УДК 531.3

О приведении пары квадратичных по импульсам гамильтонианов к канонической форме и о вещественном частичном разделении переменных для волчка Клебша

В. Г. Марихин, В. В. Соколов

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
Россия 119334, г. Москва, ул. Косыгина 2
E-mails: mvg@itp.ac.ru, sokolov@itp.ac.ru

Получено 23 мая 2008 г.

В случае двух степеней свободы рассматриваются одновременная диагонализация пар квадратичных по импульсам гамильтонианов, коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона, и приведение такой пары к канонической форме. Предложена вещественная схема частичного разделения переменных для волчка Клебша.

Ключевые слова: разделение переменных, волчок Клебша

V. G. Marikhin and V. V. Sokolov

On the Reduction of the Pair of Hamiltonians Quadratic in Momenta to Canonic Form and Real Partial Separation of Variables for the Clebsch Top

We examine simultaneous diagonalization of pairs of commuting Hamiltonians of two degrees of freedom, quadratic in momenta, and their reduction to canonical form. A real partial separation of variables for the Clebsch top is carried out.

Keywords: separation of variables, Clebsch top
Mathematical Subject Classifications: 37N15, 37K20, 14K20

1. Введение

В работе [1] была предложена универсальная схема частичного разделения переменных для пары гамильтонианов, квадратичных по импульсам и коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона. Эта схема основана на явном построении полного решения соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби. В [1] предполагалось, что гамильтонианы не содержат перекрестных по импульсам членов вида p_1p_2, поскольку в предыдущей работе [2] был указан способ устранения членов такого вида с помощью канонического преобразования, линейного по импульсам. Так как данный способ носил формальный характер и вызвал целый ряд вопросов у читателей, в данной заметке мы укажем явную схему приведения произвольной пары коммутирующих гамильтонианов к каноническому виду (см. доказательство теоремы 1).

В качестве примера применения общей схемы мы предъявим полностью вещественную схему частичного разделения переменных для волчка Клебша.

В приложении А приведены результаты работ [1,3], касающиеся явного построения решения уравнения Гамильтона–Якоби для произвольной пары коммутирующих квадратичных гамильтонианов в случае двух степеней свободы. Частичная классификация и гипотетически полный список таких пар содержится в [1, 2].

2. Каноническая форма пары коммутирующих квадратичных гамильтонианов

В работах [2–8] изучалась следующая задача о парах коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам.

Рассмотрим пару гамильтонианов вида

$$H = ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \tag{2.1}$$

$$K = Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F, \tag{2.2}$$

коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Коэффициенты в формулах (2.1), (2.2) — некоторые (локально) аналитические функции переменных q_1, q_2.

Теорема 1. *Любая пара коммутирующих гамильтонианов* (2.1)–(2.2) *может быть сведена с помощью канонического преобразования, линейного по импульсам, к паре вида*

$$H = \frac{U_1 - U_2}{s_1 - s_2}, \qquad K = \frac{s_2\,U_1 - s_1\,U_2}{s_1 - s_2}, \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= S_1(s_1)P_1^2 + \frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_1}}{(s_1 - s_2)}P_2 - \frac{S_1(s_1)Z_{s_1}^2}{4(s_1 - s_2)^2} + V_1(s_1, s_2),\\ U_2 &= S_2(s_2)P_2^2 - \frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_2}}{(s_1 - s_2)}P_1 - \frac{S_2(s_2)Z_{s_2}^2}{4(s_2 - s_1)^2} + V_2(s_1, s_2), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_1(s_1)}\,\partial_{s_1}\left(\sqrt{S_1(s_1)})\frac{Z_{s_1}^2}{s_1 - s_2}\right) + f_1(s_1),\\ V_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_2(s_2)}\,\partial_{s_2}\left(\sqrt{S_2(s_2)})\frac{Z_{s_2}^2}{s_2 - s_1}\right) + f_2(s_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

для некоторых функций $Z(s_1, s_2)$, $S_i(s_i)$ и $f_i(s_i)$. Здесь $\{P_\alpha, s_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Скобка Пуассона $\{H, K\}$ равна 0 *тогда и только тогда, когда*

$$Z_{s_1,s_2} = \frac{Z_{s_1} - Z_{s_2}}{2(s_2 - s_1)} \tag{2.6}$$

и

$$\left(Z_{s_1}\frac{\partial}{\partial s_2} - Z_{s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\right)\left(\frac{V_1 - V_2}{s_1 - s_2}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Доказательство. Введем новые координаты s_1, s_2 так, чтобы квадратичная часть гамильтонианов (2.1), (2.2) стала диагональной. А именно пусть s_1, s_2 являются корнями уравнения

$$\Phi(s, q_1, q_2) = (B - bs)^2 - (A - as)(C - cs) = 0. \tag{2.8}$$

Тогда, как нетрудно проверить, каноническое преобразование

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (s_1, s_2, P_1, P_2) : p_1 = -\left(\frac{\Phi^1_{q_1}}{\Phi^1_{s_1}}P_1 + \frac{\Phi^2_{q_1}}{\Phi^2_{s_2}}P_2\right),\ p_2 = -\left(\frac{\Phi^1_{q_2}}{\Phi^1_{s_1}}P_1 + \frac{\Phi^2_{q_2}}{\Phi^2_{s_2}}P_2\right), \tag{2.9}$$

где $\Phi^i = \Phi(s_i, q_1, q_2)$, преобразует пару (2.1), (2.2) к виду

$$H = \frac{U_1 - U_2}{s_1 - s_2}, \qquad K = \frac{s_2\,U_1 - s_1\,U_2}{s_1 - s_2}.$$

Условие равенства нулю коэффициентов при $P_1^3, P_1^2P_2, P_1P_2^2, P_2^3$ в скобке Пуассона $\{H, K\}$ приводит к следующей форме для U_1, U_2 :

$$U_1 = S_1(s_1)P_1^2 + \tilde{d}P_1 + \tilde{e}P_2 + \tilde{f}, \qquad U_2 = S_2(s_1)P_2^2 + \tilde{D}P_1 + \tilde{E}P_2 + \tilde{F}. \tag{2.10}$$

При этом функции S_i определяются формулой

$$S_i(s_i) = \frac{1}{(\Phi^i_{q_i})^2}((as_i - A)(\Phi^i_{q_1})^2 + 2(bs_i - B)\Phi^i_{q_1}\Phi^i_{q_2} + (cs_i - C)(\Phi^i_{q_2})^2).$$

Легко проверить, что коэффициенты при P_1^2, P_2^2, P_1P_2 в скобке Пуассона $\{H, K\}$ равны нулю, если и только если

$$\tilde{d} = 2S_1(s_1)\frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \qquad \tilde{e} = \frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_1}}{(s_1 - s_2)},$$

$$\tilde{D} = -\frac{\sqrt{S_1(s_1)S_2(s_2)}Z_{s_2}}{(s_1 - s_2)}, \qquad \tilde{E} = 2S_2(s_2)\frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_2},$$

где $Z(s_1, s_2)$, $F(s_1, s_2)$ — некоторые функции и

$$Z_{s_1,s_2} = \frac{Z_{s_1} - Z_{s_2}}{2(s_2 - s_1)}.$$

Применим каноническое преобразование

$$\hat{P}_1 = P_1 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \qquad \hat{P}_2 = P_2 + \frac{\partial F(s_1, s_2)}{\partial s_2}.$$

В результате коэффициенты $\tilde{d}$, $\tilde{E}$ в (2.10) станут равными нулю. При этом условии легко проверить, что если коэффициенты при P_1, P_2 в скобке Пуассона $\{H, K\}$ равны нулю, то U_1, U_2 имеют вид (2.4), (2.5). Наконец, свободный член скобки Пуассона равен нулю тогда и только тогда, когда выполнено уравнение (2.7). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В результате преобразования (2.9) коэффициенты (2.10) оказываются функциями от q_1, q_2, s_1, s_2. При этом в наиболее интересных случаях коэффициенты являются рациональными по q_1 и q_2. Задача исключения переменных q_1, q_2 в силу соотношения (2.8) часто оказывается технически сложной. Для исключения можно использовать понятие результанта. Чтобы вычислить некоторую величину $f(q_1, q_2, s_1, s_2)$ в переменных s_1, s_2, нужно проделать следующее.

Пусть $F = numer(f(q_1, q_2, s_1, s_2) - t)$, т. е. F — числитель соответствующего рационального выражения. Вычислим

$$Eq = R(R(\Phi(s_1, q_1, q_2), F, q_2), R(\Phi(s_1, q_1, q_2), \Phi(s_2, q_1, q_2), q_2), q_1),$$

где $R(a(x), b(x), x) = resultant_x(a, b)$. Решая уравнение $Eq = 0$ относительно t, получаем искомую функцию $\hat{f}(s_1, s_2)$.

3. Разделение переменных для волчка Клебша

Рассмотрим гамильтониан и дополнительный интеграл волчка Клебша

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + \frac{1}{2}(\lambda_1\gamma_1^2 + \lambda_2\gamma_2^2 + \lambda_3\gamma_3^2), \tag{3.1}$$

$$K = (\lambda_1 M_1^2 + \lambda_2 M_2^2 + \lambda_3 M_3^2) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\frac{\gamma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda_2} + \frac{\gamma_3^2}{\lambda_3}), \tag{3.2}$$

где λ_i — произвольные параметры. Функции H и K коммутируют относительно линейных скобок Пуассона алгебры e(3)

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \qquad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \qquad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$

Зафиксируем значения функций Казимира этих скобок:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = a^2, \qquad M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = l.$$

Тогда формулы

$$\begin{gathered}
M_1 = -p_1q_1q_2 + \frac{1}{2}p_2(q_1^2 - q_2^2 - 1) + \frac{l\,q_1}{2a}\frac{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}{(q_1^2 + q_2^2)},\\
M_2 = p_2q_1q_2 + \frac{1}{2}p_1(q_1^2 - q_2^2 + 1) + \frac{l\,q_2}{2a}\frac{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}{(q_1^2 + q_2^2)},\\
M_3 = p_1q_2 - p_2q_1, \qquad \gamma_1 = \frac{2aq_1}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)},\\
\gamma_2 = \frac{2aq_2}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}, \qquad \gamma_3 = \frac{a(q_1^2 + q_2^2 - 1)}{(q_1^2 + q_2^2 + 1)}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

задают вещественные координаты Дарбу (p_1, p_2, q_1, q_2) на симплектическом листе общего положения.

Подставляя (3.3) в (3.1), (3.2), получаем пару вида (2.1), (2.2) с рациональными по q_1, q_2 коэффициентами. Используя результаты главы 2, приведем эту пару к каноническому виду. В результате получим пару коммутирующих гамильтонианов (2.3), (2.4), (2.5), где

$$S_1(x) = S_2(x) = S(x) = -2(x - 2\lambda_1)(x - 2\lambda_2)(x - 2\lambda_3),$$

$$Z(x, y) = i\frac{l}{a}(x + y), \qquad f_1(x) = f_2(x) = f(x) = -\frac{a^2}{4}x^2 + \frac{a^2}{2}x(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Наличие мнимой единицы в выражении для $Z(x,y)$ приводит к необходимости сделать переобозначение

$$i\sqrt{S(x)S(y)} \to \sqrt{-S(x)S(y)}.$$

При этом легко видеть, что все коэффициенты в гамильтониане и дополнительном интеграле являются вещественными при условии, что переменные s_1, s_2 находятся в «правильных» промежутках между корнями многочлена S.

Используя формулу (3.13) (см. приложение А), вычислим соответствующую алгебраическую кривую. Оказывается, что она имеет вид $\Phi(\xi, Y) = 0$, где

$$\Phi(\xi,Y) = l^2 + 16\,(h\xi - k)Y^2 + 4\xi a^2(\xi - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3)Y^2 + 32\,Y^4(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)(\xi-\lambda_3), \quad (3.4)$$

h и k — значения H и K. Эта кривая фактически совпадает с кривой, возникающей из пары Лакса [9] для волчка Клебша. Для наиболее невырожденных пар квадратичных гамильтонианов представление Лакса неизвестно. При нашем подходе кривая определяется независимо от каких-либо пар Лакса.

Формула $\eta = \xi^2 + \dfrac{l^2}{4a^2Y^2}$ определяет кривую (3.4) как накрытие над кубикой

$$\begin{gathered} a^4\eta^2 - a^2\eta\Big(a^2\xi^2 + 2a^2\xi(\lambda_2+\lambda_2+\lambda_3) + 4k - 4h\xi\Big) - 4\xi^2a^2(h\xi - k) + \\ + 2(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)(\xi-\lambda_3)l^2 + 2\xi^3a^4(\lambda_2+\lambda_2+\lambda_3) = 0. \end{gathered} \quad (3.5)$$

Негиперэллиптическая кривая (3.4) имеет род 3 и базис голоморфных дифференциалов

$$\Omega_1 = \frac{\partial\Phi/\partial h}{\partial\Phi/\partial Y}, \qquad \Omega_2 = \frac{\partial\Phi/\partial k}{\partial\Phi/\partial Y}, \qquad \Omega_3 = \frac{Y}{\partial\Phi/\partial Y}.$$

Для линеаризации потока, соответствующего гамильтониану H, необходимо найти обратное преобразование Абеля

$$t = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1}\Omega_1\,d\xi + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_2}\Omega_1\,d\xi + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_3}\Omega_1\,d\xi, \qquad 0 = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1}\Omega_2\,d\xi + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_2}\Omega_2\,d\xi + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_3}\Omega_2\,d\xi \quad (3.6)$$

при учете того факта, что точки $(\xi_1,\eta_1), (\xi_2,\eta_2), (\xi_3,\eta_3)$ лежат на одной прямой

$$\eta = \xi(s_1+s_2) - s_1s_2 \quad (3.7)$$

(здесь $\eta_i = \xi_i^2 + \dfrac{l^2}{4a^2Y_i^2}$). Это означает, что новые динамические переменные эволюционируют на примиане алгебраической кривой (3.4). Авторы благодарны П. Г. Гриневичу, указавшему на этот факт.

Отметим, что функции $\xi_i(s_1,s_2)$, $i = 1,2,3$, являются корнями кубического уравнения, в которое превращается (3.5) после подстановки (3.7). Для произвольной пары коммутирующих квадратичных гамильтонианов левая часть соответствующего кубического уравнения задается формулой (3.13) из приложения А. Подставляя последовательно $\xi = \xi_i$ в (3.13) и исключая из полученных 3-х уравнений переменные s_1, s_2, можно получить алгебраическую связь между ξ_i.

По-видимому (особенно в вещественном случае), решение уравнения Гамильтона–Якоби со связью (см. приложение А) и соответствующее ему разделение переменных типа (3.6) — это лучшее, на что можно рассчитывать для таких моделей, как волчки Манакова и Клебша [11–13] или гиростат Ковалевской [14, 15], где род соответствующей алгебраической кривой больше, чем число степеней свободы.

Благодарности. Авторы благодарны А.В. Борисову, И.С. Мамаеву, F. Magri и М.А. Семенову-Тян-Шанскому за внимание к работе. В.С. благодарен университету г. Дижона за гостеприимство. Исследования были частично поддержаны грантом РФФИ 08-01-00453-а, а также грантом НШ-3472.2008.2.

Приложение. Универсальная формула для решения уравнения Гамильтона–Якоби

Пусть H и K имеют вид (2.3)–(2.5). Рассмотрим систему $H = h$, $K = k$, где h, k — произвольные постоянные. Пусть $p_1 = F_1(x, y)$, $p_2 = F_2(x, y)$ — ее решение. Здесь и далее мы используем обозначения x и y вместо q_1 и q_2. Из известной леммы Якоби следует, что если $\{H, K\} = 0$, то $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$. Чтобы найти функцию действия $\mathsf{S}(x, y, h, k)$, достаточно в явном виде решить совместную систему

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{S} = F_1, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{S} = F_2.$$

Перепишем формулы $H = h$, $K = k$ в виде

$$p_1^2 + ap_2 + b = 0, \qquad p_2^2 + Ap_1 + B = 0, \tag{3.8}$$

где

$$a = \frac{Z_x}{x-y}\sqrt{\frac{S_2(y)}{S_1(x)}}, \qquad A = -\frac{Z_y}{x-y}\sqrt{\frac{S_1(x)}{S_2(y)}},$$

$$b = -\frac{Z_x^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_1 - hx + k}{S_1(x)}, \qquad B = -\frac{Z_y^2}{4(x-y)^2} + \frac{V_2 - hy + k}{S_2(y)}.$$

Легко проверить, что

$$2b_y + Aa_x + 2aA_x = 0, \quad 2Aa_y + aA_y + 2B_x = 0. \tag{3.9}$$

Используя уравнения (2.6) и (2.7), нетрудно получить также следующее тождество:

$$Ab_x - aB_y + 2A_xb - 2a_yB = 0. \tag{3.10}$$

С помощью стандартной техники резольвент Лагранжа (см., например, [10]) сведем систему (3.8), эквивалентную алгебраическому уравнению степени 4, к системе

$$uv = \frac{1}{4}aA, \tag{3.11}$$

$$Au^3 + 4\frac{b}{a}u^2v - 4\frac{B}{A}uv^2 - av^3 = 0, \tag{3.12}$$

которая эквивалентна кубическому уравнению относительно u^2. А именно пусть (u_k, v_k), $k = 1, 2, 3$, — решения системы (3.11), (3.12) такие, что

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = -b, \qquad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = -B,$$

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{8}a^2 A, \qquad v_1 v_2 v_3 = -\frac{1}{8}A^2 a.$$

Тогда формулы

$$\begin{array}{ll} p_1 = u_1 + u_2 + u_3, & p_2 = v_1 + v_2 + v_3; \\ p_1 = u_3 - u_1 - u_2, & p_2 = v_3 - v_1 - v_2; \\ p_1 = u_2 - u_1 - u_3, & p_2 = v_2 - v_1 - v_3; \\ p_1 = u_1 - u_2 - u_3, & p_2 = v_1 - v_2 - v_3 \end{array}$$

определяют четыре решения (3.8). Для определенности будем рассматривать первое из них.

Лемма 1. *Для* $i = 1, 2, 3$ *выполнены соотношения* $\dfrac{\partial u_i}{\partial y} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x}$.

Доказательство. Дифференцируя уравнения (3.11) и (3.12) по x и y, находим u_y и v_x как функции от u и v. Тогда, выражая v через u, получаем, что условие $u_y = v_x$ эквивалентно выполнению тождеств (3.9) и (3.10). ■

Лемма 1 означает, что в переменных u_1, u_2, u_3 происходит «частичное» разделение переменных. А именно $\mathsf{S} = \mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_2 + \mathsf{S}_3$, где S — искомая функция действия, а функции S_i определяются из системы

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{S}_i = u_i, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{S}_i = v_i.$$

Положим

$$u = \frac{1}{2}\frac{Z_x}{x-y}\sqrt{\frac{y-\xi}{x-\xi}}, \qquad v = -\frac{1}{2}\frac{Z_y}{x-y}\sqrt{\frac{x-\xi}{y-\xi}}\,.$$

Легко видеть, что пара (u, v) для любого ξ удовлетворяет соотношению (3.11). Кроме того, нетрудно проверить, что если Z удовлетворяет (2.6), то $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Пользуясь этим фактом, введем функцию $\sigma(x, y, \xi)$ такую, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = v.$$

Ясно, что функция σ определена однозначно с точностью до прибавления произвольной функции от переменной ξ. Для волчка Клебша

$$\sigma(x, y, \xi) = \frac{l}{a} arctan\sqrt{\frac{x-\xi}{\xi-y}}.$$

Во всех других известных примерах соответствующая функция Z в худшем случае выражается через квадратичные радикалы и σ всегда находится явно без каких-либо проблем. Положим $Y = \dfrac{\partial \sigma}{\partial \xi}$.

После умножения соотношения (3.12) на множитель

$$-2\frac{\sqrt{S_1(x)}\sqrt{S_2(y)}\sqrt{x-\xi}\sqrt{y-\xi}\,(x-y)}{Z_x Z_y}$$

левая часть (3.12) может быть записана в виде

$$-k + h\xi + \frac{y-\xi}{x-y}\left(V_1 - \frac{S_1(x)Z_x^2}{4(x-\xi)(x-y)}\right) - \frac{x-\xi}{x-y}\left(V_2 + \frac{S_2(y)Z_y^2}{4(y-\xi)(x-y)}\right). \tag{3.13}$$

Предложение 1. *Пусть выполнены соотношения* (2.6), (2.7). *Тогда выражение* (3.13) *является функцией переменных Y и ξ.*

Доказательство. Обозначим функцию (3.13) через $\Psi(x, y, \xi)$. Рассмотрим якобиан

$$J = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Заменяя $\dfrac{\partial Y}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ на $\dfrac{\partial v}{\partial \xi}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ соответственно, нетрудно непосредственно проверить, что J тождественно равен нулю в силу соотношений (2.6), (2.7). ■

Согласно предложению 1, соотношение $\Psi(x, y, \xi) = 0$ может быть записано в виде $\Phi(\xi, Y) = 0$. Для практического нахождения функции Φ полезно положить $y = x$. После этого выражение $Y(x, y, \xi)$ значительно упрощается и функция $\Psi(x, x, \xi)$ легко выражается через ξ и $Y(x, x, \xi)$.

Уравнение $\Phi(\xi, Y) = 0$ задает кривую, в терминах дифференциалов на которой выражается функция действия S.

Обозначим через $\xi_k(x, y)$, где $k = 1, 2, 3$, корни кубического уравнения $\Psi(x, y, \xi) = 0$.

Теорема 2. *Функция действия* S *имеет вид*

$$\mathsf{S}(x, y) = \sum_{k=1}^{3}\Big(\sigma(x, y, \xi_k) - \int^{\xi_k} Y(\xi)\, d\xi\Big), \tag{3.14}$$

где $Y(\xi)$ — функция на кривой $\Phi(\xi, Y) = 0$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{S}(x, y) = \sum_{k=1}^{3}\sigma_x(x, y, \xi_k) + \sum_{k=1}^{3}\{\,\sigma_\xi(x, y, \xi_k) - Y(\xi_k)\}\xi_{k,x} = \sum_{k=1}^{3} u_k = p_1.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathsf{S}(x, y) = p_2.$$

■

Как обычно, формулы типа (3.6) получаются дифференцированием функции действия по параметрам h, k. Однако поскольку у нас есть не две, а три функции $\xi_i(s_1, s_2)$, между ними имеется алгебраическая связь. Алгебро-геометрическая интерпретация этой связи и получение общего решения в терминах θ-функций рода $\leqslant 4$ в духе работы [14] является технической задачей, которая может быть решена для любой пары гамильтонианов (2.3)–(2.5).

Список литературы

[1] Марихин, В.Г., Соколов В.В., Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам, *ТМФ*, 2009, vol. 149, no. 2, pp. 147–160.

[2] Марихин, В.Г., Соколов, В.В., О квазиштеккелевых гамильтонианах, *УМН*, 2005, vol. 60, no. 5, pp. 175–176.

[3] Marikhin, V.G., Sokolov, V.V., Separation of variables on a non-hyperelliptic curve, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 59–70.

[4] Dorizzi, B., Grammaticos, B., Ramani, A., Winternitz, P., Integrable Hamiltonian systems with velocity dependent potentials, *J. Math. Phys.*, 1985, vol. 26, pp. 3070–3079.

[5] Ferapontov, E.V., Fordy, A.P., Nonhomogeneous systems of hydrodynamic type related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term, *Physica D*, 1997, vol. 108, pp. 350–364.

[6] Ferapontov, E.V. and Fordy, A.P., Commuting quadratic Hamiltonians with velocity-dependent potentials, *Rep. Math. Phys.*, 1999, vol. 44, pp. 71–80.

[7] McSween, E. and Winternitz, P., Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields, *J. Math. Phys.*, 2000, vol. 41, pp. 2957–2967.

[8] Yehia, H.M., Generalized natural mechanical systems of two degrees of freedom with quadratic integrals, *J. Phys. A*, 1992, vol. 25, pp. 197–221.

[9] Perelomov, A.I., Some remarks on the integrability of the equation of motion of a rigid body in an ideal liquid, *Funct. Anal. Pril.*, 1981, vol. 15, pp. 83–85.

[10] Прасолов, В.В., Соловьев, Ю.П., *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*, Изд-во «Факториал», 1997. стр.

[11] Schottky, F. Uber das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen, *Sitzungsberichte drer Königligh preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin*, 1891, **XIII**, pp. 227–232.

[12] Manakov, S.V., A remark on integration of the Euler equations for n-dimensional rigid body dynamics, *Funct. Anal. Appl.*, 1976, vol. 10, no. 4, pp. 93–94.

[13] Clebsch, A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, *Math. Annalen*, 1870, vol. 3, pp. 238–262.

[14] Bobenko, A.I., Reyman, A.G. and Semenov-Tian-Shansky, M.A., The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions, *Commun. Math. Phys.*, 1989, vol. 122, 321.

[15] Komarov, I.V., Tsiganov, A.V., On integration of the Kowalevski gyrostat problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 169–187.