

УДК 531.384; 531.43

# Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы

А. П. Иванов

Московский физико-технический институт (гос. ун-т)  
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Моск. обл., Институтский пер., д. 9  
apivanov@orc.ru

Получено 18 марта 2009 г.

Обсуждаются примеры нерегулярного поведения динамических систем с сухим трением. Предложена классификация фрикционных контактов по признакам их размерности, согласованности и возможности прерывания, а также базовые модели, демонстрирующие характерные особенности. Получены, в частности, условия бифуркаций семейств положений равновесия, а также формулы для построения матрицы монодромии в системах с трением. Показано, что системам с несогласованными контактами присущи сингулярности, приводящие к несуществованию или неоднозначности фазовых траекторий, обобщающие парадоксы Пэнлеве и Джеллетта. Вследствие такого поведения ряд полученных ранее результатов, включая проблему движения твердого тела по шероховатой плоскости, нуждаются в уточнении.

Ключевые слова: негладкие динамические системы, сухое трение, бифуркации

A. P. Ivanov

Bifurcations in systems with friction: basic models and methods

Examples of irregular behavior of dynamical systems with dry friction are discussed. A classification of frictional contacts with respect to their dimensionality, associativity, and the possibility of interruptions is proposed and basic models showing typical features are stated. In particular, bifurcation conditions for equilibrium families are obtained and formulas for the monodromy matrix for systems with friction are constructed. It is shown that systems with non-associated contacts possess singularities that lead to the nonexistence or nonuniqueness of phase trajectories; these results generalize the paradoxes of Painlevé and Jellett. Owing to such behavior, a number of earlier results, including the problem on the motion of a rigid body on a rough plane, require an improvement.

Keywords: non-smooth dynamical systems, dry friction, discontinuous bifurcation

Mathematical Subject Classifications: 70K50

## 1. Введение

Понятие «бифуркация», введенное А. Пуанкаре [19], стало одним из ключевых в различных областях науки. Наибольшее развитие теория бифуркаций получила в связи с исследованием динамических систем вида

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad (1.1)$$

где  $\dot{x}$  обозначает производную по времени  $t$ , а вектор-функция  $f : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^k$  является гладкой в некоторой области  $\Omega$  (т. е. принадлежит классу  $C_\nu(\Omega)$ ,  $\nu \geq 1$ ).

Бифуркации ассоциируются с изменением аналитических и геометрических свойств системы и могут быть определены различными способами (см. [6, 7, 12]). Грубо говоря, бифуркация — это скачкообразное появление у системы новых качественных свойств в ответ на плавное изменение тех или иных параметров. В ряде приложений удобнее считать  $t$  дискретной переменной и рассматривать вместо системы дифференциальных уравнений (1.1) отображение Пуанкаре. Другое обобщение — разрывные динамические системы, также называемые системами Филиппова [5]: область  $\Omega$  разбита на конечное число компонент  $\Omega_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), причем функция  $F$  является кусочно-гладкой с возможными разрывами на границах. Большинство аналитических трудностей при исследовании систем Филиппова обусловлено наличием траекторий, частично проходящих по границам областей  $\Omega_j$  — так называемые «скользящие режимы» [3, 12, 21]. Обширный обзор [4] охватывает работы по бифуркациям в системах Филиппова, а также в системах с ударами.

Механические системы с сухим (кулоновым) трением можно отнести к кусочно-гладким системам благодаря разрывной зависимости силы трения от относительной скорости  $v$  в точке  $v = 0$ . Пример осциллятора с трением, предложенный Андроновым и др. [1] (см. ниже рис. 8), стал впоследствии популярной моделью для тестирования новых аналитических методов [4, 20]. Тем не менее, эта система отражает лишь малую часть особенностей динамики систем с трением: в частности, в ней отсутствуют положения равновесия с нулевой скоростью скольжения. Кроме того, в общем случае контакта возможные направления скольжения неколлинеарны.

Известны также случаи, когда движение при наличии трения нельзя определить однозначно. Такие ситуации впервые были обнаружены П. Пенлеве [16] для трения скольжения и Дж. Джеллеттом [11] для трения покоя. Представляется целесообразным включить все известные случаи нерегулярного поведения в предмет теории бифуркаций и разработать подходы к их анализу.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе формулируются законы трения и предлагается общая классификация фрикционных контактов. Представленные здесь примеры могут служить базовыми моделями реальных систем и применяться в качественном анализе.

Третий раздел посвящен изучению бифуркаций положений равновесия в системах с согласованным законом трения. В отличие от гладкого случая (1.1), системы с трением, как правило, обладают семействами положений равновесия. При изменении параметров может меняться как число таких семейств, так и число компонент в их дополнении. Установлены типичные бифуркации и получены условия их возникновения.

В четвертом разделе обсуждаются бифуркации периодических орбит в системах с согласованным законом трения. Специфической особенностью динамики являются переходы от покоя к скольжению и обратно, приводящие к разрывам матрицы фундаментальных решений.



Системы с несогласованным законом трения рассматриваются в пятом разделе. Наряду с бифуркациями, присущими системам предыдущего типа, здесь возможны особенности, обычно называемые катастрофами. Соответствующими примерами могут служить парадоксы несуществования или неединственности решений, аналогичные особенностям проектирования многообразий. Затем следуют заключительные замечания.

## 2. Общая классификация фрикционных контактов

Основные законы трения были открыты Леонардо да Винчи пять веков назад; один из них устанавливает пропорциональность силы трения нормальной нагрузке. В последующем для описания трения в различных практических задачах предлагались различные соотношения, включая формулы Амонтана, Кулона, Штрибека, Армстронга и другие. Их применение предполагает существование в каждой точке контакта единственного *нормального направления*  $\vec{n}$ , что позволяет разложить реакцию на нормальную компоненту  $N\vec{n}$  и тангенциальную составляющую  $\vec{T}$ , т. е. *силу трения*. Математическая формулировка общего закона трения имеет вид

$$\vec{T} = \vec{T}(N, q, \dot{q}), \quad (2.1)$$

где  $q \in \mathbb{R}^n$  — вектор обобщенных координат. Будем считать, что вектор  $\vec{T}$  направлен противоположно скорости скольжения, а его модуль пропорционален  $N$ .

### 2.1. Размерность контакта

Будем понимать под *размерностью контакта* размерность множества возможных реакций. В отсутствие трения реакция коллинеарна нормали, что соответствует  $1D$ ; случай  $2D$  соответствует таким контактам, для которых направление скольжения фиксировано; наконец, для  $3D$ -контактов скольжение может происходить в любом направлении, перпендикулярном нормали. К примеру, колесо поезда движется вдоль рельса ( $2D$ ) (рис. 1), а вращающийся волчок «гуляет» в любом направлении ( $3D$ ) (рис. 2).

В случае  $2D$ -контакта величина  $T$  в уравнении (2.1) скалярна, для ее расчета примем закон Амонтана–Кулона вида

$$T = -\mu|N|\operatorname{sign} v, \quad (2.2)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения,  $v$  — скорость скольжения. В  $3D$ -случае скорость  $\vec{v}$  является двумерным вектором, и закон (2.2) записывается в форме

$$\vec{T} = -\mu|N|\frac{\vec{v}}{|v|}. \quad (2.3)$$

### 2.2. Скольжение и качение/покой

Если скорость скольжения  $v$  равна нулю, формулы (2.2) и (2.3) неприменимы. Данные ситуации соответствуют качению тела по опоре без проскальзывания или его полной остановке. Для расчета силы трения можно использовать формулу (2.3), заменяя скорость  $\vec{v}$  ускорением  $\vec{w}$  [16]:

$$\vec{T} = -\mu|N|\frac{\vec{w}}{w}. \quad (2.4)$$

Наконец, в случае  $v = 0, w = 0$  закон трения многозначен, т. е. на вектор  $T$  накладывается единственное ограничение вида

$$|T| \leq \bar{\mu}|N|, \quad (2.5)$$

где  $\bar{\mu}$  — коэффициент статического трения.

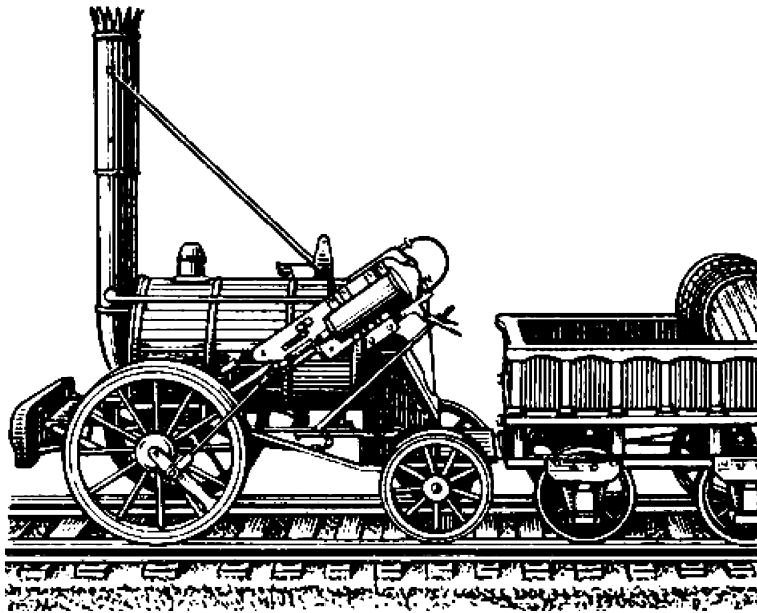


Рис. 1. 2D-контакт.

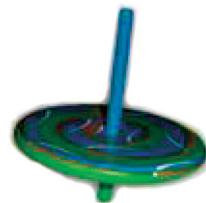


Рис. 2. 3D-контакт.

Для учета адгезии полагают  $\mu < \bar{\mu}$ ; в более реалистичных моделях учитывается зависимость коэффициента  $\mu$  от скорости  $v$  (Штрибек-эффект), причем для малых значений  $|v|$  можно считать  $\mu \approx \bar{\mu}$ .

### 2.3. Влияние трения на нормальную реакцию

Важным свойством фрикционных контактов, наличие которого существенно упрощает исследование динамики, является независимость нормальной реакции  $N$  от силы трения  $T$ . К примеру, для шара, движущегося по горизонтальной плоскости, значение  $N$  равно весу вне зависимости от наличия и характера трения. Дадим следующее определение.

**Определение 1.** Фрикционный контакт назовем *согласованным*, если нормальная реакция  $N$  не зависит от наличия и характера трения.

**Замечание.** В [13] было дано следующее определение согласованного закона трения: нормальная реакция не зависит от обобщенных координат и скоростей. Это требование более жестко по сравнению с определением 1: к примеру, ему не удовлетворяет шар, движущийся по неплоской поверхности (гладкой или шероховатой).

Отметим, что класс систем с согласованными контактами весьма узок: помимо шара или колеса, движущихся по данной поверхности, к нему относятся тонкие пластины, скользящие по плоскости. Согласно определению 1, контакты на рис. 1 согласованы, а на рис. 2 — нет.

Основное свойство систем с согласованными контактами состоит в их детерминированности: как показано Пожарицким [18], движение в таких системах при наличии кулоновского трения однозначно определяется при помощи принципа Гаусса. Следовательно, уравнения движения можно представить в виде (1.1), где правые части терпят разрыв в точках фазового пространства, соответствующих нулевой скорости скольжения в формулах (2.2), (2.3). Для 2D-контакта множество точек разрыва  $v = 0$  делит фазовое пространство на две части  $v < 0$  и  $v > 0$ , причем в силу (2.2) уравнения движения в этих областях различны, что характеризует системы Филиппова [5]. В случае 3D-контакта множество  $v = 0$  имеет коразмерность два, поэтому его дополнение в фазовом пространстве связано.

## 2.4. Возможность отрыва

С физической точки зрения, контакт между твердыми телами является односторонним, если они не приклеены друг к другу. Сохранение такого контакта обеспечивается внешними силами. К примеру, тяжелое тело может скользить по полу, но не по потолку. Если опорная поверхность неровная, то движущееся по ней тело может подскочить за счет сил инерции (подобные ситуации привычны в мотокроссе). Для обеспечения двустороннего контакта, исключающего возможность отрыва, необходимы дополнительные приспособления. В то же время двусторонние контакты проще для исследования, так как отрывам от связи обычно сопутствуют удары. Поэтому основная часть теоретических результатов получена для систем с двусторонними связями, а односторонняя динамика является прерогативой численных методов.

# 3. Бифуркации положений равновесия в системах с согласованными контактами

Системы с согласованными контактами наиболее просты и привлекательны для анализа; вполне естественно, что большинство исследований посвящено именно этому типу. Однако современные результаты далеки от полноты. Некоторые нерешенные проблемы обсуждаются ниже.

## 3.1. Системы с 2D-контактами

Простейшей базовой моделью является ползун с трением (2.2), (2.5), движущийся под действием заданной силы  $F = F(\lambda, x, \dot{x})$ , где  $\lambda$  — некоторый параметр [1] (рис. 3). Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = F(\lambda, q, v) + T. \quad (3.1)$$

Если бы трение отсутствовало, т. е.  $T \equiv 0$ , то положения равновесия можно было бы определить из условия

$$F(\lambda, q, 0) = 0. \quad (3.2)$$

Множество решений уравнения (3.2) в плоскости  $(\lambda, q)$  образует *кривую равновесий* (рис. 4а). В регулярных точках этой кривой выполнено неравенство  $\partial F / \partial q \neq 0$ , гарантирующее локальное существование ветви решений  $q(\lambda)$ . Типичная бифуркация типа «складка» (или «седло-узел») имеет место при условиях

$$\partial F / \partial q = 0, \quad \partial^2 F / \partial q^2 \neq 0, \quad \partial F / \partial \lambda \neq 0. \quad (3.3)$$

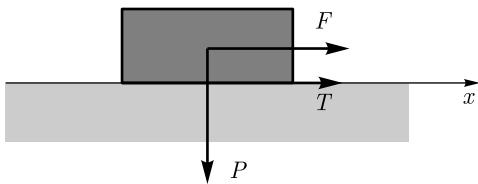


Рис. 3. Базовая 2D-модель: ползун.

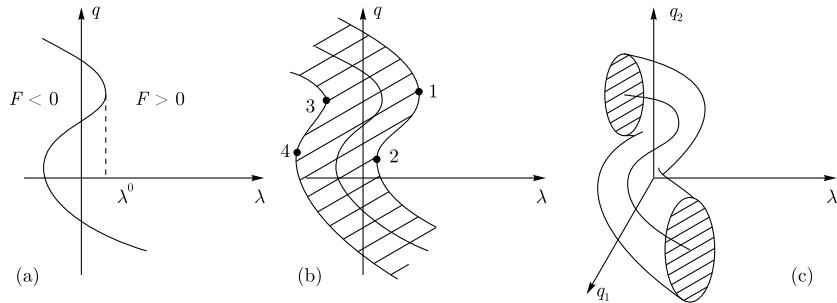


Рис. 4. Область равновесий в системе с трением.

В окрестности «складки» при изменении параметра сливаются два положения равновесия (устойчивое и неустойчивое) с последующим их исчезновением [6, 7].

При наличии трения покоя (2.5) условие равновесия имеет вид неравенства

$$|F(\lambda, q, 0)| \leq C, \quad C = \bar{\mu}|N|, \quad (3.4)$$

множество решений которого представляет собой область, ограниченную линиями  $L_+$  :  $F(\lambda, q, 0) = C$  и  $L_- : F(\lambda, q, 0) = -C$  (рис. 4б). Для фиксированного значения параметра прямая  $\lambda = \lambda^0$  пересекается с множеством (3.4) по некоторой системе интервалов, каждый из которых изображает некоторое семейство равновесий. Имеется две типичных бифуркации таких семейств: их исчезновение и слияние.

**Теорема 1.** Пусть в некоторой точке  $(\lambda^0, q^0) \in L_+$  выполнены условия (3.3), причем

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} > 0. \quad (3.5)$$

Тогда при переходе параметра через значение  $\lambda^0$  в системе (3.1) исчезает семейство положений равновесия (точка 1 на рис. 4б). Обратный знак неравенства (3.5) соответствует разделению семейства положений равновесия на два (точка 2).

Если условия (3.3), (3.5) выполняются в некоторой точке  $(\lambda^0, q^0) \in L_-$ , то при переходе параметра через значение  $\lambda^0$  два семейства положений равновесия сливаются в одно (точка 3). Обратный знак неравенства (3.5) соответствует рождению семейства равновесий (точка 4).

*Доказательство теоремы 1* несложно провести геометрически (рис. 4б). По существу, в каждом из четырех перечисленных случаев мы имеем стандартную «складку» на одной из граничных кривых  $L_+$  или  $L_-$ . Промежуток между двумя точками пересечения кривой и прямой  $\lambda = \text{const}$  либо принадлежит области (3.3) (рождение семейства), либо не принадлежит этой области (разделение семейства на две).

ПРИМЕР 1. Уравнение Дюффинга, описывающее движение упругого стержня в поле двух постоянных магнитов [6], запишем в виде

$$\ddot{q} = \lambda q - q^3. \quad (3.6)$$

Здесь параметр  $\lambda$  характеризует силу магнитного поля, значения  $\lambda > 0$  соответствуют притягивающим магнитам, а значения  $\lambda < 0$  — отталкивающим.

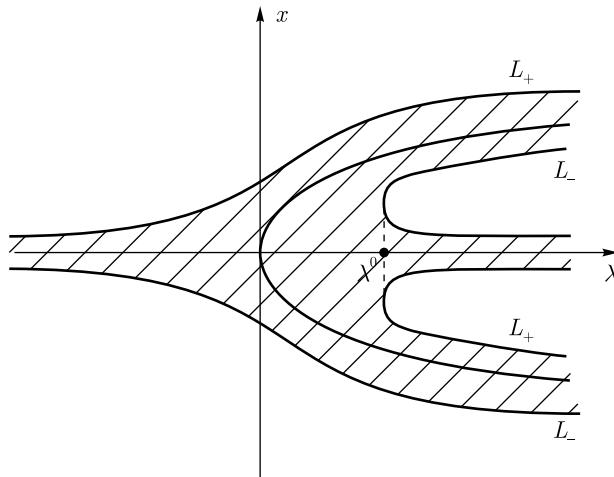


Рис. 5. Область равновесия осциллятора Дюффинга с трением.

Множество  $F = \lambda q - q^3 = 0$  на плоскости  $(\lambda, q)$  представляет собой «трезубец» (рис. 5); при значении  $\lambda = 0$  данная система с симметрией испытывает типичную бифуркацию «вилка» [6]. Добавим к системе (3.6) сухое трение, тогда область положений равновесия ограничивается линиями

$$L_+ : \quad \lambda = \frac{C}{q} + q^2, \quad L_- : \quad \lambda = -\frac{C}{q} + q^2. \quad (3.7)$$

Первая из линий (3.7) известна в теории функций как «трезубец Ньютона», вторая линия получается из первой заменой  $q \mapsto -q$ ; область (3.4), выделенная на рис. 5 штриховкой, вполне сходна со столовым прибором. В системе имеется единственная точка бифуркации  $\lambda = \lambda^0 = 3(C/2)^{2/3}$ : для значений  $\lambda < \lambda^0$  она обладает единственным интервалом положений равновесия, который при  $\lambda > \lambda^0$  распадается на три части. Отличие от стандартного сценария, описанного в теореме 1, объясняется симметрией системы.

### 3.2. Системы с 3D-контактами

В случае 3D-контакта для представления области равновесия (3.4) необходимо пространство размерности три. Базовой моделью может служить ползун (рис. 3), который может поступательно скользить по опоре в любом направлении. В пространстве  $(\lambda, q_1, q_2)$  векторное равенство  $\vec{F} = 0$  задает некоторую кривую, причем область (3.4) выглядит как «оболочка» этой кривой (рис. 4c). Сечения такой «колбасы» плоскостями  $\lambda = \text{const}$  определяют семейства равновесий системы. Наряду с двумя рассмотренными выше типами бифуркаций, типичных для систем с 2D-контактами, здесь имеется третий тип, который можно назвать «перфорацией».

Положим

$$\phi(\lambda, q) = F^2(\lambda, q, 0) - C^2, \quad (3.8)$$

тогда область равновесий (3.4) можно задать как  $\phi < 0$ .

**Теорема 2.** Допустим, что в точке  $(\lambda^0, q_1^0, q_2^0)$  выполнены соотношения

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} = \frac{\partial \phi}{\partial q_2} = 0, \quad A = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \neq 0, \quad \det B \neq 0, \quad B = \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j} \right\|, \quad (3.9)$$

где частные производные вычисляются при  $\lambda = \lambda^0, q = q^0$ . Если  $A > 0$ , то имеется три основных сценария перестройки области равновесия:

1. если матрица  $B$  положительно определена, то с ростом  $\lambda$  исчезает семейство положений равновесия (рис. 6a);

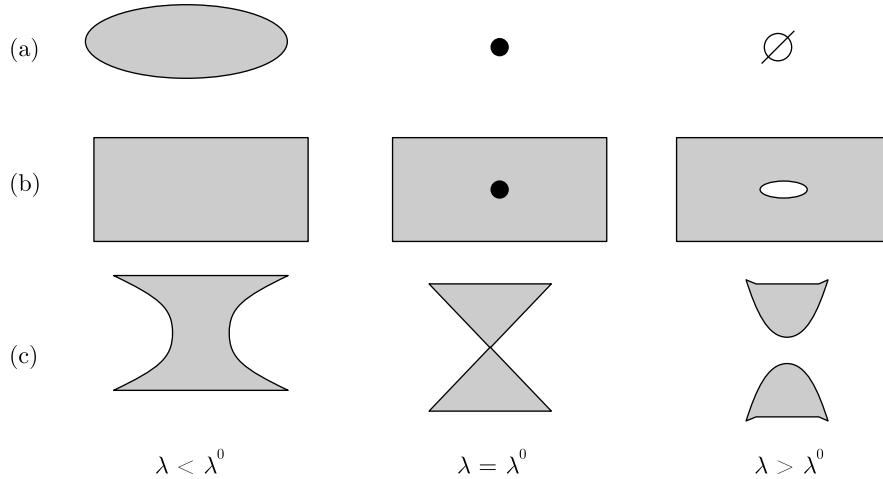


Рис. 6. Бифуркации множества равновесий в случае 3D-контакта.

2. если матрица  $B$  отрицательно определена, то с ростом  $\lambda$  происходит «перфорация» семейства положений равновесия (рис. 6b);

3. если  $\det B < 0$ , то с ростом  $\lambda$  семейство положений равновесия разделяется на два подсемейства (рис. 6c).

В случае  $A < 0$  имеют место те же три варианта перестройки, но при убывании параметра  $\lambda$ .

*Доказательство.* Пусть  $\kappa_1, \kappa_2$  — собственные значения матрицы  $B$ , а оси  $x_1, x_2$  коллинеарны соответствующим собственным векторам. Область равновесий задается неравенством

$$A(\lambda - \lambda^0) + \kappa_1(q_1 - q_1^0)^2 + \kappa_2(q_2 - q_2^0)^2 + \dots < 0, \quad (3.10)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по сравнению с написанными. В первом случае  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$ , и неравенство (3.10) определяет сечения параболоида. Во втором случае  $\kappa_1 < 0, \kappa_2 < 0$ , и точки внутри параболоида не входят в область равновесий. В третьем случае  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 < 0$ ; получаем сечения гиперболоида в окрестности седловой точки. На рис. 6 приведена геометрическая интерпретация этого анализа.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему из примера 1 под действием тех же активных сил, но с дополнительной степенью свободы:

$$\ddot{q}_1 = \lambda q_1 - q_1(q_1^2 + q_2^2) \quad \ddot{q}_2 = -q_2(q_1^2 + q_2^2), \quad (3.11)$$

что соответствует полю пары магнитов, установленных симметрично по оси  $q_1$ , и силе упругости при изгибе стержня. Множество положений равновесия системы (3.11) лежит в плоскости  $q_2 = 0$  и имеет тот же вид, что и для системы (3.6) (внутренний «трезубец» на рис. 5). Трехмерная область  $\phi < 0$  пересекается с плоскостью  $q_2 = 0$  в точках «вилки», заштрихованной на рис. 5, а толщина этой области (т. е. граничное значение  $|q_2|$ ) максимально в точках «трезубца»). Критическое значение параметра  $\lambda^0 = 3(C/2)^{2/3}$  соответствует бифуркации второго типа, причем вследствие симметрии системы возникает двойная перфорация области положений равновесия (рис. 7).

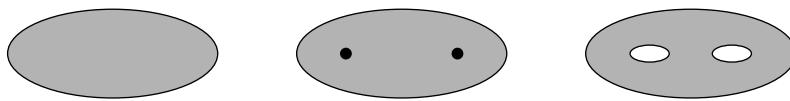


Рис. 7. Двойная перфорация в системе с симметрией.

#### 4. Бифуркации периодических орбит в системах с согласованными контактами

В гладкой динамической системе

$$\dot{x} = f(\lambda, x, t), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

периодические орбиты являются вторым по сложности типом движения после положений равновесия. Наличие типичных бифуркаций периодических орбит: «седло-узла», «удвоения периода» и «рождения тора» — может быть установлено из анализа линейной системы

$$\dot{Y} = f_x(\lambda, x^*(t), t)Y, \quad Y(t^0) = E_k, \quad (4.2)$$

где частные производные вычисляются на исследуемом периодическом движении  $x^*(t)$  периода  $\tau$ , а  $E_k$  — единичная матрица порядка  $k$ . Упомянутые выше бифуркации связаны с наличием у матрицы монодромии  $Y(t^0 + \tau)$  собственных значений, равных 1,  $-1$ , или  $e^{i\varphi}$  соответственно [6, 7].

Механическую систему с обобщенными координатами  $q \in \mathbb{R}^n$  представим в виде (4.1), полагая  $x = (q, \dot{q})$ ,  $k = 2n$ . Добавим к системе силы трения с произвольным законом (2.1). Условие согласованности фрикционных контактов, принятное в данном разделе, означает возможность однозначного представления реакций  $N$  как функций от  $x$  и  $t$ . Следовательно, добавление трения скольжения в систему (4.1) не изменяет общую схему исследования бифуркаций и их классификацию.

Специфика систем с трением проявляется для таких движений, в которых фазы скольжения перемежаются остановками. Имеется два типичных случая такого переключения: с фазой покоя и без таковой. В обоих случаях для анализа бифуркаций можно применять описанный выше метод линеаризации, дополненный правилом расчета матрицы фундаментальных решений при переключениях. Как было показано Айзерманом и Гантмахером,

в системах с разрывной правой частью эта матрица терпит разрывы в те моменты  $t_*$ , когда периодическая траектория пересекает поверхность разрыва  $\varphi(t, x) = 0$  [5]. Величина скачка определяется по формуле

$$Y(t_* + 0) - Y(t_* - 0) = \frac{(f^+ - f^-)\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f^-} Y(t_* - 0), \quad f^\pm = f(\lambda, x(t_* \pm 0), t_* \pm 0). \quad (4.3)$$

Получены также формулы [5] для расчета скачков матрицы  $Y(t)$  в случаях, когда часть траектории проходит по поверхности разрыва.

#### 4.1. Стационарная система

Базовая модель, изображенная на рис. 8, обобщает систему (3.1). Уравнение движения ползуна ленте, движущейся с постоянной скоростью  $u$ , имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + T(w) + F(t), \quad w = u - x_2, \quad (4.4)$$

где  $w$  — скорость ленты относительно тела.

Вначале будем считать, что  $F(t) \equiv 0$ , т. е. система стационарна. Впервые аналогичная система была рассмотрена в [1], а затем она приобрела широкую популярность, что обусловлено сочетанием простоты самой системы со сложностью ее динамики (см. [2, 20]). Было установлено, что периодические орбиты существуют лишь при условии, что функция  $T(w)$  в некотором интервале убывает. В частности, можно положить [3]

$$T(w) = \mu (\operatorname{sign} w - \alpha w + \beta w^3), \quad (4.5)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения при малых скоростях скольжения,  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые параметры.

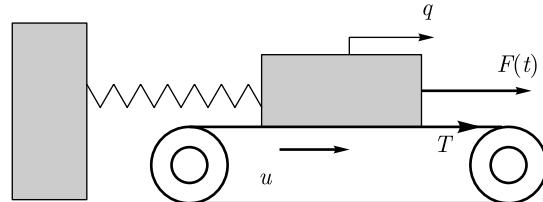


Рис. 8. Базовая модель для исследования периодических орбит.

Функция (4.5) нечетна и имеет минимум, равный

$$T(w_0) = \mu \left( 1 - \frac{2}{3} \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} \right), \quad w_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}.$$

Минимальное значение должно быть положительным, что ограничивает диапазон изменения параметров.

Функция  $f$  и матрица  $f_x$  в уравнениях (4.2), (4.3) выглядят так:

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + T(u - x_2) \end{pmatrix}, \quad f_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -T'(u - x_2) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где  $x_1 = q, x_2 = v$ .

При изменении направления скольжения матрица  $Y(t)$  терпит разрывы в соответствии с формулой (4.3), где  $\varphi(t, x) = u - x_2$ ,  $f = (u, -x_1 \pm \mu)^T$ , причем знак «плюс» или «минус» определяется знаком относительной скорости. Таким образом, если ползун «обгоняет» ленту, то

$$Y(t_* + 0) - Y(t_* - 0) = \frac{2\mu}{x_1 - \mu} JY(t_* - 0), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

а в случае, когда лента обгоняет ползун, величина скачка определяется формулой

$$Y(t_* + 0) - Y(t_* - 0) = -\frac{2\mu}{x_1 + \mu} JY(t_* - 0). \quad (4.8)$$

Уравнение (4.4) допускает единственное стационарное решение  $x = x_0 = T(u)$ . Если скорость движения ленты превышает критическую точку функции (4.5), т. е.  $u > w_0$ , то это решение устойчиво, при значении  $u = w_0$  характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней, а в случае  $u < w_0$  решение неустойчиво, а в его окрестности имеется предельный цикл. Такое поведение при квазистатическом изменении параметра  $u$  характеризует бифуркацию Пуанкаре–Андронова–Хопфа [6, 7]. Для значений  $u$ , достаточно близких (но меньших)  $w_0$ , во всех точках периодической орбиты выполнено неравенство  $v < u$ , т. е.  $w > 0$  (лента обгоняет ползун). Следовательно, фундаментальная матрица решений  $Y(t)$  удовлетворяет уравнению (4.2) с правой частью (4.6).

При дальнейшем уменьшении скорости ленты  $u$  амплитуда орбиты растет, что в итоге приводит к смене ее типа: интервалы скольжения перемежаются остановками, во время которых ползун движется совместно с лентой, т. е.  $w = 0$ . Фаза совместного скольжения оканчивается, когда упругая сила пружины сравнивается с максимумом трения покоя, т. е.  $q = \mu$ . Движения такого типа орбитально асимптотически устойчивы, так как начальное возмущение исчезает после первой же фазы совместного скольжения.

## 4.2. Система с периодическим воздействием

Допустим теперь, что функция  $F(t)$  в уравнении (4.4) периодична по времени с некоторым периодом  $\tau$ . При этом для построения периодических орбит требуется численное интегрирование [3]. При построении матрицы фундаментальных решений  $Y(t)$  для движений без фазы совместного скольжения можно пользоваться формулами (4.2), (4.3). Формулы (4.7) и (4.8) примут, соответственно, вид

$$Y(t_* + 0) - Y(t_* - 0) = \frac{2\mu}{x_1 - \mu - F(t_*)} JY(t_* - 0) \quad (4.9)$$

и

$$Y(t_* + 0) - Y(t_* - 0) = -\frac{2\mu}{x_1 + \mu - F(t_*)} JY(t_* - 0). \quad (4.10)$$

Основное отличие от стационарного случая состоит в характере движений, включающих интервалы совместного движения ползуна и ленты: здесь переход от застоя к скольжению происходит при разных значениях переменной  $x_1$ , поэтому вывод об (орбитальной) устойчивости таких движений не переносится на систему с периодическим воздействием. Фаза совместного движения ползуна и ленты описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

причем матрица  $Y(t)$  остается неизменной. Переход от этой фазы к интервалу относительного скольжения происходит в такой момент времени  $t_*$ , для которого величина  $| -x_1 + F(t_*) |$  становится больше коэффициента трения  $\bar{\mu}$ . При этом  $f^+ = f^-$ , т. е. матрица  $Y(t)$  не испытывает разрыва.

Напротив, если в момент  $t = t_*$  происходит остановка скольжения (лента догоняет ползун), то

$$f^- = \begin{pmatrix} u \\ -x_1 + \mu + F(t_*) \end{pmatrix} \quad f^+ = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Расчет скачка по формуле (4.3) приводит в данном случае к такому результату:

$$Y(t_* + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t_* - 0). \quad (4.12)$$

Формула (4.12) показывает, что наличие фазы совместного скольжения приводит к вырождению матрицы фундаментальных решений. Аналогичное соотношение было получено другим методом в [3]. Таким образом, для периодического движения, включающего интервал совместного скольжения, одно из собственных значений матрицы монодромии необходимо равно нулю. Второе собственное значение действительно, оно определяет устойчивость движения данного типа, а также его бифуркации (седло-узел или удвоение периода).

Специфическая разрывная бифуркация «касание–скольжение» возникает, когда периодическое движение меняет тип за счет включения в него интервала совместного скольжения. Численные исследования [4, 22] показывают, что такая бифуркация может иметь различные сценарии. Некоторые общие результаты о разрывных бифуркациях представлены в [2].

## 5. Бифуркации в системах с несогласованными контактами

При наличии в системе несогласованных контактов нормальные реакции не могут быть определены независимо от сил трения. В этом случае для определения обобщенных ускорений и нормальных реакций необходимо решить нелинейную алгебраическую систему уравнений, включающую уравнения динамики, а также уравнения связей:

$$A\ddot{x} = F(x, \dot{x}) + T(N, x, \dot{x}), \quad \psi_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (5.1)$$

где  $r$  — число связей. Если система (5.1) имеет единственное решение в некоторой области фазового пространства, то в этой области ее исследование может быть проведено при помощи методов, описанных в предыдущем разделе. Наряду с этим известны примеры, когда решение не существует или неединственно, называемые парадоксами Пенлеве [11, 16].

### 5.1. Представление движения в пространстве состояний и особенности проектирования

Как отмечено Джеллеттом [11], неопределенность в определении движения в системе с трением обусловлена неполнотой задания ее состояния: этой неопределенности можно избежать, если считать известными не только значения координат и скоростей, но и реакции связей. Аналогичные суждения высказывались впоследствии многими учеными, в частности, Моро рекомендовал [15] учитывать значения реакции в численных алгоритмах.

Размерность пространства состояний  $S$  складывается из размерности фазового пространства  $k = 2n$  и суммарной размерности реакций в точках контакта. Действительным движениям соответствуют лишь такие точки  $(x, R) \in S$ , для которых выполняются условия контакта и принятые законы трения. В системе без трения реакции однозначно определяются фазовыми переменными  $x = (q, \dot{q})$  и активными силами. Поэтому траектории  $x(t), R(t)$  в пространстве  $S$  заполняют многообразие  $M$  размерности  $k$ , для которого проекция  $\pi$  на фазовое пространство  $\mathbb{R}^k$  взаимно-однозначна. Наличие трения приводит к деформации многообразия  $M$ , причем отображение  $\pi : M \mapsto \mathbb{R}^k$  для случая несогласованных контактов становится, как правило, необратимым. Типичным примером особенности может служить «складка»: в некоторой области фазового пространства имеется два значения реакции, согласных с законами трения, а вне этой области допустимых значений реакции нет.

## 5.2. Стержень на опоре

Наиболее простым и известным примером 2D-системы с несогласованным контактом может служить однородный стержень на шероховатой плоскости (рис. 9) [8, 14, 17]. В качестве обобщенных координат  $q_1, q_2$  возьмем координаты точки контакта  $C$ ,  $q_3$  — угол наклона стержня к опоре. Пусть масса и центральный радиус инерции стержня равны единице, а длина стержня равна  $2l$ . Для трения примем закон Кулона (2.3)–(2.5).

Запишем уравнения динамики в виде

$$w_1 - hw_3 = av_3^2 + F_1 + T, \quad w_2 + aw_3 = hv_3^2 + F_2 + N, \quad w_3 = F_3 - aN + hT, \quad (5.2)$$

$$h = l \sin q_3, \quad a = l \cos q_3, \quad v_i = \dot{q}_i, \quad w_i = \ddot{q}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где функции  $F_i(x, v)$  заданы.

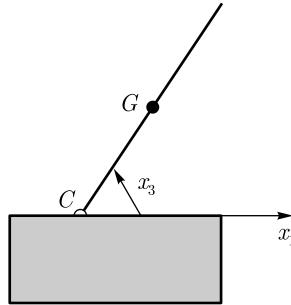


Рис. 9. Базовая модель несогласованного 2D-контакта.

Будем считать связь между стержнем и опорой двусторонней, тогда она задается уравнением  $q_2 = 0$ , откуда  $w_2 = 0$  (случай односторонней связи рассмотрен в [8]). Система уравнений (5.2) содержит три неизвестных:  $w_1, w_3$  и  $N$ . Если скорость скольжения  $v_1$  положительна, то подстановка формулы (2.2) приводит систему (5.2) к виду

$$w_1 - hw_3 = av_3^2 + F_1 - \mu|N|, \quad aw_3 = hv_3^2 + F_2 + N, \quad (5.3)$$

$$w_3 = F_3 - aN - \mu h|N|.$$

Исключая из последних двух равенств (5.3) неизвестную  $w_3$ , получим следующее уравнение относительно  $N$ :

$$(1 + a^2)N + \mu ah|N| = \bar{F}_1, \quad \bar{F}_1 = aF_3 - F_2 - hv_3^2. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) определяет кусочно-линейное отображение прямой  $(N)$  в прямую  $(\bar{F}_1)$ ,  $F = aF_3 - F_2$  с изломом в начале координат. Если параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$\mu|a|h < 1 + a^2, \quad (5.5)$$

то это отображение обратимо, т. е. для любых приложенных сил нормальная реакция определена однозначно. При обратном знаке неравенства (5.5) имеем особенность типа «складка»: образ отображения (5.4) — полуось, состоящая из чисел того же знака, что  $a$ . Каждая из точек этой полуправой имеет два прообраза, а точки противоположной полуправой не имеют прообразов. Это означает, что для достаточно больших значений коэффициента трения в рассматриваемой системе возникают парадоксальные ситуации несуществования и неединственности движения в зависимости от приложенных сил, называемые парадоксами Пенлеве. Если параметр  $\mu$  возрастает от нуля, то критическое его значение

$$\mu = \mu^* = \frac{1 + a^2}{|a|h},$$

при котором неравенство (5.5) перейдет в равенство, соответствует специфической бифуркации, или катастрофе: движение с данными начальными условиями «раздваивается» либо исчезает (рис. 10).

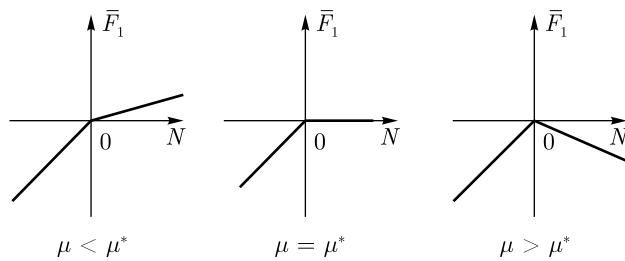


Рис. 10. Катастрофа «складка».

В данном случае отображение кусочно-линейно, поэтому формулы (3.3), описывающие складку для гладкой функции, заменяются условием

$$\frac{\partial \bar{F}_1(-0)}{\partial \bar{F}_1(+0)} < 0.$$

К аналогичному выводу приводит рассмотрение случая  $v_1 < 0$ , при этом в левой части формулы (5.4) сумма заменяется разностью тех же членов, а условие регулярности (5.5) сохраняется.

Если в данный момент времени  $v_1 = 0$ , то трение описывается законом (2.4), (2.5). Исключая в системе (5.2) переменную  $w_3$ , получим (при учете равенства  $w_2 = 0$ ):

$$-ahT + (a^2 + 1)N = \bar{F}_1 \quad w_1 - T - \frac{h}{a}N = \bar{F}_2, \quad \bar{F}_2 = F_1 + \frac{h}{a}F_2 + av_3^2. \quad (5.6)$$

Соотношения (5.6) определяют отображение  $\Pi : (\pi, N) \mapsto (\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ , где вспомогательная переменная  $\pi$  определяется по-разному в зависимости от типа движения (см. рис. 11): затененные сектора соответствуют отсутствию скольжения, стрелки в двух других секторах показывают направление скольжения. Отображение  $\Pi$  непрерывно и кусочно-линейно, оно

имеет шесть компонент (по три в верхней и нижней полуплоскости). Условие обратимости этого отображения имеет вид [8]

$$\det J_k > 0, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (5.7)$$

где  $J_k$  — матрица Якоби каждой из компонент отображения  $\Pi$ .

Непосредственная проверка показывает: из неравенства (5.5) следует (5.7), т. е.  $\Pi$  обратимо. При обратном знаке неравенства (5.5) два неравенства (5.7) имеют противоположный смысл. При этом образ линии  $N = 0$  «перекрещивается» с образом одной из биссектрис  $N = \pm\pi$  (в зависимости от знака величины  $a$ ), т. е. изменяется ориентация этой пары осей.

Данный тип особенности называют «сборкой»: при любых значениях внешних сил система (5.6) разрешима, причем число решений может достигать трех (сохранение равновесия или начало скольжения с двумя разными ускорениями). На рис. 11б схематично показана половина сборки, вторая половина симметрична первой относительно вершины.

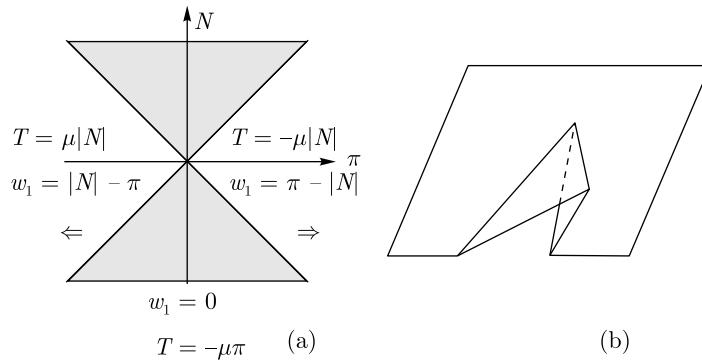


Рис. 11. Катастрофа «сборка».

### 5.3. Тело с двумя точками 2D-контакта

Тяжелое твердое тело скользит (вправо) по горизонтальной шероховатой плоскости, опираясь на нее двумя точками (бипод, см. рис. 12). Тянувшая сила  $F$  горизонтальна, а ее линия действия проходит через центр масс тела. Основные уравнения динамики приводят к следующим соотношениям:

$$F - mw - (T_1 + T_2) = 0, \quad N_1 + N_2 - P = 0, \quad a(N_2 - N_1) - h(T_1 + T_2) = 0, \quad (5.8)$$

где  $P$  — вес тела,  $h$  — высота центра масс над опорой,  $a$  — расстояние от проекции центра масс на плоскость до каждой из точек контакта. Систему (5.8) несложно преобразовать к виду

$$mw = F + T_1(N_1) + T_2(N_2), \quad (5.9)$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \left( P - \frac{h}{a}(F - mw) \right), \quad N_2 = \frac{1}{2} \left( P + \frac{h}{a}(F - mw) \right),$$

где зависимости  $T(N)$  описываются формулами (2.2), (2.4) и (2.5).

Заметим, что рассматриваемая система имеет единственную степень свободы, а размерность пространства ее состояний  $S$  равна шести. Ввиду этого возможные особенности не исчерпываются складками.

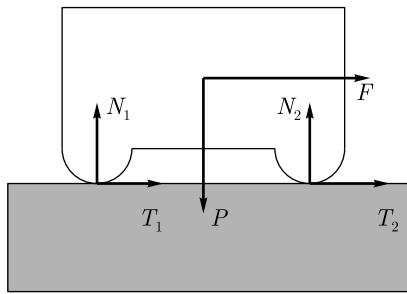


Рис. 12. Силы, действующие на бипод.

При скольжении вправо сила трения направлена влево, поэтому в принятых на рис. 12 обозначениях имеем

$$T_i = -\mu_i |N_i|, \quad i = 1, 2. \quad (5.10)$$

Подставляя выражения (5.10) в формулу (5.9), получим

$$z = \varphi(z), \quad \varphi(z) = \bar{\mu}_1 |\bar{P} - z| + \bar{\mu}_2 |\bar{P} + z|, \quad (5.11)$$

$$z = 1 - \frac{mw}{F}, \quad \bar{P} = \frac{aP}{hF}, \quad \bar{\mu}_i = \frac{h}{2a} \mu_i.$$

Правая часть формулы (5.11) кусочно-линейна по  $z$  с угловыми точками  $z_1 = \bar{P}$  и  $z_2 = -\bar{P}$ , причем угловые коэффициенты звеньев равны:  $k_1 = -\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2$  в интервале  $z \in (-\infty, -\bar{P})$ ;  $k_2 = \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1$  в интервале  $z \in (-\bar{P}, \bar{P})$ , и  $k_3 = \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1$  в интервале  $z \in (\bar{P}, \infty)$ . Решениям уравнения (5.11) соответствуют точки пересечения ломаной с биссектрисой первой четверти, так как правая часть положительна. Число этих точек зависит от расположения правой вершины ломаной, т. е. от величины  $\varphi(\bar{P})$ , а также значения  $k_3$ . Несложный геометрический анализ приводит к следующему выводу: если  $k_3 < 1$ , то уравнение (5.11) имеет единственное решение (рис. 13а); в случае  $k_3 > 1$ ,  $\bar{\mu}_2 < 0.5$  имеется два решения (рис. 13б), а в случае  $k_3 > 1$ ,  $\bar{\mu}_2 > 0.5$  — ни одного (рис. 13с).

Таким образом, в случае  $v > 0, k_3 > 1$  в системе имеется особенность типа «складка».

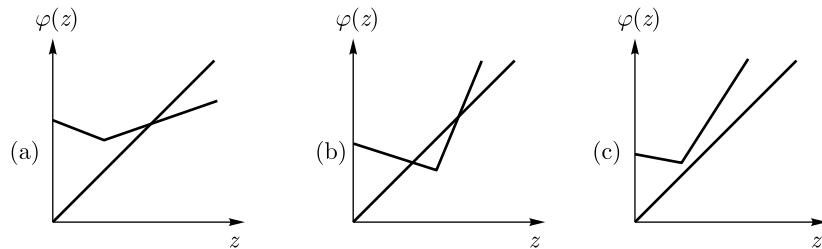


Рис. 13. Геометрическое решение уравнения (5.11).

Аналогичный вывод справедлив и в случае  $v < 0, k_3 > 1$ : для геометрического решения уравнения (5.11) здесь следует достроить графики на рис. 13 в области  $z < 0$  и исследовать их пересечения с биссектрисой второй четверти.

Допустим теперь, что тело в данный момент покоятся. Тогда  $w \geq 0$ , так как в случае  $w < 0$  баланс сил в проекции на опору невозможен. Равновесие системы возможно, если выполнено неравенство

$$\mu_1 |N_1(0)| + \mu_2 |N_2(0)| \geq 0, \quad (5.12)$$

где значения нормальных реакций вычисляются по формулам (5.9) при  $w = 0$ . Графически неравенство (5.12) означает, что  $\varphi(1) \geq 1$ , т. е. точка с единичной абсциссой графика функции  $\varphi(z)$  (рис. 13) лежит выше биссектрисы. Система не имеет решений, отличных от равновесного, если неравенство

$$\varphi(z) > z \quad (5.13)$$

выполняется для всех  $z < 1$ , что соответствует значениям  $w > 0$ . В случае  $\bar{P} \geq 1$  (вершина ломаной лежит правее точки равновесия) условия (5.12) и (5.13) равносильны; если же  $\bar{P} < 1$ , то условие (5.13) складывается из неравенства (5.12) и требования  $\varphi(\bar{P}) > \bar{P}$  (вершина ломаной лежит выше биссектрисы), эквивалентного неравенству  $\bar{\mu}_2 > 0.5$ .

В случае

$$\bar{P} < 1, \quad \bar{\mu}_2 < 0.5$$

наряду с равновесием возможно начало скольжения тела вправо, причем с двумя различными ускорениями. Следовательно, здесь имеется особенность типа сборка (см. рис. 11). Наличие такой особенности в системе с одной степенью свободы объясняется достаточно высокой размерностью пространства состояний  $S$ .

#### 5.4. Тело с точкой 3D-контакта

Простейшая система, в которой имеется несогласованный 3D-контакт, представлена на рис. 2: тяжелое твердое тело, опирающееся на горизонтальную шероховатую плоскость одной из своих точек  $C$ , которая может перемещаться по опоре или отрываться от нее. Уравнения движения в форме Ньютона–Эйлера имеют вид

$$m\vec{w}(G) = \vec{F} + \vec{R}, \quad \frac{d(\mathbf{J}\vec{\Omega})}{dt} = \vec{M} + \vec{r} \times \vec{R}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{GC}, \quad (5.14)$$

где  $\vec{w}(G)$  и  $\vec{\Omega}$  — скорость центра масс и угловая скорость,  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  — главный вектор и главный момент активных сил,  $\mathbf{J}$  — центральный тензор инерции.

Пусть  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  — ускорение точки контакта в связанной с плоскостью системой координат (ось аппликат направлена вертикально вверх). Для определения этого вектора, а также реакции плоскости, имеем в силу (5.14) следующее уравнение:

$$m\vec{w} = \vec{F}^* + B\vec{R}, \quad \vec{F}^* = \vec{F} + m(\mathbf{J}^{-1}\vec{M}) \times \vec{r}, \quad B\vec{R} = \vec{R} + m\mathbf{J}^{-1}(\vec{r} \times \vec{R}) \times \vec{r}, \quad (5.15)$$

причем матрица  $B$  симметрична и положительно определена. Решив данное уравнение, можно затем однозначно определить угловое ускорение из второго соотношения (5.14).

Если скорость точки контакта  $\vec{v}$  отлична от нуля, то реакция выражается формулой

$$\vec{R} = N(\vec{k} - \mu\vec{l}), \quad \vec{l} = \vec{v}/|\vec{v}|,$$

где  $\vec{k}$  — базисный орт. Нормальная реакция  $N$  определяется из условий дополнительности

$$w_3 \geq 0, \quad N \geq 0, \quad Nw_3 = 0. \quad (5.16)$$

Равенство  $w_3 = 0$  равносильно уравнению

$$F_3^* + N(B\vec{k}, \vec{k} - \mu\vec{l}) = 0,$$

имеющему единственное решение, согласное с (5.16) при условии, что коэффициент при  $N$  положителен, т. е.

$$\mu(B\vec{k}, \vec{l}) < (B\vec{k}, \vec{k}). \quad (5.17)$$

Обратный знак неравенства (5.17) свидетельствует о наличии в системе особенности типа «складка».

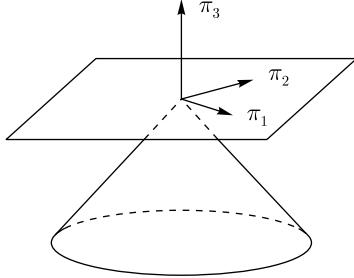


Рис. 14. Вспомогательное пространство параметров.

Допустим теперь, что  $\vec{v} = 0$ , тогда реакция  $R$  удовлетворяет соотношениям (2.4), (2.5), а также условию дополнительности (5.16). На рис. 14 во вспомогательном пространстве параметров  $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  построены области  $\Psi_j$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), соответствующие различным типам решения уравнения (5.15). Точки полупространства  $\Psi_1 = \{\pi_3 > 0\}$  сопоставляются движениям с отрывом от опоры, при этом

$$\vec{w} = \vec{\pi}, \quad \vec{R} = 0. \quad (5.18)$$

Внутренность конуса  $\Psi_2 = \{\pi_3 < -\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}\}$  соответствует отсутствию скольжения, при этом

$$\vec{w} = 0, \quad \vec{R} = -(\mu\pi_1, \mu\pi_2, \pi_3). \quad (5.19)$$

Подставим поочередно формулы (5.18) и (5.19) в уравнение (5.15), определяющее отображение  $\Pi : \vec{\pi} \mapsto \vec{F}^*$ . В итоге получим взаимно-однозначные компоненты этого отображения, образы которых — полупространство и конус

$$\bar{\Psi}_1 = \Pi(\Psi_1) = \Psi_1, \quad \bar{\Psi}_2 = \Pi(\Psi_2) = BC_\mu\Psi_2, \quad C_\mu = \text{diag}\{\mu, \mu, 1\}.$$

В случае, если матрица  $B$  диагональна (т. е. точки  $C$  и  $G$  лежат на одной вертикали), области  $\bar{\Psi}_1$  и  $\bar{\Psi}_2$  не пересекаются. В общем случае условие отсутствия у этих областей общих точек выражается неравенством

$$\mu\sqrt{b_{13}^2 + b_{23}^2} < b_{33}, \quad (5.20)$$

где  $b_{ij}$  — элементы матрицы  $B$ .

Обратный знак неравенства (5.20) свидетельствует о неоднозначности решения уравнения (5.15), т. е. при одних и тех же условиях возможно как сохранение контакта без проскальзывания, так и отрыв волчка от опоры. Более подробно условия отрыва волчка от опоры обсуждались в [9, 10].

Наконец, точки в промежутке между конусом и плоскостью

$$\Psi_3 = \{0 > \pi_3 > -\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}\}$$

отвечают началу скольжения тела по опоре, при этом

$$\Pi(\pi) = m(\pi_1, \pi_2, 0) + m\pi_3(c_1, c_2, 0) + \pi_3(-c_1, -c_2, 1)B, \quad c_{1,2} = \pi_{1,2}/\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}. \quad (5.21)$$

Как показано в [8], отображение  $\Pi$  в области  $\Psi_3$  может не быть взаимно-однозначным даже при выполнении неравенства (5.20), причем наряду с движением без скольжения могут существовать до четырех направлений, в которых может начаться скольжение. Такая особенность, присущая отображению трехмерного пространства, не представляется в виде комбинации типичных складок и сборок.

## 6. Выводы

Многообразие проблем, с которыми приходится сталкиваться при аналитическом или численном исследовании систем с сухим трением, можно проиллюстрировать на примерах простейших базовых моделей таких систем. Важно учитывать, что случай согласованных контактов, которому посвящено подавляющее большинство всех работ, является весьма частным и нетипичным. Рассмотрение этого случая удается провести с достаточной полнотой благодаря возможности сведения его к системам Филиппова. Ряд новых результатов, представленных выше, связан с анализом бифуркаций семейств положений равновесия в таких системах. Кроме того, представлен новый алгоритм построения фундаментальной матрицы решений в окрестности периодической орбиты в неавтономном случае.

Системы с несогласованными контактами также можно представить в виде систем Филиппова, но лишь в некоторой части фазового пространства: как показывает пример стержня на шероховатой плоскости, при любом коэффициенте трения существуют конфигурации, в которых нормальную реакцию нельзя определить однозначно. Волчок на шероховатой плоскости может потерять контакт с опорой несмотря на то, что нормальная реакция в момент, предшествующий отрыву, не стремится к нулю. Кроме того, имеется неопределенность в направлении, в котором начинается проскальзывание точки контакта. Возможность подобного нерегулярного поведения обычно не учитывается при численном анализе систем с трением, что подчас приводит к неверным качественным выводам.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00718.

## Список литературы

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1956. 915 с.  
[Andronov A. A., Khaikin S. E., Vitt A. A. Theory of oscillators. Oxford: Pergamon Press, 1965.]
- [2] di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., Homer M. E. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems // Chaos Solitons Fractals, 1999, vol. 10, pp. 1881–1908.
- [3] di Bernardo M., Kowalczyk P., Nordmark A. Sliding Bifurcations: A novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry-friction oscillators // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2003, vol. 13, no. 10, pp. 2935–2948.
- [4] di Bernardo M. et al. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems // SIAM Rev., 2008, vol. 50, No. 4, pp. 629–701. Olivar Tost, Gerard; Piironen, Petri T. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems. SIAM Rev. 50 (2008), no. 4, 629–701.

- [5] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с. [Filippov A. F. Differential equations with discontinuous righthand sides. Dordrecht: Kluwer, 1988.]
- [6] Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. 5th ed. New York: Springer, 1997. 459 p. [Гукенхаймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.-Ижевск: Инст. комп'ют. исслед., 2002. 560 с.]
- [7] Iooss G., Joseph D. D. Elementary stability and bifurcation theory. New York: Springer, 1981. [Иоос Г., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркации. М.: Мир, 1983. 300 с.]
- [8] Иванов А. П. Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением // ПММ, 2008, т. 72, вып. 4, с. 531–546.
- [9] Ivanov A. P. On detachment conditions in the problem on the motion of a rigid body on a rough plane // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, No. 4, pp. 355–368.
- [10] Ivanov A. P. Geometric representation of detachment conditions in systems with unilateral constraint // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, No. 5, pp. 435–442.
- [11] Jellett J. H. A Treatise on the Theory of Friction. Dublin; London: McMillan, 1872. 220 p.
- [12] Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S., Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2003, vol. 13, No. 8, pp. 2157–2188.
- [13] Leine R. I., van de Wouw N. Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints. New York: Springer, 2007. 232 p.
- [14] Lötstedt P. Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems // ZAMM, 1981, vol. 61, No. 12, pp. 605–615.
- [15] Moreau J. J. Indetermination due to dry friction in multibody dynamics // 4th European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering (Jyväskylä, Finland, July 24–28, 2004), vol. 2 (CD ROM).
- [16] Painlevé P. Leçons sur frottement. Paris: Hermann, 1895. [Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехтеориздат, 1954. 316 с.]
- [17] Painlevé P. Sur le lois du frottement de glissement // C. R. Acad. Sci. Paris, 1905, vol. 141, pp. 401–405.
- [18] Пожарицкий Г. К. Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ, 1961, т. 25, вып. 3, с. 391–406.
- [19] Poincaré H. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Paris: Villars, 1879. 93 p.
- [20] Teufel A., Steindl A., Troger H. Classification of non-smooth bifurcations for friction oscillator // E. S. Pyatnitskiy 10th Intern. Workshop «Stability and oscillations of nonlinear control systems» (Moscow, Russia, June 3–6, 2008): Book of Abstracts, pp.305–308.
- [21] Utkin V. I. Sliding modes in control and optimization. New York: Springer, 1992. 286 p.
- [22] Yoshitake Y., Sueoka A. Forced self-excited vibration with dry friction // Applied nonlinear dynamics and chaos of mechanical systems with discontinuities / Eds: M. Wiercigroch and B. de Kraker. Singapore: World Sci., 2000, pp. 237–259.