

Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре

С. П. Кузнецов

Институт радиотехники и электроники РАН
им. В. А. Котельникова,
Саратовский филиал, 410019, г. Саратов, ул. Зеленая, 38
spkuz@rambler.ru

Получено 14 октября 2008 г.

Предложена неавтономная потоковая система с гиперболическим аттрактором, которая может послужить основой для последующей разработки реальных систем и устройств, демонстрирующих структурно устойчивую хаотическую динамику. Отправной точкой является отображение сферы в себя, построенное в виде четырех последовательно выполняемых геометрически наглядных непрерывных преобразований. Проведено численное исследование этого отображения и показано, что в определенной области параметров оно имеет аттрактор типа Плыкина. С учетом присущего этому аттрактору свойства структурной устойчивости предпринята модификация модели. Проведена также замена переменных с переходом к представлению мгновенных состояний точками на плоскости. В результате получена в явном виде система двух неавтономных дифференциальных уравнений первого порядка с гладкой зависимостью коэффициентов от динамических переменных и времени, которая в сечении Пуанкаре имеет аттрактор типа Плыкина на плоскости. Представлены результаты численного исследования отображения сферы и потоковой системы, в том числе портреты аттракторов, показатели Ляпунова, оценки размерности. Обоснование гиперболической природы аттрактора для отображения сферы и системы с непрерывным временем опирается на компьютерную процедуру проверки так называемого критерия конусов, с привлечением ряда методических приемов, которые могут быть полезны при проверке гиперболичности аттракторов также и в других системах.

Ключевые слова: гиперболический хаос, аттрактор Плыкина, показатель Ляпунова, структурная устойчивость

S. P. Kuznetsov

An example of a non-autonomous continuous-time system with attractor of Plykin type in the Poincaré map

A non-autonomous flow system is introduced, which may serve as a base for elaboration of real systems and devices demonstrating the structurally stable chaotic dynamics. The starting point is the map of the sphere composed of four stages of sequential continuous geometrically evident transformations. The computations indicate that in a certain parameter range the map possesses an attractor of Plykin type. Accounting the structural stability intrinsic to this attractor, a modification of the model is undertaken, which includes a variable change with passage to representation of instantaneous states on the plane. As a result, a set of two non-autonomous differential equations of the first order with smooth coefficients is obtained explicitly, which has the Plykin type attractor in the plane in the Poincaré cross-section. Results of computations are presented for the sphere map and for the flow system including portraits of attractors, Lyapunov exponents, dimension estimates. Substantiation of the hyperbolic nature of the attractors for the sphere map and for the flow system is based on a computer procedure of verification of the so-called cone criterion; in this context, some hints are applied, which may be useful in similar computations for some other systems.

Keywords: hyperbolic chaos, Plykin attractor, Lyapunov exponent, structural stability

Mathematical Subject Classifications: 37D45

1. Введение

В математической теории динамических систем вводится в рассмотрение класс *однородно гиперболических хаотических аттракторов* [1–11]. В таком аттракторе все траектории седловые, обладают устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, у которых размерности не отличаются для разных точек на аттракторе, и эти устойчивые и неустойчивые многообразия не имеют касаний между собой. Динамика на странном гиперболическом аттракторе демонстрирует сильные хаотические свойства и допускает подробный математический анализ. Такие аттракторы обладают свойством грубости, или структурной устойчивости, которое заключается в нечувствительности устройства аттрактора по отношению к вариациям функций и параметров в определяющих уравнениях. Основные положения соответствующей математической теории были сформулированы около 40 лет назад, однако до последнего времени однородно гиперболические аттракторы рассматривались лишь как рафинированный образ хаоса, а для реальных систем, демонстрирующих сложную динамику, считались нехарактерными. В учебниках и монографиях в качестве примеров однородно гиперболических аттракторов традиционно фигурируют искусственные математические конструкции, такие, как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла–Вильямса. Эти примеры относятся к системам с дискретным временем — итерируемым отображениям. Аттрактор Смейла–Вильямса получается при отображении тороидальной области в себя в фазовом пространстве с размерностью 3 или более. Аттрактор Плыкина [12] имеет место в некотором специальном отображении на сфере с четырьмя дырками, либо в ограниченной области на плоскости с тремя дырками (рис. 1а). Как сейчас известно, в ограниченной двумерной области с тремя и более дырками можно сконструировать множество различных, отличающихся друг от друга по топологической структуре, гиперболических аттракторов, о которых говорят как об аттракторах типа Плыкина. Одну из модификаций, представляющую специальный интерес в контексте настоящей работы, будем обозначать как аттрактор Плыкина–Ньюхауса (рис. 1б) [13, 6].

В прикладных дисциплинах, физике и технике чаще приходится иметь дело с системами, функционирующими в непрерывном времени.

Переход от отображения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ к системе с непрерывным временем, или потоку, математики называют *надстройкой* (suspension) [2–9]. Такой переход возможен, если отображение обратимое.

Для построения неавтономной системы, в которой трансформация вектора состояния \mathbf{x} за определенный период давалась бы отображением $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, к набору переменных \mathbf{x} добавляем еще одну переменную, время t . Тем самым вводится расширенное фазовое пространство $\{\mathbf{x}, t\}$. Далее, нужно определить векторное поле \mathbf{v} , зависящее от \mathbf{x} и t так, чтобы за время $\Delta t = T$ состояние, эволюционирующее согласно дифференциальному уравнению $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, изменялось соответственно отображению $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$. (За пределами интервала T векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ считается периодически продолженной функцией времени.) Полученная система с непрерывным временем отвечает надстройке отображения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, которое является для нее отображением последования; также его называют стробоскопическим отображением или отображением Пуанкаре.

Недавно предложена и реализована в эксперименте система на основе двух связанных неавтономных осцилляторов, в которой аттрактор в отображении Пуанкаре представляет собой соленоид Смейла–Вильямса [14, 15]. Гиперболическая природа аттрактора подтверждена проверкой на компьютере известного из математической литературы критерия [16, 17]. Другие варианты систем на основе связанных осцилляторов, демонстрирующих различные феномены сложной динамики, обсуждаются в [18–20].

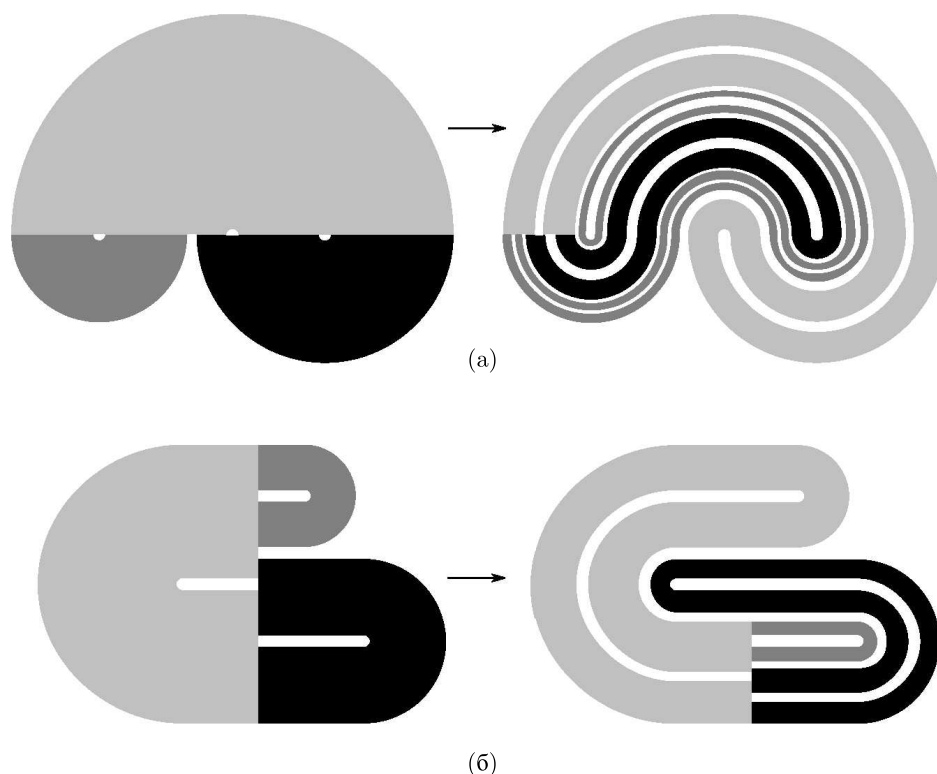


Рис. 1. Иллюстрация действия отображения с аттрактором, введенным в изначальной работе Плыкина (а), и вариант отображения с аттрактором Плыкина–Ньюхауса (б). Каждому из этих определенных на плоскости отображений можно сопоставить отображение на сфере; соответствующий переход достигается, например, использованием стереографической проекции

Для аттракторов типа Плыкина конкретных физически реализуемых примеров до сих пор представлено не было, хотя известны работы, где аргументируется возможность присутствия такого аттрактора в отображении Пуанкаре модифицированной системы Лоренца [21] и автономной трехмерной системы дифференциальных уравнений, описывающих модель нейрона [22]. С другой стороны, сконструированный искусственно пример неавтономной системы с непрерывным временем и аттрактором Плыкина–Ньюхауса рассмотрен в диссертации Ханта [23]. Модель Ханта задается выражениями, различающимися в зависимости от рассматриваемой области фазового пространства, и содержит множество специально введенных сглаживающих функций. Довольно трудно себе представить, чтобы ее можно было воспроизвести как реальное физическое устройство.

Настоящая работа имеет целью построение неавтономной потоковой системы с аттрактором Плыкина–Ньюхауса в отображении Пуанкаре, которая бы описывалась достаточно простыми уравнениями и могла послужить основой для последующей разработки реальных систем и устройств, демонстрирующих структурно устойчивую хаотическую динамику.

В разделе 2 вводится отображение сферы в себя, определенное как последовательность четырех стадий, каждая из которых имеет содержанием простые геометрически наглядные преобразования. Эти преобразования можно мыслить как выполняемые в непрерывном времени, так что одновременно строится потоковая система на сфере. Проводится численное исследование этого отображения, свидетельствующее, что в определенной области па-

раметров оно демонстрирует хаотическую динамику и имеет гиперболический аттрактор, который по топологическому типу идентифицируется как аттрактор Плыкина–Ньюхауса. С учетом присущего такому аттрактору свойства структурной устойчивости, в разделе 3 предпринята модификация модели — вместо описания эволюции в виде последовательных стадий вводится система дифференциальных уравнений, характеризуемых гладкой зависимостью коэффициентов от времени. Заменой переменных с переходом к представлению мгновенных состояний точками на плоскости получена в явном виде система двух неавтономных уравнений первого порядка, которая в сечении Пуанкаре имеет аттрактор Плыкина–Ньюхауса на плоскости. Представлены результаты численного исследования этой системы, в том числе портреты аттракторов, показатели Ляпунова, оценки размерности, конфигурация устойчивых и неустойчивых многообразий в сечении Пуанкаре в области на плоскости, содержащей аттрактор. Для обоснования гиперболической природы аттрактора привлекается компьютерная процедура проверки достаточных условий гиперболичности, определяющихся взаимным расположением конусов растягивающихся и сжимающихся векторов малых возмущений мгновенного состояния системы в точках на аттракторе. Некоторые детали этой процедуры в контексте конкретной рассматриваемой задачи изложены в Приложении. При этом выработан ряд новых методических приемов, которые могут быть полезными при проверке свойства гиперболичности аттракторов также и в других системах.

2. Модель, заданная последовательностью преобразований на сфере

2.1. Качественное описание

На рис. 2 показана сфера единичного радиуса, точки которой будут представлять мгновенные состояния конструируемой системы. Точку на сфере можно задать в угловых координатах (θ, φ) или в прямоугольных координатах

$$x = \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \cos \theta, \quad (1)$$

подчиняющихся условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Прямоугольные координаты характеризуются присутствием избыточной третьей переменной, но зато при их использовании не возникает особенностей при рассмотрении окрестностей северного и южного полюсов на сфере N и S.

Как доказано Плыкиным, отображение сферы в себя может иметь гиперболический аттрактор при наличии не менее четырех дырок — односвязных областей, не посещаемых принадлежащими аттрактору траекториями. В нашей конструкции эту роль будут играть окрестности четырех точек A, B, C, D с координатами $(x, y, z) = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2})$.

Рассмотрим последовательность четырех выполняемых одно за другим непрерывных преобразований:

- **сток по параллели** — смещение изображающих точек вдоль параллелей от меридианов NABS и NDCS к равноудаленной от них меридиональной окружности;
- **дифференциальное вращение вокруг оси z** с угловой скоростью, линейно зависящей от z, так что изображающие точки на параллели, проходящей через B и C, остаются неподвижными, а на параллели, проходящей через A и D, совершают поворот на 180° ;

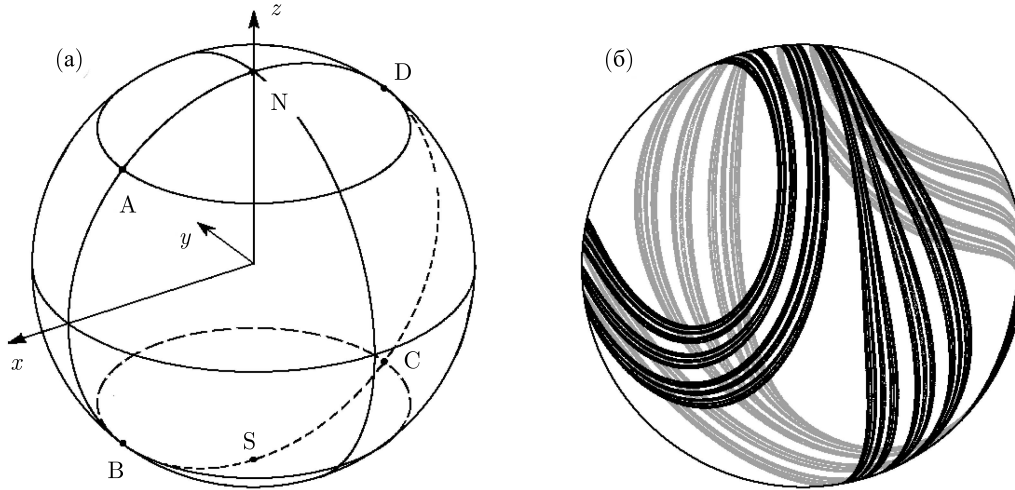


Рис. 2. Единичная сфера, точки которой отвечают мгновенным состояниям конструируемой системы (а) и аттрактор отображения (8), (9) при $\varepsilon = 1$ (б). На диаграмме (а) показаны оси прямоугольных координат x, y, z и отмечены точки А, В, С, D, окрестности которых отвечают дыркам — областям, не посещаемым траекториями на аттракторе

- **сток к экватору** — смещение изображающих точек по окружностям с центрами на оси x на сфере от большого круга ABCD к экватору;
- **дифференциальное вращение вокруг оси x** с угловой скоростью, линейно зависящей от x , так что в плоскости, ортогональной оси x и проходящей через точку С, изображающие точки неподвижны, а в сечении, содержащем точку В, претерпевают поворот на 180° .

Процедура симметрична в том смысле, что стадии (I)–(II) в точности аналогичны стадиям (III)–(IV) с обменом ролями между осями x и z .

Интуитивно представляется правдоподобным, что такая последовательность преобразований породит поток, формирующий вытянутые филаменты с тонкой поперечной структурой, присутствие которых характерно для аттракторов типа Плыкина.

2.2. Формулировка уравнений

Пусть протяженность каждой стадии составляет единичный интервал времени.

На **первой стадии** потребуем, чтобы мгновенная угловая скорость изображающей точки на сфере была пропорциональна $\sin 2\varphi$. Простейшая форма дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, которая это обеспечивает, такова:

$$\dot{x} = -\varepsilon xy^2, \quad \dot{y} = \varepsilon x^2 y, \quad \dot{z} = 0. \tag{2}$$

На **второй стадии** полагаем

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \quad \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \quad \dot{z} = 0. \tag{3}$$

Уравнения на **третьей стадии** получаем из формул (2) заменой z на x и x на z , что дает

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \varepsilon y z^2, \quad \dot{z} = -\varepsilon y^2 z, \tag{4}$$

а на **четвертой** той же заменой из формул (3):

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \quad \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y. \quad (5)$$

Заметим, что на каждой стадии сохраняется постоянной сумма квадратов $x^2 + y^2 + z^2$, которую предполагаем равной 1.

Можно принять такую интерпретацию, что мгновенная скорость изображающей точки на сфере определяется воздействием двух включаемых по очереди векторных полей изменяющейся во времени ориентации, одно из которых отвечает за динамику на стадиях стока, а другое на стадиях дифференциального вращения. Введем углы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, задающие направления этих полей, и коэффициенты p и q , отвечающие за их включение и выключение:

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \frac{\pi}{4}(-1)^{[t/2]} - \frac{\pi}{4}, \quad (6)$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{[t]}, \quad q = \frac{1}{2}(-1)^{[t/2]} - \frac{1}{2}(-1)^{[t/2+1/2]},$$

причем квадратные скобки означают операцию взятия целой части числа¹. Тогда уравнения (2)–(5) можно компактно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -p\epsilon y^2(x \cos \bar{\alpha} + z \sin \bar{\alpha}) \cos \bar{\alpha} + qKy(-x \sin \bar{\beta} + z \cos \bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}}) \cos \bar{\beta}, \\ \dot{y} &= p\epsilon y(x \cos \bar{\alpha} + z \sin \bar{\alpha})^2 - qK(x \cos \bar{\beta} + z \sin \bar{\beta})(-x \sin \bar{\beta} + z \cos \bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}}), \\ \dot{z} &= -p\epsilon y^2(x \cos \bar{\alpha} + z \sin \bar{\alpha}) \sin \bar{\alpha} + qKy(-x \sin \bar{\beta} + z \cos \bar{\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}}) \sin \bar{\beta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $K = \pi/\sqrt{2}$.

2.3. Отображение сферы и его численное исследование

Построим отображение Пуанкаре, описывающее трансформацию состояния системы за период $T = 4$. Пусть при $t = 0$ начальные условия отвечают вектору состояния $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$. Решая уравнения (2) на интервале от 0 до 1 и уравнения (3) на интервале от 1 до 2, получаем значения переменных, относящиеся к моменту $T/2$:

$$x_{n+1/2} = \frac{\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \left(x_n e^{-\epsilon(x_n^2 + y_n^2)/2} \cos \frac{\pi}{2}(z_n \sqrt{2} + 1) + y_n e^{\epsilon(x_n^2 + y_n^2)/2} \sin \frac{\pi}{2}(z_n \sqrt{2} + 1) \right)}{\sqrt{x_n^2 e^{-\epsilon(x_n^2 + y_n^2)} + y_n^2 e^{\epsilon(x_n^2 + y_n^2)}}}, \quad (8)$$

$$y_{n+1/2} = \frac{\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \left(-x_n e^{-\epsilon(x_n^2 + y_n^2)/2} \sin \frac{\pi}{2}(z_n \sqrt{2} + 1) + y_n e^{\epsilon(x_n^2 + y_n^2)/2} \cos \frac{\pi}{2}(z_n \sqrt{2} + 1) \right)}{\sqrt{x_n^2 e^{-\epsilon(x_n^2 + y_n^2)} + y_n^2 e^{\epsilon(x_n^2 + y_n^2)}}},$$

и $z_{n+1/2} = z_n$. Затем находим решение уравнения (4) на интервале от 2 до 3 с начальными условиями $(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}, z_n)$, и, далее, решение уравнения (5) на интервале от 3 до 4. В результате получаем компоненты нового вектора состояния $\mathbf{x}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$,

¹Согласно (16), углы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ определены как совпадающие в каждый момент времени, но мы сохраняем для них отдельные обозначения, имея в виду модификацию системы в следующем разделе.



выражающиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n+1/2}, \\ y_{n+1} &= \frac{\sqrt{y_{n+1/2}^2 + z_n^2} \left(y_{n+1/2} e^{\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)/2} \cos \frac{\pi}{2} (x_{n+1/2} \sqrt{2} + 1) - z_n e^{-\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)/2} \sin \frac{\pi}{2} (x_{n+1/2} \sqrt{2} + 1) \right)}{\sqrt{y_{n+1/2}^2 e^{\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)} + z_n^2 e^{-\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)}}}, \\ z_{n+1} &= \frac{\sqrt{y_{n+1/2}^2 + z_n^2} \left(y_{n+1/2} e^{\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)/2} \sin \frac{\pi}{2} (x_{n+1/2} \sqrt{2} + 1) + z_n e^{-\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)/2} \cos \frac{\pi}{2} (x_{n+1/2} \sqrt{2} + 1) \right)}{\sqrt{y_{n+1/2}^2 e^{\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)} + z_n^2 e^{-\varepsilon(y_{n+1/2}^2 + z_n^2)}}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) задают отображение сферы в себя $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}_S(\mathbf{x}_n)$. Заметим, что точка C служит неустойчивой неподвижной точкой отображения \mathbf{T}_S , а точки A, B, D образуют неустойчивый цикл периода 3: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$. Отображение \mathbf{T}_S обратимо: возврат к начальному состоянию реализуется посредством тех же стадий в инвертированном порядке и с противоположными направлениями вращения.

На рис. 1б показан аттрактор отображения \mathbf{T}_S при $\varepsilon = 1$. Представлен набор точек на сфере, принадлежащих траектории на аттракторе, в достаточно большом количестве (несколько десятков тысяч). Отметим наличие характерной поперечной фрактальной структуры аттрактора. Хорошо видны несколько первых уровней этой структуры — объект как бы составлен из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня, и так далее.

Зависимость двух показателей Ляпунова отображения \mathbf{T}_S от параметра ε показана на рис. 3. Процедура вычислений состоит в совместных итерациях отображения (8), (9) и двух комплектов соответствующих уравнений в вариациях. На каждом шаге производится ортогонализация векторов возмущения к радиус-вектору (x, y, z) и друг к другу и их нормировка на фиксированную константу. Показатели Ляпунова получаются как угловые коэффициенты прямых, аппроксимирующих зависимость накапливающихся сумм логарифмов отношения норм для векторов возмущения от количества итераций [24, 25].

В области $\varepsilon < \varepsilon_c \approx 2.03$ один из двух показателей Ляпунова положительный, что говорит о наличии хаоса, а второй отрицательный. При $\varepsilon > \varepsilon_c$, т. е. при сильной диссипации, обеспечиваемой стадиями стока, хаос пропадает. Отметим плавную зависимость положительного показателя Ляпунова от параметра, на графике которой нет провалов, характерных для многих систем с негиперболическими аттракторами. На рисунке показан также график для размерности аттрактора, рассчитанной по формуле Каплана–Йорке, которая в данном случае имеет вид $D_L = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2|$. Видно, что в области хаоса с ростом параметра ε размерность плавно убывает от 2, что соответствует исчезающе малой диссипации, примерно до 1. В частности, при $\varepsilon = 1$ значения показателей Ляпунова $\Lambda_1 = 0.9575 \pm 0.0002$, $\Lambda_2 = -1.2520 \pm 0.0002$, а размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке $D_L \approx 1.765$.

2.4. Критерий конусов: проверка гиперболичности аттрактора

Покажем, что для рассматриваемого отображения в области хаоса (по крайней мере, в некоторой ее части) реализуется однородно гиперболический аттрактор.

Из математической литературы известен *критерий конусов*, который состоит в следующем [1–9, 26, 23, 27]. Пусть динамика в дискретном времени на многообразии M задана гладким отображением $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$. Критерий требует, чтобы для каждой точки \mathbf{x} на аттракторе $A \subset M$ в пространстве векторов малых возмущений (касательном пространстве)

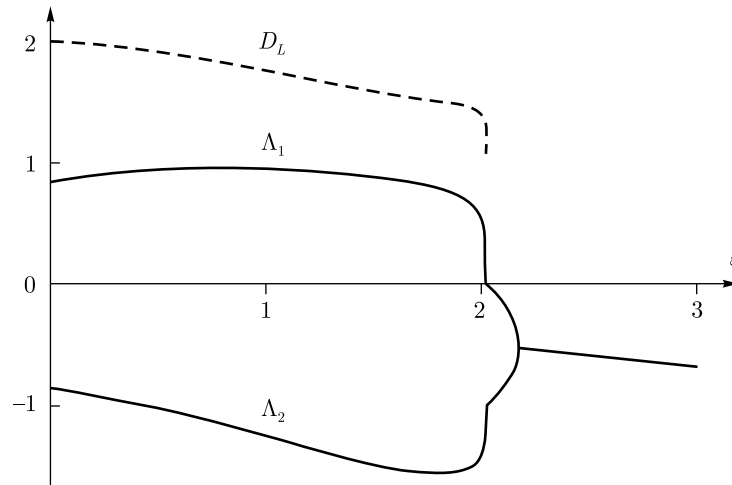


Рис. 3. Зависимость показателей Ляпунова (сплошные линии) и ляпуновской размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке (пунктир) от параметра ε для отображения сферы (8), (9). Область гиперболического хаоса согласно результатам проверки критерия конусов приблизительно $0.35 < \varepsilon < 2$. При $\varepsilon > \varepsilon_c \approx 2.023$ хаоса нет, и динамика становится периодической

при некотором выборе константы $\gamma > 1$ можно было определить расширяющийся и сжимающийся конусы $S_{\mathbf{x}}^{\gamma}$ и $C_{\mathbf{x}}^{\gamma}$. $S_{\mathbf{x}}^{\gamma}$ есть множество векторов инфинитезимальных возмущений, норма которых в результате применения отображения $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ увеличивается в γ и более раз. $C_{\mathbf{x}}^{\gamma}$ есть множество векторов, норма которых увеличивается в γ и более раз при действии обратного отображения $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$. Конусы $S_{\mathbf{x}}^{\gamma}$ и $C_{\mathbf{x}}^{\gamma}$ должны быть инвариантны в том смысле, что для всех $\mathbf{x} \in A$ образ расширяющегося конуса $S_{\mathbf{x}}^{\gamma}$ расположен внутри расширяющегося конуса $S_{\bar{\mathbf{x}}}^{\gamma}$, определенного для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса $C_{\mathbf{x}}^{\gamma}$, внутри сжимающегося конуса $C_{\tilde{\mathbf{x}}}^{\gamma}$ для точки-прообраза.

Некоторые подробности вычислительной процедуры, обеспечивающей проверку на компьютере критерия конусов в контексте рассматриваемой здесь задачи, приводятся в Приложении. Расчеты могут быть организованы либо на основе сканирования предварительно найденной поглощающей области, содержащей аттрактор, либо как проверка соответствующих условий непосредственно в точках на аттракторе, получаемых многократными итерациями отображения $\mathbf{T}(\mathbf{x})$.

В интересующем нас здесь случае многообразие M представляет собой двумерную сферу S^2 , а пространство векторов возмущения в точке \mathbf{x} можно мыслить как множество векторов касательных к сфере в этой точке.

В качестве $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ используем отображение, отвечающее n -кратному применению построенного отображения сферы $\mathbf{T}_S^n(\mathbf{x})$, где n — целое число, подбираемое в процессе вычислений. Матрицы производных находятся аналитически дифференцированием выражений (8), (9) с привлечением цепного правила для производных сложной функции.

На рис. 4 представлены в графическом виде результаты компьютерной проверки критерия конусов для $\mathbf{T}_S^3(\mathbf{x})$ при $\varepsilon = 1$ и $\gamma^2 = 2$. Показаны карты северного полушария сферы в полярной азимутальной проекции. Карты южного полушария, благодаря присущей системе симметрии, выглядят аналогично и получаются зеркальным отражением $x \rightarrow -x$. На сетке, покрывающей сферу с достаточно мелким шагом, проводились расчеты, в ходе которых проверялись условия существования расширяющихся и сжимающихся конусов с

фактором γ и неравенства, обеспечивающие надлежащее их вложение. Черный цвет на карте отвечает областям, где нарушено хотя бы одно из проверяемых условий. Остальную часть сферы обозначим как область D_γ . Она показана серым цветом, и в ней справедливы условия для расширяющихся и сжимающихся конусов. Расчеты показывают, что область D_γ является поглощающей. В самом деле, образ этой области, представленный темно-серым оттенком, полностью в ней содержится, т.е. $\mathbf{T}_S(D_\gamma) \subset \text{Int } D_\gamma$: на диаграмме (а) темно-серая и черная области разделены хорошо заметным светло-серым ободком. Итак, можно заключить, что критерий конусов выполняется в области D_γ . Аттрактор целиком в ней располагается (см. диаграмму (б)), так что он однородно гиперболический и, следовательно, структурно устойчивый.

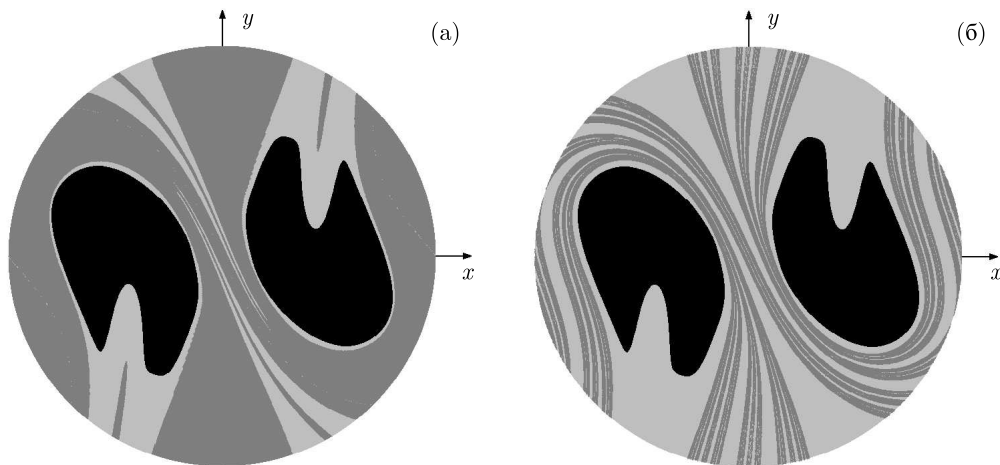


Рис. 4. Карты северного полушария сферы в полярной азимутальной проекции, иллюстрирующие результаты проверки критерия гиперболичности с константой $\gamma^2 = 2$ для отображения $\mathbf{T}_S^3(\mathbf{x})$ при $\varepsilon = 1$. Серый цвет отвечает области выполнения условий существования и правильного вложения конусов D_γ , а черный — их нарушению. Темно-серым цветом на диаграмме (а) показан образ области D_γ под действием отображения \mathbf{T} , а на диаграмме (б) — портрет аттрактора, который, как можно видеть, расположен полностью в области D_γ . Карты южного полушария выглядят аналогично и получаются зеркальным отражением $x \rightarrow -x$

2.5. Представление мгновенных состояний на плоскости и идентификация типа аттрактора

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы мгновенные состояния системы представлялись точками на плоскости. Для этого применим стереографическую проекцию, взяв за центр проецирования неподвижную точку $C(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, которая является отталкивающей и заведомо не принадлежит аттрактору на всем периоде изменения коэффициентов (находится в «дырке»). Поэтому аттрактор будет располагаться в ограниченной области. Замена переменных, отвечающая переходу на комплексную плоскость W , имеет вид

$$W = \frac{x - z + iy\sqrt{2}}{x + z + \sqrt{2}}, \quad (10)$$

а обратное преобразование представляется как

$$x = \frac{1 - |W|^2 + 2\operatorname{Re}W}{\sqrt{2}(1 + |W|^2)}, \quad y = \frac{2\operatorname{Im}W}{1 + |W|^2}, \quad z = \frac{1 - |W|^2 - 2\operatorname{Re}W}{\sqrt{2}(1 + |W|^2)}. \quad (11)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение, описывающее динамику переменной W , сначала вычислим логарифмическую производную

$$\frac{\dot{W}}{W} = \sqrt{2} \frac{ix\dot{y} - iz\dot{y} - iy\dot{x} + iy\dot{z} - \dot{x} - \dot{z}}{2 - (x + z)^2}, \quad (12)$$

где принято во внимание равенство $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$. Далее, подставим в правую часть соотношения для \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} согласно (7) и выразим присутствующие в них переменные x , y , z через W с помощью формул (11). После умножения обеих частей уравнения на W в итоге находим:

$$\begin{aligned} \dot{W} = ip\varepsilon \frac{(2\operatorname{Re}W \cos \alpha + (1 - |W|^2) \sin \alpha) (2W \cos \alpha + (1 - W^2) \sin \alpha) \operatorname{Im}W}{(1 + |W|^2)^2} - \\ - iqK \frac{(-2\operatorname{Re}W \sin \beta + (1 - |W|^2) \cos \beta + (1 + |W|^2)/\sqrt{2}) (2W \cos \beta + (1 - W^2) \sin \beta)}{2(1 + |W|^2)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha = \bar{\alpha} + \pi/4$ и $\beta = \bar{\beta} + \pi/4$.

Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, представленный на комплексной плоскости W , приводится на рис. 5а. Внимательное рассмотрение устройства аттрактора позволяет идентифицировать его как соответствующий конструкции Плыкина–Ньюхауса. Об этом свидетельствует визуальное сопоставление топологии расположения филаментов с аттрактором Плыкина–Ньюхауса, изображение которого получено для модели Ханта в работах [23, 27] и воспроизведено на диаграмме (б).

Чтобы проанализировать природу аттрактора в широком диапазоне изменения ε , использовалась упрощенная методика вычислений, состоящая в проверке критерия конусов для множества точек на аттракторе, получаемых итерациями отображения $\mathbf{T}_S(\mathbf{x})$.

Согласно результатам этих расчетов, гиперболическая природа аттрактора сохраняется, по крайней мере, в интервале $0.35 < \varepsilon < 2$. На рис. 6 показаны портреты аттракторов на сфере в полярной азимутальной проекции (слева) и на плоскости W (справа). Во всем диапазоне $0.35 < \varepsilon < 2$ топологическая структура аттрактора выглядит одинаково. При этом с увеличением ε занимаемая аттрактором область на плоскости уменьшается, филаменты, образующие аттрактор, становятся тоньше, а фрактальная размерность аттрактора убывает (см. график размерности по Каплану–Йорке на рис. 2). Это, очевидно, ассоциируется с возрастанием роли диссипации в динамике системы благодаря ускорению эволюции на стадиях стока.

3. Неавтономная система дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами

3.1. Формулировка уравнений

Сконструируем версию неавтономной системы, в которой коэффициенты в дифференциальных уравнениях представлены *гладкими функциями времени*. Для этого положим



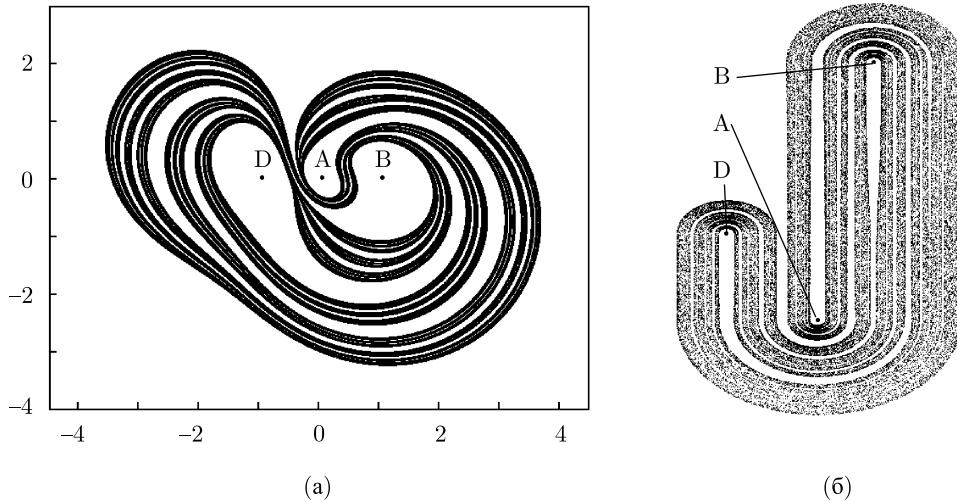


Рис. 5. Аттрактор отображения (8), (9), представленный на плоскости комплексной переменной W (а) и портрет аттрактора Плыкина–Ньюхауса для модели Ханта [23], взятый из работы [27] (б). Изображение ориентировано так, чтобы было лучше видно соответствие топологии филаментов и рисунка (а).

в уравнении (13)

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \beta = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), p = 1, q = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right). \tag{14}$$

Теперь два векторных поля, определяющие на сфере сток и дифференциальное вращение, изменяются во времени непрерывным и гладким образом, плавно поворачиваясь в пространстве, так что исходная конфигурация воспроизводится с периодом $T = 4$. Кроме того, второе поле совершает осцилляции, меняя свое направление на противоположное дважды за период. Чтобы сохранить присущее исходной модели чередование стадий стока и дифференциального вращения, изменение обоих полей во времени сдвинуто по фазе на четверть периода, так что экстремальные значения достигаются ими попеременно. Направления полей в эти моменты наиболее значимы с точки зрения вклада в перемещение изображающих точек, и поэтому они выбраны такими же, как в исходной модели.

Учитывая присущее гиперболическому аттрактору свойство структурной устойчивости, можно надеяться, что природа аттрактора сохранится при указанной модификации системы. Численные расчеты подтверждают, что это действительно так, если правильно подобрать параметры K и ε .

Выполним замену (14) в уравнении (13), записанном относительно комплексной переменной $W = X + iY$. После отделения действительных и мнимых частей получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -2\varepsilon Y^2 \Omega_1(X, Y, t) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}t\right) - X \sin\left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}t\right) \right) + \\ &\quad + KY \Omega_2(X, Y, t) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2}t\right) - X \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2}t\right) \right) \sin \frac{\pi t}{2}, \\ \dot{Y} &= \varepsilon Y \Omega_1(X, Y, t) \left(2X \cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}t\right) + (1 - X^2 + Y^2) \sin\left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}t\right) \right) - \\ &\quad - K \Omega_2(X, Y, t) \left(X \cos\left(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{2}(1 - X^2 + Y^2) \sin\left(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2}t\right) \right) \sin \frac{\pi t}{2}, \end{aligned} \tag{15}$$

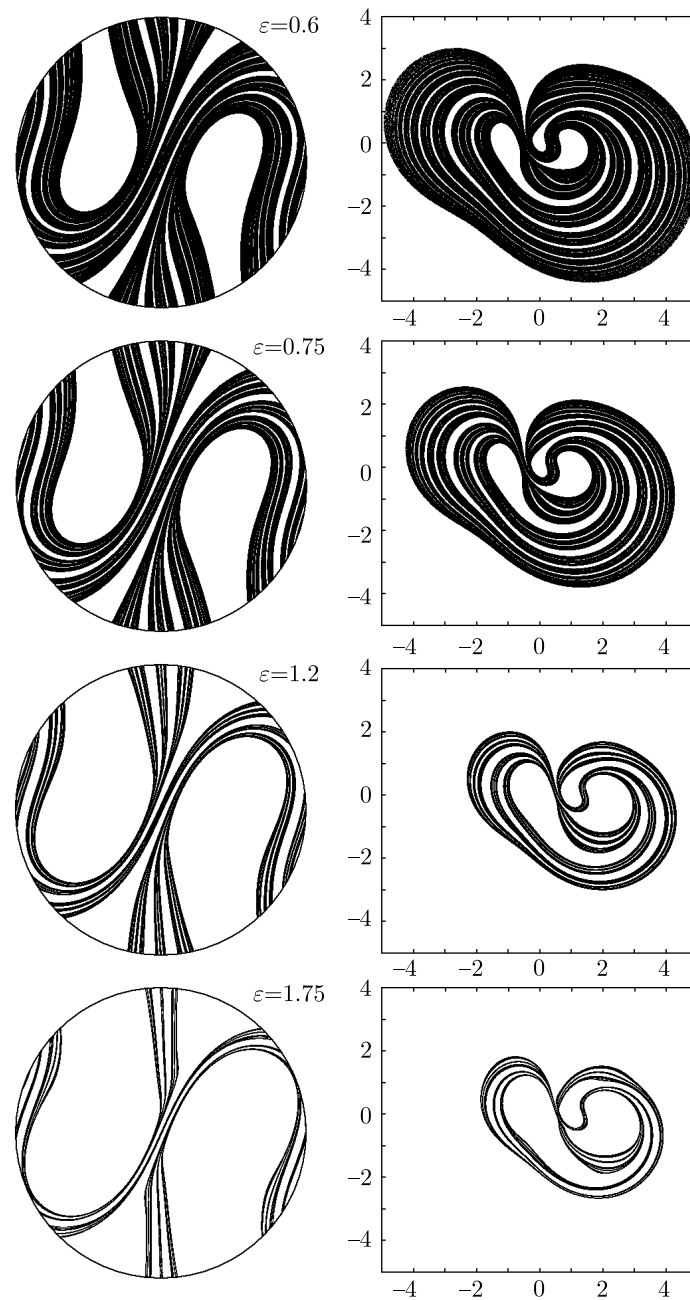


Рис. 6. Портреты аттрактора на картах северного полушария сферы в полярной азимутальной проекции (левая колонка) и на плоскости W (правая колонка) при различных значениях параметра ε . (Карты южного полушария выглядят аналогично картам северного и получаются зеркальным отражением относительно вертикальной оси.)

где

$$\begin{aligned} \Omega_1(X, Y, t) &= \frac{2X \cos(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}t) + (1 - X^2 - Y^2) \sin(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}t)}{(1 + X^2 + Y^2)^2}, \\ \Omega_2(X, Y, t) &= \frac{-2X \sin(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2}t) + (1 - X^2 - Y^2) \cos(\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2}t)}{(1 + X^2 + Y^2)} + \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Она выглядит несколько громоздко, но это *первый конкретный пример системы дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами, имеющей на плоскости в сечении Пуанкаре аттрактор типа Плыкина*. Отображение Пуанкаре для неавтономной системы уравнений (15) выписать явно не удастся, но его можно реализовать в виде выполняемой на компьютере процедуры, которая состоит в интегрировании уравнений конечно-разностным методом на интервале времени $T = 4$, задающем период изменения коэффициентов: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}_P(\mathbf{x}_n)$, где $\mathbf{x}_n = \{X(nT), Y(nT)\}$.

3.2. Проверка гиперболичности и другие численные результаты

Обратимся к результатам исследования динамики системы (15) на компьютере.

На рис. 7 показаны зависимости переменных X и Y от времени, полученные в результате численного решения дифференциальных уравнений (15) при $\varepsilon = 0.72$ и $K = 1$. Визуально они выглядят похожими на реализации случайного процесса, как это и должно быть при динамике на хаотическом аттракторе.

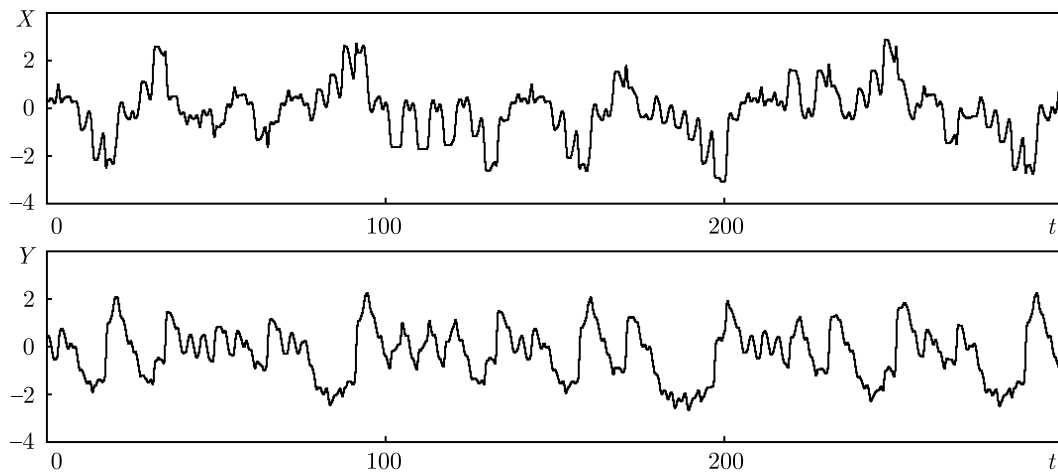


Рис. 7. Зависимости переменных X и Y от времени в установившемся режиме, полученные в результате численного решения дифференциальных уравнений (15) при $\varepsilon = 0.72$ и $K = 1.9$. Приводится часть реализации, заведомо относящаяся к движению системы на аттракторе; переходный процесс исключен

На рис. 8 приводятся в разных формах портреты аттрактора при тех же значениях параметров системы $\varepsilon = 0.72$ и $K = 1$. На диаграмме (а) показан вид аттрактора в трехмерном расширенном фазовом пространстве (X, Y, t) , а на диаграмме (б) — его проекция на плоскость динамических переменных (X, Y) . Чтобы сделать различимой присущую аттрактору структуру, использована техника представления объекта оттенками серого цвета [25]. Более светлыми тонами показаны участки, отвечающие относительно большей вероятности пребывания точки в соответствующем элементе изображения. Представленный на рисунке (а) вдоль вертикальной оси интервал времени отвечает одному полному периоду изменения коэффициентов. В сечении горизонтальной плоскостью $t = 0 \pmod{4}$ можно видеть объект с характерной фрактальной поперечной структурой. Это портрет аттрактора в сечении Пуанкаре. Отдельно он показан на диаграмме (в). Сравнение с обсуждавшимся выше гиперболическим аттрактором отображения сферы (рис. 5а) демонстрирует замечательное сходство обоих объектов. На качественном уровне это можно считать подтверждением того, что предпринятая модификация модели не привела к изменению природы аттрактора.

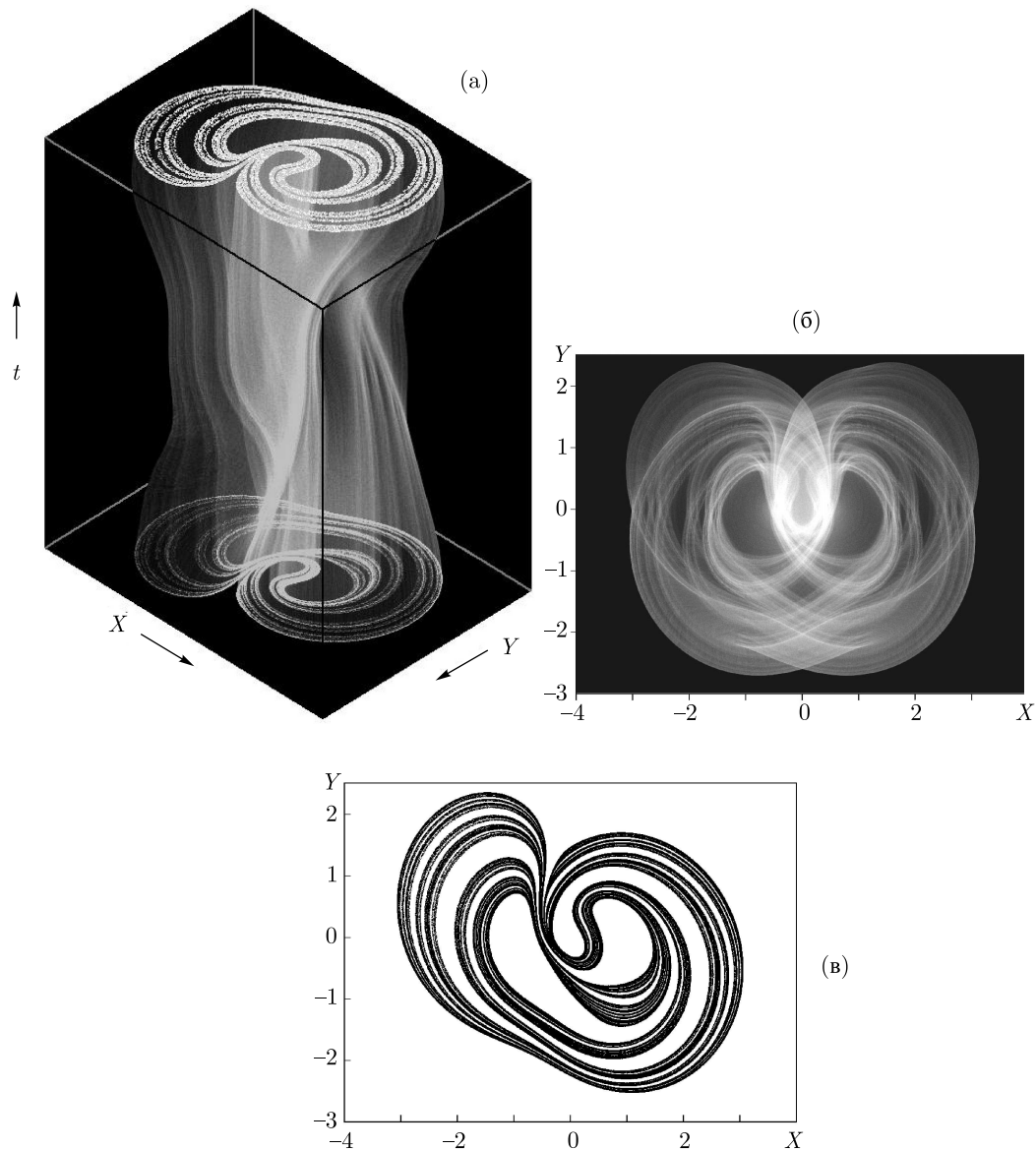


Рис. 8. Аттрактор системы (15) при $\varepsilon = 0.72$ и $K = 1.9$, представленный в трехмерном расширенном фазовом пространстве (а), в проекции на плоскость динамических переменных (X, Y) (б) и в сечении Пуанкаре $t = 0 \pmod{4}$ (в). На диаграммах (а) и (б) использована техника представления оттенками серого цвета: более светлые тона отвечают участкам, посещаемым изображающей точкой с большей вероятностью

Процедура вычислений показателей Ляпунова аналогична той, которая использовалась применительно к заданному аналитическому отображению (раздел 2), но основывается теперь на совместном решении конечно-разностным методом системы уравнений (15) и двух комплектов соответствующих уравнений в вариациях с ортогонализацией векторов возмущения и их нормировкой на константу на каждом периоде. Показатели Ляпунова для системы (15) $\lambda_{1,2}$ и для ее отображения Пуанкаре связаны очевидным соотношением $\lambda_{1,2} = \Lambda_{1,2}/T$, $T = 4$.

На рис. 9 первый график (а) показывает зависимость показателей $\Lambda_{1,2}$ от параметра ε при фиксированной величине $K = 1.9$. Большой показатель остается положительным

в широком интервале изменения ε , что говорит о хаотической природе аттрактора. При $\varepsilon > \varepsilon_c \approx 1.34$ хаос пропадает и движение становится периодическим. На втором графике (б) представлена зависимость показателей $\Lambda_{1,2}$ от параметра K при фиксированной величине $\varepsilon = 0.72$. Хаос отсутствует при малых величинах K , что соответствует малым углам поворота на стадиях дифференциального вращения, и появляется, начиная с $K = K_c \approx 1.23$. В частности, при $\varepsilon = 0.72$ и $K = 1.9$ показатели Ляпунова составляют $\Lambda_1 \approx 0.884 \pm 0.004$ и $\Lambda_2 \approx -1.261 \pm 0.002$, а оценка размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке дает $D_L \approx 1.70$.

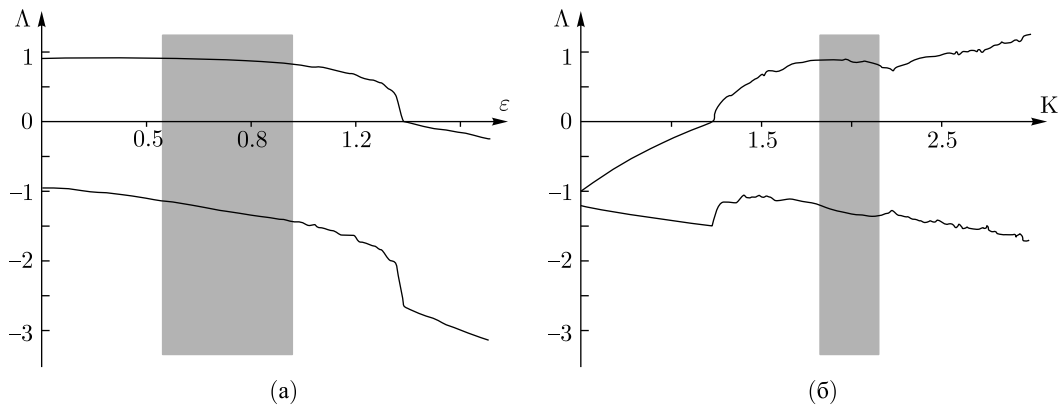


Рис. 9. Графики зависимости показателей Ляпунова от параметра ε при $K = 1.9$ (а) и от параметра K при $\varepsilon = 0.72$ (б) для отображения Пуанкаре модели (15). Серая полоса показывает интервал, в котором компьютерная проверка критерия конусов подтверждает однородно гиперболическую природу аттрактора

Чтобы установить гиперболическую природу аттрактора с помощью критерия конусов, целесообразно вернуться к координатам на сфере

$$x = \frac{1 - X^2 - Y^2 + 2X}{\sqrt{2}(1 + X^2 + Y^2)}, \quad y = \frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2}, \quad z = \frac{1 - X^2 - Y^2 - 2X}{\sqrt{2}(1 + X^2 + Y^2)}. \quad (17)$$

Компьютерная программа, реализующая проверку требуемых условий, получается модификацией программы, применявшейся для отображения сферы, а именно: вместо программного модуля, который вычислял отображение сферы и его производные, подставляется модуль, реализующий отображение Пуанкаре для системы дифференциальных уравнений посредством их численного интегрирования на периоде изменения коэффициентов и производящий также решение соответствующих уравнений в вариациях для вычисления элементов матрицы Якоби².

На рис. 9а приводится диаграмма, суммирующая в графической форме результаты проверки критерия конусов для аттрактора системы (15) при $\varepsilon = 0.72$ и $K = 1.9$. Расширяю-

²Хотя конкретный выбор системы координат не имеет значения в смысле присутствия или отсутствия свойства гиперболичности, он может быть существенным с точки зрения нашей реализации процедуры проверки критерия конусов, поскольку определение расширяющихся и сжимающихся конусов основано на сравнении норм векторов и, следовательно, зависит от системы координат (см. также [24]). Выполнение проверяемых условий в том виде, как они приведены в настоящей работе, достаточно для заключения о гиперболической природе аттрактора, но их нарушение не обязательно говорит об отсутствии гиперболичности и может быть обусловлено неудачным выбором координат. Координаты (x, y, z) в этом смысле предпочтительны, поскольку принятая методика расчетов приводит без дополнительных изменений к желаемому результату.

щиеся и сжимающиеся конусы определены для отображения $T_P^3(\mathbf{x}_n)$. Использован вариант схемы расчетов, подразумевающей проверку условий критерия в точках на аттракторе, получаемых итерациями отображения Пуанкаре с определением интервала допустимых значений константы γ .

На диаграмме по горизонтальной оси отложена координата Y для точек на аттракторе, в которых проводится анализ, а по вертикальной оси в логарифмическом масштабе значения γ , отвечающие границам интервалов. Для верхней границы точки показаны черным, а для нижней — серым цветом. На диаграмме можно видеть два образования, соответственно, из черных и серых точек, причем одно расположено целиком выше оси, отвечающей $\gamma = 1$, а другое ниже. Наличие зазора конечной ширины, отделяющего эти множества от оси $\gamma = 1$, говорит о положительном результате теста. Чтобы выразить результат количественно, определяем минимум и максимум по всем обработанным точкам на аттракторе, соответственно, для верхней и нижней границ интервала, и находим, что выбор константы в пределах $0.29 < \gamma^2 < 3.39$ обеспечивает требуемую критерием ситуацию расположения конусов.

Другим подтверждением гиперболической природы аттрактора служит расположение устойчивых и неустойчивых многообразий в области, содержащей аттрактор.

Для построения устойчивых и неустойчивых многообразий на компьютере поступаем следующим образом.

В сечении Пуанкаре возьмем некоторую принадлежащую аттрактору точку \mathbf{x} . Найдем ее образ при N -кратном действии отображения Пуанкаре $\bar{\mathbf{x}} = T_P^N(\mathbf{x})$, а также ее прообраз $\tilde{\mathbf{x}} = T_P^{-N}(\mathbf{x})$.

Далее, задавая множество начальных условий $\tilde{\mathbf{y}}$ в некоторой малой окрестности точки $\tilde{\mathbf{x}}$, вычисляем $\mathbf{y} = T_P^N(\tilde{\mathbf{y}})$. Соответствующие точки на графике прорисовывают *неустойчивое* многообразие точки \mathbf{x} . Затем задаем множество начальных условий $\bar{\mathbf{y}}$ в окрестности точки $\bar{\mathbf{x}}$ и вычисляем $\mathbf{y} = T_P^{-N}(\bar{\mathbf{y}})$. Эти точки на графике прорисовывают *устойчивое* многообразие точки \mathbf{x} . Точность, с которой получаются точки на многообразиях, тем лучше, чем больше число N . Практически, уже при $N = 5$ она достаточна, чтобы погрешность представления многообразий на графике была визуально неразличима.

На рис. 9б на черном фоне светлым тоном показана содержащая аттрактор область D , в которой проводилось построение многообразий. Серым показан сам аттрактор в сечении Пуанкаре, а черными линиями представлены поля направлений, отвечающие устойчивым и неустойчивым многообразиям. Неустойчивые многообразия располагаются вдоль филаментов аттрактора, а устойчивые — поперек структуры филаментов. Как видно из рисунка, характер взаимного расположения устойчивых и неустойчивых многообразий исключает возможность ситуации касания, по крайней мере, в области D .

Расчеты показывают, что при фиксированном параметре $K = 1.9$ гиперболическая природа хаотического аттрактора сохраняется, по крайней мере, в диапазоне $0.55 < \varepsilon < 0.92$, а при фиксированной величине $\varepsilon = 0.72$ — в диапазоне $1.83 < K < 2.15$. Соответствующие интервалы обозначены полосой серого цвета на графиках показателей Ляпунова и расположены, как видно из рисунка, полностью в области, где один из показателей положительный.

4. Заключение

В работе введена в рассмотрение потоковая система, в которой хаотическая динамика обусловлена наличием гиперболического аттрактора, отвечающего надстройке аттрактора типа Плыкина.

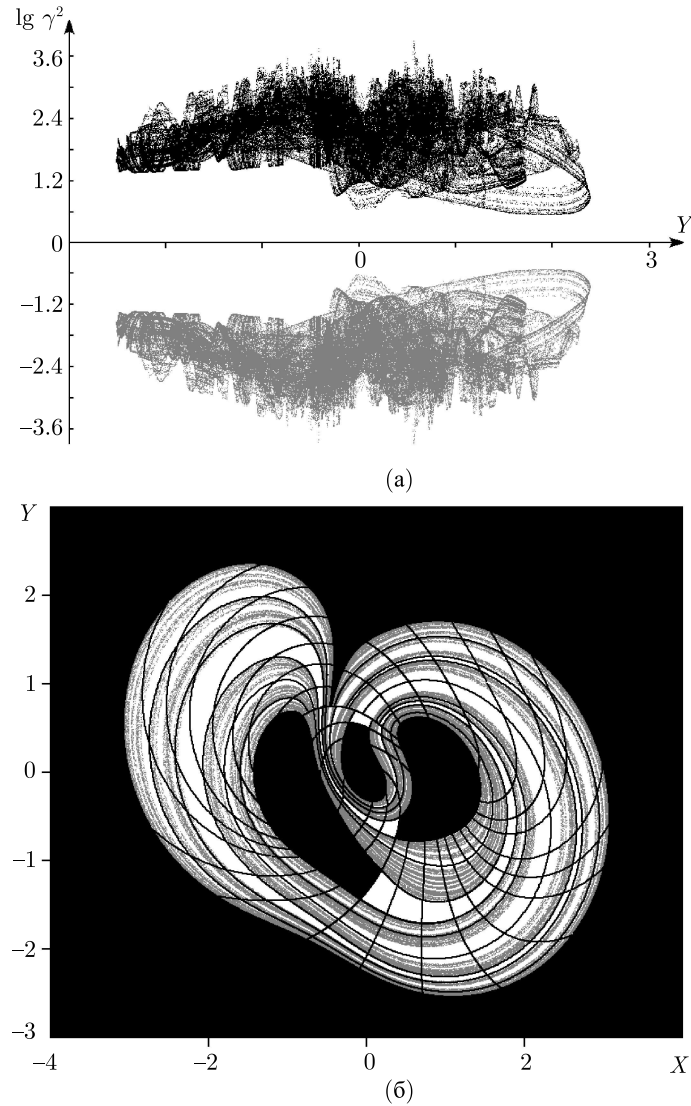


Рис. 10. Представленные в графической форме результаты проверки гиперболической природы аттрактора в отображении Пуанкаре системы (15) при $\varepsilon = 0.72$ и $K = 1.9$ (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (б) с изображенными на его фоне черными линиями, которые обозначают поля направлений, ассоциирующихся с устойчивыми и неустойчивыми многообразиями

Фактически представлены две версии модели. В первой версии эволюция во времени кусочно-непрерывная и составлена из четырех последовательно выполняемых стадий. При этом отображение Пуанкаре, описывающее трансформацию состояния за полный период, представляется аналитически в явной форме, как отображение сферы в себя. Заменой переменных оно приводится к отображению плоскости в себя, аттрактор которого располагается в ограниченной области. Во второй версии модель модифицирована так, что динамика описывается системой дифференциальных уравнений с коэффициентами, гладким образом зависящими от времени и координатных переменных. То обстоятельство, что модификация не приводит к изменению устройства хаотического аттрактора, обусловлено структурной устойчивостью, присущей аттрактору в силу его гиперболической природы.

В отличие от систем, обсуждаемых в работах Моралеса [21] и Белых с соавторами [22], предложенная здесь система с аттрактором типа Плыкина относится к классу неавтономных. При этом нужно оговориться, что в упомянутых работах исследование не было доведено до конкретной формулировки дифференциальных уравнений и компьютерного моделирования динамики.

В отличие от работы Ханта [23], где конструкция неавтономной динамической системы с аттрактором Плыкина использует различные математические соотношения в зависимости от области фазового пространства и содержит множество сглаживающих функций, представленная здесь система задается компактно записанной системой дифференциальных уравнений. По этой причине, как можно полагать, она имеет перспективу послужить основой для разработки реальных систем и устройств.

Системы с гиперболическим хаосом могут оказаться интересными для приложений, в особенности благодаря присущему им свойству грубости, или структурной устойчивости, что будет означать нечувствительность устройств к вариации параметров, характеристик составных элементов, техническим флуктуациям и шумам и т. п.

Появление конкретных примеров систем с гиперболическими аттракторами делает целесообразным привлечение к их исследованию накопленного в современной нелинейной динамике арсенала методов и приемов численного исследования. Это представляет очевидный интерес, как с точки зрения наполнения конкретным наглядным содержанием концепций, выработанных в математической теории (см. в этой связи, например, статью [28]), так и в плане использования этих концепций в приложениях. В настоящей работе приведены такие результаты компьютерного исследования, как портреты аттракторов, показатели Ляпунова, оценки размерности, конфигурация устойчивых и неустойчивых многообразий в сечении Пуанкаре в области на плоскости, содержащей аттрактор.

Благодаря тому, что предложенная система имеет минимальную размерность фазового пространства, требуемую для существования гиперболического аттрактора, ее численное исследование и, в частности, проверка критерия гиперболичности, оказывается существенно проще в сравнении с работами, где рассматривались модели с аттрактором Смейла–Вильямса [11–18]. Некоторые методические приемы, в частности, версия критерия конусов с определением ширины «зазора», отвечающего разрешенным величинам константы расширения (сжатия) конусов, могут быть полезными при проведении подобных расчетов и для других систем.

Поскольку в зависимости от выбора параметров предложенная система может демонстрировать как гиперболический, так и негиперболический хаос, а также регулярную (периодическую) динамику, она может служить подходящим объектом для изучения принципиально важного и интересного вопроса о сценариях возникновения гиперболического хаоса (см., в частности, [29, 30]). Эта проблема существенно сложнее, чем анализ собственно гиперболических аттракторов, поскольку подразумевает выделение и изучение пограничных ситуаций, характеризующихся той или иной степенью негрубости. Данный круг вопросов мало изучен, что отчасти объясняется, по-видимому, отсутствием до последнего времени конкретных примеров систем, где реализовался бы такой переход.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-02-16619.

Приложение

Для определенного на двумерной сфере отображения $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in S^2$ рассмотрим сначала процедуру проверки условий для расширяющихся конусов.



Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ — два ортогональных друг другу единичных вектора касательных к сфере в точке \mathbf{x} . Произвольный вектор инфинитезимального возмущения представляется линейной комбинацией $\mathbf{u} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$, причем $\|\mathbf{u}\|^2 = c_1^2 + c_2^2$. Пусть при действии отображения он трансформируется в вектор $\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z\}$. Вычисляя частные производные от трех компонент результирующего вектора по коэффициентам c_1 и c_2 , определим матрицу \mathbf{V} размера 3×2 , так что

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \\ V_{31} & V_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{c}. \quad (18)$$

Норму вектора $\bar{\mathbf{u}}$ представим как

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{c}, \quad (19)$$

где верхний индекс T означает транспонирование. Конус растягивающихся векторов с параметром растяжения $\gamma > 1$ определим как множество векторов $\mathbf{c} = \{c_1, c_2\}$, удовлетворяющих неравенству

$$\mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{c} \geq \gamma^2 \mathbf{c}^T \mathbf{c}. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь обратное отображение $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in S^2$. Пусть при его действии вектор инфинитезимального возмущения $\mathbf{u} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ трансформируется в вектор $\tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z\}$. Вычисляя частные производные от трех компонент вектора по коэффициентам c_1 и c_2 , найдем 3×2 -матрицу \mathbf{U} . Норму вектора возмущения, полученного в результате обратного преобразования, представим как

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{c}. \quad (21)$$

Этот вектор принадлежит конусу векторов, растягивающихся в прямом времени при старте из точки $\tilde{\mathbf{x}}$, если справедливо неравенство

$$\gamma^2 \mathbf{c}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{c} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{c}. \quad (22)$$

Условие, подлежащее проверке, состоит в том, что множество векторов $\mathbf{c} = \{c_1, c_2\}$, удовлетворяющих неравенству (22), должно принадлежать множеству, определяемому соотношением (20).

В качестве базисных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ мы вправе выбрать собственные векторы симметричной матрицы $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$, считая, что соответствующие вещественные положительные собственные числа удовлетворяют неравенству $\mu_1 \geq \mu_2$. Кроме того, введем такую нормировку векторов, что $c_1 = 1$.

Тогда неравенства (20) и (22) принимают вид, соответственно,

$$B_{11} + B_{22}c_2^2 \geq \gamma^2(1 + c_2^2) \quad (23)$$

и

$$A_{11} + 2A_{12}c_2 + A_{22}c_2^2 \leq \gamma^{-2}(1 + c_2^2), \quad (24)$$

где A_{ij} и B_{ij} — элементы матриц $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ и $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$ в выбранном базисе. Если $\mu_1 = B_{11} > \gamma^2$ и $\mu_2 = B_{22} < \gamma^2$, то первое неравенство выполнено при

$$-\sqrt{\frac{B_{11} - \gamma^2}{\gamma^2 - B_{22}}} \leq c_2 \leq \sqrt{\frac{B_{11} - \gamma^2}{\gamma^2 - B_{22}}}. \quad (25)$$

Предположим, что $A_{22} > \gamma^{-2}$. Тогда неравенство (24) справедливо при расположении c_2 в интервале между корнями квадратного уравнения

$$r_1 \leq c_2 \leq r_2, \quad (26)$$

где

$$r_{1,2} = \frac{-A_{12} \mp \sqrt{A_{12}^2 - (A_{12} - \gamma^{-2})(A_{22} - \gamma^{-2})}}{A_{22} - \gamma^{-2}}.$$

Интервал, в котором справедливо неравенство (26), должен находиться внутри интервала, определенного условием (23), что при сделанных предположениях обеспечено, если

$$\left| \frac{A_{12}}{A_{22} - \gamma^{-2}} \right| + \frac{\sqrt{A_{12}^2 - (A_{12} - \gamma^{-2})(A_{22} - \gamma^{-2})}}{A_{22} - \gamma^{-2}} < \sqrt{\frac{B_{11} - \gamma^2}{\gamma^2 - B_{22}}}. \quad (27)$$

Выполняемая на компьютере процедура состоит в проверке

- условий существования расширяющихся конусов с фактором γ для точки \mathbf{x} и ее образа, которые заключаются в выполнении для собственных чисел матрицы \mathbf{V} неравенств $\mu_1 > \gamma^2$ и $\mu_2 < \gamma^2$, и для собственных чисел матрицы \mathbf{U} неравенств $\lambda_1 > \gamma^{-2}$ и $\lambda_2 < \gamma^{-2}$;
- условия $A_{22} > \gamma^{-2}$;
- неравенства (27), обеспечивающего надлежащее взаимное расположение расширяющихся конусов.

Для сжимающихся конусов процедура проверки условий в точности такая же, но производится для обратного отображения.

Рассмотрим одну полезную вариацию метода. Пусть в некоторой точке \mathbf{x} выполнены все требуемые условия при $\gamma = 1$. Каков будет тогда интервал допустимых значений γ , где сохраняется такая же ситуация вложения конусов?

Введем функции

$$F(c_2) = \frac{1 + c_2^2}{A_{11} + 2A_{12}c_2 + A_{22}c_2^2}, \quad G(c_2) = \frac{B_{11} + B_{22}c_2^2}{1 + c_2^2}, \quad (28)$$

тогда условие правильного вложения для расширяющихся конусов записывается как

$$\{c_2 | F(c_2) \geq \gamma^2\} \subset \{c_2 | G(c_2) \geq \gamma^2\}. \quad (29)$$

С использованием обратного отображения в аналогичном виде можно представить условие для сжимающихся конусов.

Алгоритм определения искомого интервала значений γ состоит в следующем. Нужно найти максимальные и минимальные значения функций F и G , а также значения этих функций, отвечающие действительным корням алгебраического уравнения четвертой степени $F(c_2) = G(c_2)$. То же самое следует сделать для функций, получаемых при рассмотрении условия для сжимающихся конусов. В полученном наборе чисел, среди тех из них, которые меньше единицы, выбираем максимальное, а среди тех, которые больше единицы, выбираем минимальное. Они и дают границы интервала допустимых величин γ^2 .

Один возможный способ организовать вычисления на компьютере подразумевает, что предварительно найдена тем или иным способом поглощающая область D , содержащая аттрактор: $A \subset D$. По определению, это область, образ которой, получаемый при действии отображения, располагается внутри нее: $\mathbf{T}(D) \subset \text{Int } D$. Произведем сканирование области D на сетке с достаточно мелким шагом, выполняя проверку приведенных выше условий для расширяющихся конусов при фиксированной константе $\gamma > 1$ и аналогичных условий для сжимающихся конусов. Если эти условия справедливы во всей поглощающей области, то они заведомо имеют место и на аттракторе $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{T}^n(D)$, так что он должен быть признан однородно гиперболическим.

Второй способ состоит в том, чтобы проверять критерий конусов не в поглощающей области, а для множества точек на самом аттракторе, получаемых итерациями отображения $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. Одно из преимуществ состоит в том, что в этом случае не требуется предварительного определения поглощающей области. Метод может также без проблем применяться к системам высокой размерности, для которых полное сканирование поглощающей области было бы затруднительным.

С математической точки зрения, второй способ может показаться менее строгим. Однако практика расчетов показывает, что, будучи заметно проще в обращении, он позволяет не менее надежно распознавать ситуации гиперболического хаоса, нежели первый подход. В самом деле, для гладких систем, которые мы здесь только и имеем в виду, используемые при формулировке критерия конусов объекты (матрицы, их собственные числа и собственные векторы) гладким образом зависят от переменных состояния, поскольку определяются динамикой на конечных, притом небольших, временах. Отсюда следует, что выполнение в некоторой точке условий с отделенной от 1 константой γ означает также выполнение критерия конусов в ее конечной окрестности (тем большей, чем больше $|\gamma - 1|$). Поэтому положительный результат теста на гиперболичность для множества точек на аттракторе говорит о выполнении критерия конусов также и на всем аттракторе, если обеспечено полное покрытие аттрактора объединением упомянутых окрестностей. Практически такая ситуация достигается увеличением числа итераций отображения и, соответственно, количества тестируемых точек на аттракторе.

Список литературы

- [1] Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979, с. 192–212.
- [2] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления: Т. 2 / под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ АН СССР, 1985.
- [3] Eckmann J.-P. and Ruelle D. Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors // Rev. Modern Phys., 1985, vol. 57, pp. 617–656.
- [4] Devaney R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. New York: Addison-Wesley, 1989.
- [5] Shilnikov L. P. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1997, vol. 7, pp. 1353–2001.
- [6] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
- [7] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с.
- [8] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.

- [9] Afraimovich V. and Hsu S.-B. Lectures on Chaotic Dynamical Systems. (AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 28.) Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003. 353 p.
- [10] Hasselblatt B., Pesin Y. Hyperbolic Dynamics. http://www.scholarpedia.org/article/Hyperbolic_dynamics.
- [11] Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В. С. Анищенко [и др.]. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.
- [12] Плыкин Р. В. Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб., 1974, т. 94 (136), № 2, с. 243–264.
- [13] Newhouse S. E. Lectures on Dynamical Systems // Dynamical Systems (Bressanone, 1978). (Progr. Math., vol. 8.) Boston: Birkhäuser, 1980, pp. 1–114.
- [14] Kuznetsov S. P. Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type // Phys. Rev. Lett., 2005, vol. 95, 144101.
- [15] Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ, 2006, т. 129, с. 400–412.
- [16] Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам., 2006, т. 14, № 5, с. 3–29.
- [17] Kuznetsov S. P. and Sataev I. R. Hyperbolic Attractor in a System of Coupled Non-Autonomous van der Pol Oscillators: Numerical Test for Expanding and Contracting Cones // Phys. Lett. A, 2007, vol. 365, pp. 97–104.
- [18] Kuznetsov S. P. and Pikovsky A. Autonomous Coupled Oscillators with Hyperbolic Strange Attractors // Phys. D, 2007, vol. 232, pp. 87–102.
- [19] Isaeva O. B., Jalnina A. Yu., and Kuznetsov S. P. Arnold’s Cat Map Dynamics in a System of Coupled Nonautonomous van der Pol Oscillators // Phys. Rev. E, 2006, vol. 74, 046207.
- [20] Isaeva O. B., Kuznetsov S. P., and Osbaldestin A. H. A System of Alternately Excited Coupled Non-Autonomous Oscillators Manifesting Phenomena Intrinsic to Complex Analytical Maps // Phys. D, 2008, vol. 237, pp. 873–884.
- [21] Morales C. A. Lorenz Attractor Through Saddle-Node Bifurcations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1996, vol. 13, pp. 589–617.
- [22] Belykh V., Belykh I., and Mosekilde E. The Hyperbolic Plykin Attractor Can Exist in Neuron Models // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, pp. 3567–3578.
- [23] Hunt T. J. Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity: PhD Thesis, University of Cambridge, 2000, 121 p.
- [24] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., and Strelcyn J.-M. Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A Method for Computing All of Them // Meccanica, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [25] Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 2-е изд. 356 с.
- [26] Sinai J. G. and Vul E. P. Hyperbolicity Conditions for the Lorenz Model // Phys. D, 1981, vol. 2, pp. 3–7.
- [27] Айдарова Ю. С., Кузнецов С. П. Хаотическая динамика модели Ханта — искусственно сконструированной потоковой системы с гиперболическим аттрактором // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам., 2008, т. 16, № 3, с. 176–196.
- [28] Coudene Y. Pictures of Hyperbolic Dynamical Systems // Notices Amer. Math. Soc., 2006, vol. 53, no. 1, pp. 8–13.
- [29] Newhouse S., Ruelle D., and Takens F. Occurrence of Strange Axiom A Attractors Near Quasi Periodic Flows on T^m , $m \geq 3$ // Comm. Math. Phys., 1978, vol. 64, pp. 35–40.
- [30] Шильников Л. П., Тураев Д. В. О катастрофах голубого неба // Докл. РАН, 1995, т. 342, с. 596–599.