис. 6, на котором показаны различные элементы критического квазиаттрактора. Масштаб по осям динамических переменных  $x$  и  $y$  относительно критической точки  $(x_c = 0, y_c = -1,316447534$  при  $b = -0,6663)$  изменяется на найденные при ренормгрупповом анализе факторы  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, см. (4.6). На исходном рисунке изображены циклы периода 4, 16 и 64. На втором — попадающие в «поле зрения» элементы 16-, 64- и 256-циклов. При этом «цвет» точек при переходе от уровня к уровню также изменяется по правилу «учетверения».

Как мы уже отмечали, критический аттрактор характеризуется сосуществованием устойчивых циклов разных периодов. Поэтому важной его характеристикой служат бассейны притяжения различных элементов квазиаттрактора в фазовом пространстве. На рис. 7а показаны такие бассейны для точки (3.2), а на рис. 8а — для точки (3.3). Подмножества, соответствующие выходу итераций отображения на разные аттракторы, окрашены в определенные цвета (отдельно указана палитра цветов, соответствующих выходу на неподвижную точку, циклы периода 4, 16, 64 или 2, 8, 32, 128). Белый цвет соответствует «убеганию» точки на бесконечность. Можно видеть, что границы между различными областями притяжения являются фрактальными (по крайней мере на визуальном уровне).

Представленные рисунки наглядно иллюстрируют существование двух разновидностей критических точек, отвечающих двум «фазам» ренормцикла. Видно, что бассейн притяжения, соответствующий критической точке (3.2), содержит только области с выходом на неподвижную точку, аттракторы циклов 4, 16, 64 и т. д., а бассейн притяжения, соответствующий критической точке (3.3) — только области с выходом на аттракторы циклов 2, 8, 32 и т. д.

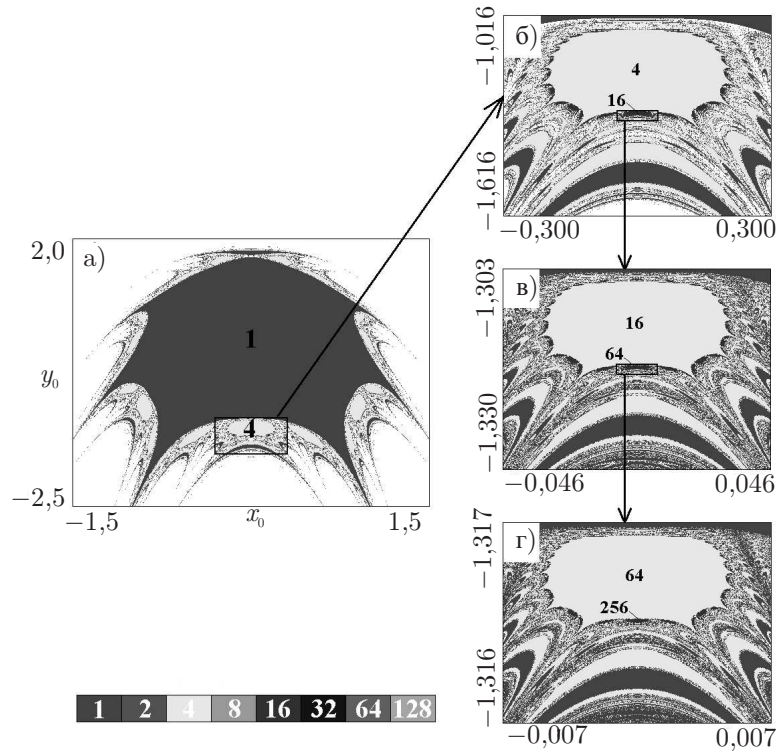


Рис. 7. Иллюстрация свойства скейлинга бассейна притяжения критического аттрактора модельного отображения (3.1) при значениях параметров, соответствующих критической точке (3.2).

На рисунках 7 и 8 также представлены иллюстрации самоподобного устройства бассейнов притяжения (вставки справа от основного рисунка). Алгоритм построения серии рисунков 7б,в,г состоит в следующем. (Аналогично для 8б,в,г.) Вблизи центра скейлинга — точки с координатами  $x_c=0, y_c=-1,316447534$  — вырезан прямоугольник, который перестроен в увеличенном масштабе на фрагменте (б). Фрагмент (в) получается из фрагмента (б) последовательным приближением к точке скейлинга следующим способом: масштаб по оси  $x$  пересчитывается в  $\alpha$  раз относительно точки  $x_c$  по правилу  $x_c + (x - x_c)/\alpha$ , а масштаб по оси  $y$  — в  $\beta$  раз относительно  $y_c$  по правилу  $y_c + (y - y_c)/\beta$ . Фрагмент (г) можно получить из фрагмента (б) изменением масштабов в  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  раз. Пересчет масштабов сопровождается изменением масштаба времени в 4 раза, поэтому для воспроизведения картинки надо также менять правило соответствия цвета циклу определенного периода. И в случае отрицательного значения параметра  $b$ , и в случае положительного его значения наблюдается очень хорошее совпадение фрагментов по мере приближения к центру скейлинга. Отметим, что наличие скейлинга при переходе с уровня на уровень является еще одним аргументом в пользу фрактальной организации границ бассейнов притяжения.

## 6. Воздействие шума на динамику системы с критическим квазиаттрактором. Ренормгрупповой анализ в присутствии шума

Реалистичные системы всегда содержат шум. Воздействие шума разрушает любой тип критического поведения (включая и фейгенбаумовский) на определенном уровне удвоения. Понижая шум, можно увеличить число возможных удвоений в системе. Это обстоятельство делает инте-

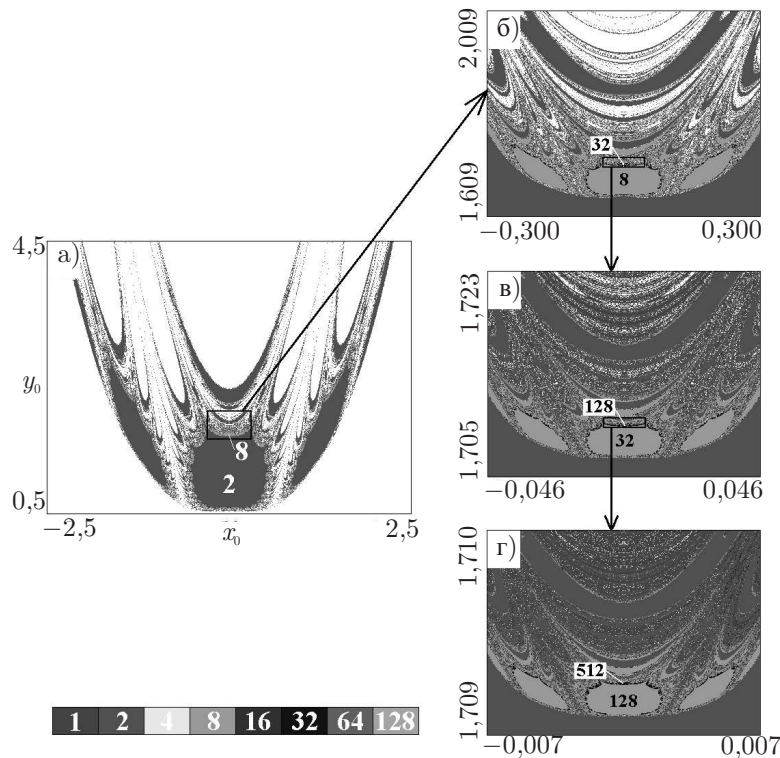


Рис. 8. Иллюстрация свойства скейлинга бассейна притяжения критического аттрактора модельного отображения (3.1) при значениях параметров, соответствующих точке (3.3)

рными системы с шумом не только с физической, но и с математической точки зрения в плане возможного обобщения ренормгруппового анализа. Особенность рассматриваемой системы — наличие критического квазиаттрактора, содержащего сосуществующие устойчивые циклы. Поэтому интересно также выяснить проявления воздействия шума на такой объект. Как мы увидим, возможны иллюстрации скейлинга в системе с шумом, существенно использующие возможность сосуществования периодических движений.

Для исследования динамики модельной системы (3.1) в присутствии шума введем в это отображение дополнительное слагаемое  $\varepsilon\xi_n$ , задающее внешний шум:

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n + \varepsilon\xi_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n. \quad (6.1)$$

Здесь  $\varepsilon$  представляет собой интенсивность шума,  $\xi_n$  — случайную последовательность значений с нулевым средним  $\langle \xi_n \rangle = 0$  и постоянным значением дисперсии  $\sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle}$ . Для проведения численных расчетов использовались генерируемые компьютером величины  $\xi_n$ , равномерно распределенные в диапазоне  $[-0, 5; 0, 5]$ , то есть это шум, ограниченный интервалом, что позволяет достаточно просто и эффективно выявить свойства критического квазиаттрактора<sup>3</sup>.

На рис. 9 показано, как происходит движение изображающей точки в фазовом пространстве относительно бассейнов притяжения критического квазиаттрактора. Точка стартует из области притяжения 64-цикла. Фрагменты а–г соответствуют случаям шума различной интенсивности. Интенсивность шума возрастает от картинке к картинке. Представлено большое (но конечное) число итераций:  $N = 80000$ .

<sup>3</sup>Конкретный вид распределения при исследовании критических явлений не является заметно существенным в си-

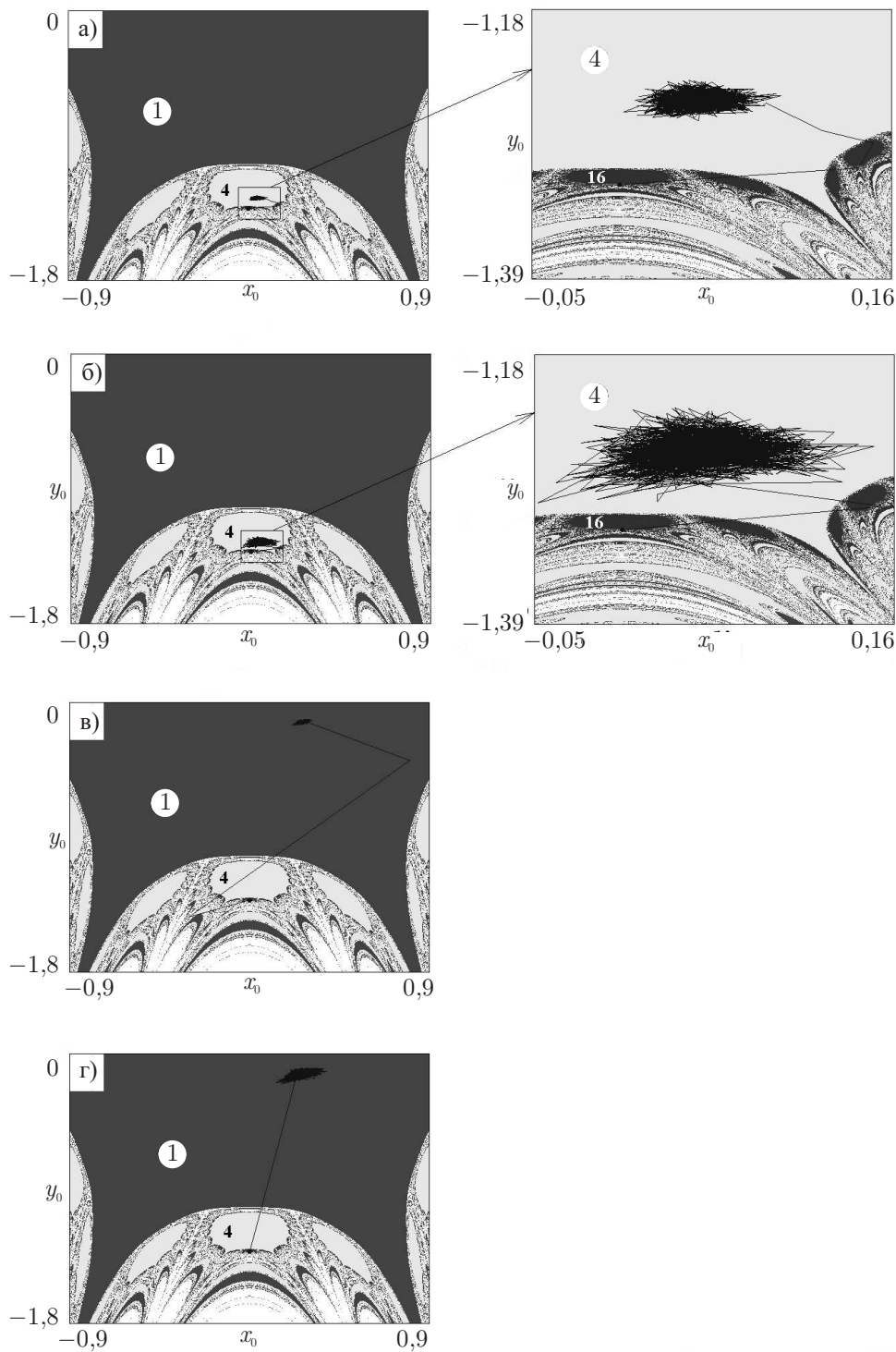


Рис. 9. Иллюстрация случайного дрейфа изображающей точки, стартующей из элемента 64-цикла модельного отображения (6.1) с координатами  $x = 0,00107864$ ,  $y = -1,316306374$ , в присутствии шума. Интенсивность шума равна 0,005 (а), 0,01 (б), 0,04 (в) и 0,1 (г). Цифрами отмечены области существования циклов различных периодов

На рис. 9а можно видеть, что при  $\varepsilon = 0,005$  шум выводит точку в область притяжения цикла периода 4, и по истечении  $N$  итераций она остается в пределах бассейна аттрактора 4-цикла. При увеличении амплитуды шума в два раза точка остается в пределах той же области, однако, облако «прочерчиваемых» точкой траекторий увеличивается в размерах (рис. 9б). Шум еще больших интенсивностей сразу же выбрасывает точку в область существования цикла периода 1, в которой она и остается в дальнейшем (рис. 9в, г). Обобщая полученные результаты, можно сказать, что под действием шума происходят «перескоки» между аттракторами, сосуществующими при одних и тех же значениях параметра, т. е. между элементами критического квазиаттрактора. Стоит отметить, что из-за этого свойства невозможным становится, например, построение графиков ляпуновского показателя.

Обсудим теперь свойства скейлинга в присутствии шума. Шум, как мы уже отмечали, вообще говоря, разрушает свойство скейлинга. Однако, как было показано в работах [22, 23] и позднее в работах [19–21], возможно дать иллюстрации скейлинга и в системах с шумом, если при каждом преобразовании удвоения совершать пересчет амплитуды шума на универсальный для каждого типа критического поведения фактор. Данный фактор может быть определен с помощью решения РГ-уравнения с шумом. Проведем соответствующий ренормгрупповой анализ для  $C$ -типа критичности.

Пусть система описывается двумерным отображением вида

$$X_{n+1} = g(X_n, Y_n) + \varepsilon \xi_n(X_n, Y_n), \quad Y_{n+1} = f(X_n, Y_n) + \varepsilon \eta_n(X_n, Y_n), \quad (6.2)$$

где функции  $g(X, Y)$  и  $f(X, Y)$  определяют неподвижную точку ренормгруппового преобразования, соответствующую критическому поведению типа  $C$ , а  $\xi_n$  и  $\eta_n$  — независимые случайные величины, для которых

$$\langle \xi_n \xi_{n+1} \rangle = \langle \xi_n \eta_{n+1} \rangle = \langle \xi_{n+1} \eta_n \rangle = \langle \eta_n \eta_{n+1} \rangle = 0.$$

Введем следующие обозначения для моментов второго порядка этих случайных величин:

$$P(X, Y) = \langle \xi_n^2(X, Y) \rangle, \quad Q(X, Y) = \langle \xi_n(X, Y) \eta_n(X, Y) \rangle, \quad S(X, Y) = \langle \eta_n^2(X, Y) \rangle. \quad (6.3)$$

Тогда при малой амплитуде шума ( $\varepsilon \ll 1$ ) двукратно проитерированное отображение (6.2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= g(g(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n)) + \varepsilon[\xi_n(X_n, Y_n) g'_X(g(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n)) + \\ &\quad + \eta_n(X_n, Y_n) g'_Y(g(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n)) + \xi_{n+1}(g(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n))], \\ Y_{n+2} &= f(f(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n)) + \varepsilon[\xi_n(X_n, Y_n) f'_X(g(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n)) + \\ &\quad + \eta_n(X_n, Y_n) f'_Y(g(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n)) + \eta_{n+1}(g(X_n, Y_n), f(X_n, Y_n))]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Далее необходимо выполнить стандартную перенормировку  $X \rightarrow X/\alpha$ ,  $Y \rightarrow Y/\beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — константы скейлинга для  $C$ -типа критичности (см. (4.6)), и получить уравнения, подобные (6.4) для 4, 8, 16 и т. д. шагов дискретного времени. В результате получим функциональные уравнения, представляющие собой искомое ренормгрупповое преобразование и описывающие изменение

---

лу свойства универсальности [19–21].



моментов второго порядка  $P(X, Y), Q(X, Y), S(X, Y)$ :

$$\begin{aligned}
 P'(X, Y) &= \alpha^2 \left\{ \left( g'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right)^2 P \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + \right. \\
 &\quad + 2g'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) g'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) Q \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + \\
 &\quad \left. + \left( g'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right)^2 S \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + P \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right\}, \\
 Q'(X, Y) &= \alpha\beta \left\{ g'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) f'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) P \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + \right. \\
 &\quad + \left[ g'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) f'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + g'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) f'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right] Q \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + \\
 &\quad + g'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) f'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) S \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + \\
 &\quad \left. + Q \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right\}, \\
 S'(X, Y) &= \beta^2 \left\{ \left( f'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right)^2 P \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + \right. \\
 &\quad + 2f'_X \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) f'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) Q \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + \\
 &\quad \left. + \left( f'_Y \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right)^2 S \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) + S \left( g \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right), f \left( \frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right) \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Если представить каждую из функций  $P(X, Y), Q(X, Y), S(X, Y)$  в виде полиномиального разложения по степеням аргументов, учесть известное разложение (4.5) для функций  $f(X, Y)$  и  $g(X, Y)$ , то многократное применение функционального преобразования (6.5) позволяет найти и неподвижную точку, и соответствующее ей самое большое собственное число

$$\mu = 51,06903.$$

Это число является универсальной константой перенормировки амплитуды шума для исследуемого  $C$ -типа критичности.

## 7. Иллюстрации динамики и свойств скейлинга в присутствии шума

Приведем некоторые иллюстрации, демонстрирующие скейлинг с шумом для модельного отображения (6.1) в окрестности критической точки  $C$  с использованием нового универсального фактора  $\mu$ . При этом существенно используем возможность индуцированных шумом переходов между элементами квазиаттрактора.

На рис. 10 представлены результаты численного эксперимента, состоящего в следующем: проводятся  $N_{\text{полн}} = 3000$  испытаний, в каждом из которых шум действует в течение конечного

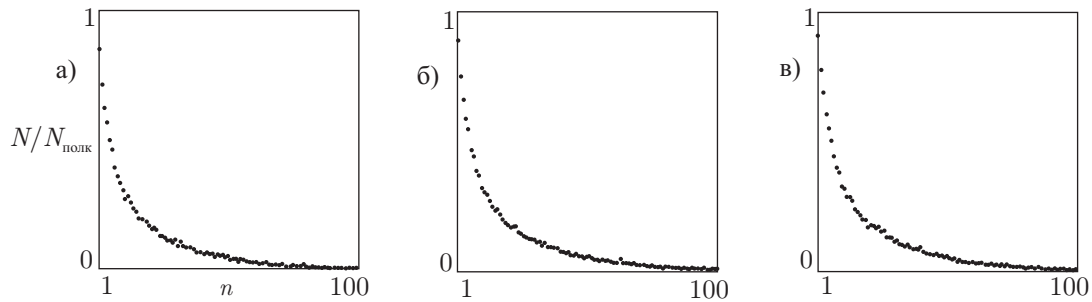


Рис. 10. Иллюстрация скейлинга на примере отображения (6.1) с шумом: вероятность возвращения точки в «стартовую» окрестность (см. пояснение в тексте)

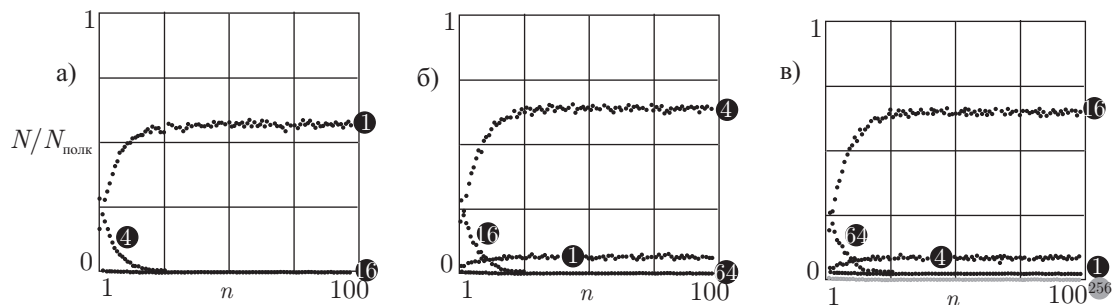


Рис. 11. Индуцированные шумом переходы между элементами квазиаттрактора. Иллюстрация свойства скейлинга на примере стохастического отображения (6.1)

времени —  $n$  периодов цикла ( $n$  меняется от 1 до 100). Затем шум «выключается», и по истечении достаточно большого числа итераций определяется, попала ли точка в исходную «стартовую» окрестность элемента данного цикла (окрестность определена с точностью до 0,001). На фрагменте (а) мы стартуем из точки, принадлежащей циклу периода 4, на фрагменте (б) — из точки, принадлежащей циклу периода 16, на фрагменте (в) — из точки, принадлежащей циклу периода 64 точно в критической точке. Для каждого значения  $n$  вычисляется отношение попавших в исходную окрестность точек  $N$  к общему числу испытаний  $N_{\text{полн}}$ . Интенсивность шума на фрагменте (а) равна 0,06, на последующих фрагментах она уменьшается в  $\mu$  раз и равна соответственно  $0,06/\mu$  на фрагменте (б) и  $0,06/\mu^2$  на фрагменте (в). Из рис. 10 хорошо видно, что скейлинг выполняется — графики зависимости  $N/N_{\text{полн}}(n)$  повторяют свою структуру. Подчеркнем, что представленные иллюстрации существенно опираются на существование критического квазиаттрактора.

Еще одна интересная иллюстрация, дающая представление об устройстве критического квазиаттрактора и его стохастических свойствах, — рис. 11. Шум действует на каждом фрагменте в течение  $nT$  периодов, где  $n$  меняется от 1 до 100,  $T = 16$  (а), 64 (б) и 256 (в). Интенсивность шума на фрагменте (а) равна 0,06, на последующих фрагментах она уменьшается в  $\mu$  раз и равна  $0,06/\mu$  на фрагменте (б) и  $0,06/\mu^2$  на фрагменте (в). Определялось число точек  $N$ , попавших после «выключения» шума и последующего переходного процесса на циклы периода 1, 4, 16, 64 и 256 с точностью до 0,001. Проведено  $N_{\text{полн}} = 5000$  испытаний. Изначально точка стартовала из центра скейлинга с координатами  $(0; -1,316447534)$ . Видно, что кривые повторяют свою форму, что также иллюстрирует свойства скейлинга в системе с критическим квазиаттрактором.

## 8. Заключение

Накопление точек бифуркаций коразмерности два с мультипликаторами  $\mu_1 = +1$  и  $\mu_2 = -1$  может приводить к существованию критических точек на плоскости параметров динамической системы. Такой тип поведения допускает ренормгрупповое описание, которое может быть обобщено на случай систем с внешним шумом. При этом в фазовом пространстве реализуется критический квазиаттрактор — объект с сосуществующими аттракторами «учетверяющегося» периода. Бассейны притяжения аттракторов, представляющих собой «элементы» критического квазиаттрактора, характеризуются свойством скейлинга. Шум может инициировать переходы между аттракторами, причем такие переходы также подчиняются определенным законам скейлинга. Наряду с простейшей модельной системой в виде двумерного отображения, данный тип поведения характерен для ситуаций вынужденной и взаимной синхронизации систем с удвоениями периода.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ-ННИО (04-02-04011) и CRDF (REC-006 Y3-P-06-07).

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. *Теория катастроф*, М.: Наука, 1990, 128 с.
- [2] Арнольд В. И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000, 400 с.
- [3] Kuznetsov Yu. A. *Elements of applied bifurcation theory*, Springer–Verlag, 1998, 593 p.
- [4] Meijer H. G. E. *Codimension 2 bifurcations of iterated maps*, Ph.D. Thesis Utrecht University. Адрес в сети Интернет: <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>.
- [5] Kuznetsov Yu. A., Meijer, H. G. E., van Veen, L. The fold-flip bifurcation, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, vol. 14, pp. 2253–2282.
- [6] Кузнецов С. П. *Динамический хаос*, М.: Физматлит, 2006, 2-ое издание, 356 с.
- [7] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos, *Physica D*, 1997, vol. 109, pp. 91–112.
- [8] Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе, *Изв. вузов. Радиофизика*, 1985, т. 28, № 9, с. 1112–1125.
- [9] Анищенко В. С. *Сложные колебания в простых системах*, М.: Наука, 1990.
- [10] Kuznetsov S. P., Sataev I. R. Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Rössler oscillator, *Physical Review E*, 2001, vol. 64, №4, 046214.
- [11] Кузнецов А. П., Паксютов В. И. Динамика двух неидентичных связанных автоколебательных систем с удвоениями периода на примере осцилляторов Ресслера, *Изв. вузов. ПНД*, 2006, т. 14, № 2, с. 3–15.
- [12] Кузнецов А. П., Седова Ю. В., Сатаев И. Р. Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода, *Изв. вузов. ПНД*, 2004, т. 12, № 5, с. 46–57.
- [13] Кузнецов А. П., Кузнецова А. Ю., Сатаев И. Р. О критическом поведении отображения с бифуркацией Неймарка–Сакера при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада, *Изв. вузов. ПНД*, 2003, т. 11, № 1, с. 12–18.

- [14] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем*, Саратов: Издательство Саратовского университета, 1999.
- [15] Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. К вопросу о структуре квазигиперболической стохастичности в инерционном генераторе, *Изв. вузов. Радиофизика*, 1983, т. 26, № 7, с. 832–842.
- [16] Кузнецов С. П. Критический квазиаттрактор: бесконечное самоподобное множество устойчивых циклов, возникающее при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу, *Письма в ЖТФ*, 1994, т. 20, вып. 10, с. 11–15.
- [17] Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Гибрид удвоенный периода и касательной бифуркации: количественная универсальность и двухпараметрический скейлинг, *Изв. вузов. ПНД*, 1995, т. 3, №4, с. 3–11.
- [18] Kuznetsov S. P., Sataev I. R. Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality, *Physica D*, 1997, vol. 101, p. 249–269.
- [19] Кузнецов А. П., Капустина Ю. В. Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом, *Изв. вузов. ПНД*, 2000, т. 8, №6, с. 78–87.
- [20] Kapustina J. V., Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Mosekilde E. Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in presence of noise, *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 64, №6, 066207.
- [21] Kapustina J. V., Kuznetsov A. P. Scaling in the presence of an external noise in discrete systems with period-doublings, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, 2002, vol. 5, №2, p. 181–187.
- [22] Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnik J. Scaling for external noise at the onset of chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 1981, vol. 46, №14, p. 933–935.
- [23] Shraiman B., Wayne C. E., Martin P. C. Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 1981, vol. 46, №14, p. 935–939.