

О влиянии леерной связи на движение гантелевидного тела в центральном ньютоновском силовом поле

А. В. Родников

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Россия, Москва, 105005, 2-ая Бауманская, 5
springer@inbox.ru

Получено 25 октября 2009 г.

Рассматривается движение механической системы, состоящей из гантелевидного твердого тела и материальной точки, перемещающейся вдоль невесомого троса, концы которого закреплены на концах твердого тела, в центральном ньютоновском силовом поле. Такая система может быть названа системой с леерной связью. В предположении, что центр масс системы движется по круговой орбите, масса материальной точки мала по сравнению с массой гантели, длина троса мала по сравнению с радиусом орбиты и все движения происходят в плоскости орбиты; изучается влияние движения материальной точки на вращение гантели вокруг ее центра масс. Отмечается, что такое влияние будет существенным только в окрестности сепаратрисного движения гантели. Устанавливается существование неустойчивых асимптотических движений гантели, стремящихся к колебаниям вокруг касательной к орбите. Начальные условия для таких движений образуют поверхность в фазовом пространстве системы, уравнение которой записывается в приближенной аналитической форме. Уравнение этой поверхности рассматривается как критерий для определения направления вращения гантели из окрестности неустойчивого равновесия. В случае относительно длинного троса и если гантель образована равными массами, околосепаратрисное движение гантели описывается приближенными аналитическими формулами, в случае относительно короткого троса возмущенное движение гантели изучается численно в двумерных сечениях четырехмерного пространства начальных условий.

Ключевые слова: космическая тросовая система, односторонняя связь, центральное ньютоновское поле, функция Лагранжа, возмущенная система

A. V. Rodnikov

On the leier influence on a dumbbell motion in the central Newtonian force field

We consider the system moving in the Newtonian central force field and consisting of a dumbbell satellite and a particle. The particle coasts along on the cable with ends placed in the dumbbell endpoints. We call such cable a «leier». We suppose the system mass center describes circular orbit, the particle mass is small in comparison with the dumbbell mass and the cable length is small in comparison with orbit radius. Assuming the cable don't leave the orbit plane we study the dumbbell rotations forced by the particle. We note that the particle sufficiently influence the dumbbell motion only in vicinity of the dumbbell rotation separatrix. We claim that there exist a set of the dumbbell unstable asymptotic motions tending to librations about the orbit tangent. Initial conditions for these motions compose a surface in the system phase space. We deduce an equation approximating this surface. We consider this equation as a criterion for the direction of the dumbbell rotation from the vicinity of unstable equilibria. We deduce formulae approximating the dumbbell near-separatrix motion if the cable is rather long and the dumbbell is composed of equal masses. Using numerical procedures, we analyse the dumbbell motion in two-dimensional transections of four-dimensional space of initial conditions if the cable is rather short.

Keywords: space tether system, unilateral constraint, central Newtonian field, Lagrangian, perturbed system

Mathematical Subject Classifications: 37N05, 70H03, 70H09



1. Введение

Космические тросовые системы на протяжении последних сорока лет остаются одной из самых популярных тем в динамике. Начиная с первых работ [2, 3], где была рассмотрена ставшая классической связка двух материальных точек, двигающаяся в центральном ньютоновском силовом поле, опубликованы сотни работ, посвященных различным динамическим и техническим аспектам космических систем, использующих тросы. Не претендуя на полноту списка, отметим монографии [5, 6, 9, 19], а также библиографию к ним и к [4]. В настоящее время исследуются как все более сложные элементы динамики связанных космических аппаратов (см., например, [7, 12, 14, 16]), так и системы, содержащие несколько тел или несколько тросов [21–23].

В настоящей работе рассматривается орбитальная система, являющаяся некоторым обобщением классической тросовой связки и состоящая из космической станции, на концах которой закреплен невесомый нерастяжимый трос, и небольшого груза (или кабины), перемещающегося по инерции и без трения по тросу. Такой трос может быть назван «леером» (от голландского «leier» — веревка, оба конца которой закреплены), а вся система — «системой с леерной связью». Следуя [2, 3], предполагается, что центр масс системы движется по круговой орбите (с центром в центре притяжения), а длина троса мала по сравнению с радиусом этой орбиты. Космическая станция моделируется как гантель, т. е. как твердое тело, состоящее из двух материальных точек, соединенных невесомым нерастяжимым стержнем. Изучаются только такие движения системы, в которых все ее элементы остаются в плоскости орбиты.

На практике леерная связка может быть использована для того, чтобы переместить некоторый груз с одного конца орбитальной станции на другой, если, например, перемещение вдоль самой станции по каким-либо причинам невозможно, для стабилизации станции в положении, «наклонном» к орбите (существование и устойчивость равновесных конфигураций системы с леерной связью изучены в [15, 24] с использованием [8]) и т. п. Отметим, что заменив кабину на леере захватывающим устройством, можно мягко (т. е. без скачков скорости и ускорения) захватывать неуправляемые космические тела, пролетающие в опасной близости от станции. (Возможность такого захвата, на основе «безударных движений» из [17], полученных с использованием [8, 20], теоретически обоснована в [18]).

В одном из предлагаемых вариантов захвата предполагается, что станция расположена по касательной к орбите, т. е. занимает неустойчивое «горизонтальное» положение. Если такое положение не будет каким-то образом стабилизировано, то даже маленький груз на леере способен перевернуть станцию. Поэтому актуальна задача исследования взаимного влияния движений гантели и кабины. Уравнения движения системы с леерной связью, помещенной в однородное силовое поле, проинтегрированы в [13], однако та же система, помещенная в центральное ньютоновское поле сил, по-видимому, неинтегрируема. Тем не менее, если масса кабины (или схвата) мала, в рамках сделанных предположений можно говорить о возмущении интегрируемой задачи о плоских движениях твердого тела на круговой орбите [1, 10, 11]. Известно, что движение орбитальной гантели относительно ее центра масс качественно совпадает с движением математического маятника и бывает трех типов: колебания вокруг направления на притягивающий центр, вращения вокруг центра масс и «сепаратрисное движение», стремящееся к «горизонтальному» равновесию. Может быть показано, что кабина на леере может качественно изменить относительное движение гантели только в некоторой окрестности сепаратрисного движения. Например, если гантель первоначально почти горизонтальна, возможны три варианта начала ее движения: перево-

рачивание против часовой стрелки, переворачивание по часовой стрелке и асимптотическое движение, стремящееся к колебаниям вокруг «горизонтального» равновесия. В настоящей работе определяются начальные условия, соответствующие таким асимптотическим движениям. Многообразие таких начальных условий представляется в виде двумерной поверхности в некоторой трехмерной проекции фазового пространства системы. Фактически, эта поверхность разделяет фазовое пространство на области левых и правых переворачиваний гантели. Приближенное аналитическое уравнение этой поверхности представляется в виде зависимости начального угла поворота и начальной угловой скорости гантели от начального положения и начальной относительной скорости кабины. Тем самым выводится критерий, позволяющий определить направление переворачивания гантели в зависимости от начальных условий, если первоначально гантель близка к «горизонтальному» положению. Исследуется асимптотика и некоторые характерные свойства поверхности асимптотических движений.

Близкое к сепаратрисному движение гантели, вызываемое движением кабины по лееру, в целом представляет собой последовательность полуоборотов гантели по и против часовой стрелки, начинающихся и заканчивающихся в окрестности «горизонтального» равновесия. По-видимому, в некоторых случаях может идти речь о хаотических чередованиях направления переворачивания гантели, однако этот вопрос требует дополнительного исследования. В настоящей статье в случае, когда гантель симметрична, т.е. образована равными массами, и длина троса достаточно велика по сравнению с длиной гантели, приближенно выписываются законы движения системы при правом и левом полуоборотах вне некоторых окрестностей «горизонтальных» равновесий. Тогда для описания движения на протяжении нескольких витков по орбите достаточно «сшить» приближенные решения задачи вне и в окрестностях «горизонтальных» равновесий (последние получены при выводе критерия для направления переворачивания гантели).

Рассматриваемая модель движения, вообще говоря, предназначена для относительно небольших промежутков времени. Поэтому имеет смысл изучать движение на протяжении одного-двух первых переворачиваний. В настоящей работе приводятся примеры численного анализа движения гантели на протяжении двух первых переворачиваний в случае, когда гантель несимметрична, а трос относительно короток. Для этого рассматриваются двумерные сечения четырехмерного пространства начальных условий, в которых строятся области, соответствующие четырем возможным типам движения гантели, а именно: а) поворот на угол, близкий к 2π по часовой стрелке; б) полуоборот по часовой стрелке, затем возвращение в положение, близкое к первоначальному; в) поворот на угол, близкий к 2π против часовой стрелки; г) полуоборот против часовой стрелки, затем возвращение в положение, близкое к первоначальному. Выделяются также области, где движение с натянутым тросом невозможно. Границы между этими областями, как это характерно для возмущенных систем, образуют многообразие весьма сложной формы. Часть точек этого многообразия соответствуют следу упомянутого выше многообразия асимптотических движений гантели, стремящихся к колебаниям вокруг положения, близкого к касательному к орбите, а другие соответствуют аналогичным движениям, возникающим после первого переворачивания гантели.

В настоящей работе развиваются результаты из [25].

2. Параметры и обозначения

Рассмотрим механическую систему, движущуюся в центральном ньютоновском силовом поле с притягивающим центром O_1 и состоящую из гантелевидного твердого тела A_1A_2

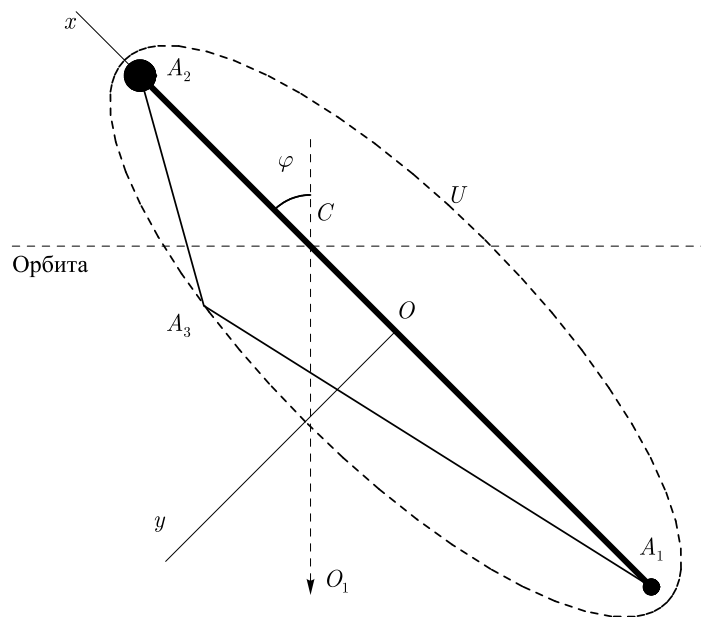


Рис. 1

и груза (или кабины) A_3 массы m_3 (см рис. 1), свободно передвигающегося вдоль невесомого нерастяжимого троса длины $2a$ с концами, закрепленными в точках A_1 и A_2 (назовем такой трос леером). Будем считать кабину материальной точкой, а твердое тело — гантелью, состоящей из материальных точек с массами m_1 и m_2 , соединенных невесомым нерастяжимым стержнем длины $2c$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $m_1 \leq m_2$.

Предположим, что центр масс системы C движется по круговой орбите с центром в O_1 , а длина леера мала по сравнению с радиусом этой орбиты. Ограничимся рассмотрением только таких движений, при которых все точки рассматриваемой системы остаются в плоскости орбиты. Заметим, что кабина не может выйти за пределы эллипса U с фокусами на концах гантели, эксцентриситетом $e = c/a$ и полуосьми a и $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. В нашем случае $0 < e < 1$. (В случае $e = 1$ фактически кабина движется вдоль гантели. Такая задача рассматривается в [23].)

Очевидно, что кабина может оказывать влияние на движение гантели только если трос натянут, то есть кабина находится на границе эллипса. В этом случае будем говорить, что кабина «находится на связи». В этом случае положение кабины относительно гантели можно определить эксцентрической аномалией эллипса по формулам

$$x = a \cos \gamma, \quad y = b \sin \gamma, \quad (1)$$

где x и y — координаты кабины в системе координат Oxy , O — геометрический центр гантели. Если же кабина окажется внутри эллипса, т. е. $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$, будем говорить, что кабина «сошла со связи».

Пусть $\mu = (m_2 - m_1) / (m_2 + m_1)$ и $\kappa = m_3 (m_1 + m_2) / 4e^2 m_1 m_2$. Обозначим через φ угол между O_1C и гантелью. Очевидно, что в рамках сделанных предположений безразмерные параметры e, μ, κ и безразмерные обобщенные координаты φ, γ полностью определяют конфигурацию рассматриваемой механической системы.

3. Условие нахождения на связи

Кабина будет находиться на связи, т. е. трос будет натянут, если (см. [15, 24])

$$2\sqrt{1-e^2}(1-e\mu\cos\gamma)(\varphi'+1)^2+4(1-e^2\cos^2\gamma)(1+\varphi')\gamma'+2\sqrt{1-e^2}\gamma'^2- \\ -3(1-e^2)\sin 2\gamma\sin 2\varphi+\sqrt{1-e^2}[3\cos 2\varphi\cos 2\gamma+1-e\mu\cos\gamma(1+3\cos 2\varphi)]\geq 0. \quad (2)$$

Здесь штрихом ()' обозначена производная по безразмерному времени τ , $\tau = G^{1/2}M^{1/2} \times \times |O_1C|^{-3/2}t$, G — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра.

4. Лагранжиан. Интеграл Якоби

Если кабина находится на связи, движение гантели и кабины вокруг общего центра масс описывается уравнениями с лагранжианом (см. [15, 24])

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \quad (3)$$

где

$$L_2 = \frac{1}{2} \left\{ \varphi'^2 + \kappa \left[(1 - 2e\mu\cos\gamma + e^2\cos^2\gamma)\varphi'^2 + 2\sqrt{1-e^2}(1-e\mu\cos\gamma)\varphi'\gamma' + (1-e^2\cos^2\gamma)\gamma'^2 \right] \right\},$$

$$L_1 = \kappa e \cos\gamma (e \cos\gamma - 2\mu) \varphi',$$

$$L_0 = \frac{3}{2} \cos^2\varphi + \kappa \left\{ \frac{9}{4}e^2\cos^2\varphi - \frac{3}{2}e\mu\cos\gamma + \frac{3}{4}e^2\cos^2\gamma - \frac{3}{4}e\mu \left[(1 - \sqrt{1-e^2})\cos(2\varphi - \gamma) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 + \sqrt{1-e^2})\cos(2\varphi + \gamma) \right] - \frac{3}{8} \left[(1 - \sqrt{1-e^2})^2 \sin^2(\varphi - \gamma) + (1 + \sqrt{1-e^2})^2 \sin^2(\varphi + \gamma) \right] \right\}.$$

Очевидно, что система с лагранжианом (3) допускает интеграл Якоби

$$L_2 - L_0 = h. \quad (4)$$

5. Достаточные условия колебательного движения гантели

В случае, когда $\kappa = 0$, т. е. когда можно пренебречь влиянием тела на леере на относительное движение гантели, система с лагранжианом (3) описывает плоские движения твердого тела вокруг центра масс, двигающегося по круговой орбите (см. [1]). Так как уравнения движения в этом случае совпадают с уравнениями движения математического маятника, существуют три типа движений гантели: вращение вокруг центра масс ($h > 0$), колебания вокруг направления на притягивающий центр ($h < 0$) и асимптотическое (сепаратрисное) движение, стремящееся к неустойчивому «горизонтальному» (касательному к орбите) положению ($h = 0$).

Пусть $\kappa \ll 1$, т. е. масса тела на леере мала, но ее влиянием нельзя пренебречь. Очевидно, в этой ситуации качественные изменения в поведении гантели могут произойти только при относительно малых $|h|$. Фактически, если значение константы интеграла Якоби близко к нулю, относительное движение гантели представляет собой последовательность полуоборотов по и против часовой стрелки. По-видимому, здесь можно говорить о хаотической смене направлений вращения гантели в те моменты, когда она близка к «горизонтальному»

положению. Тем не менее, можно указать простой критерий, выполнение которого гарантирует колебательный характер возмущенного движения гантели (возможно, с амплитудой, близкой к $\pi/2$). Заметим, что график функции $U = -L_0$ представляет собой «горную страну» с чередующимися «хребтами» $\varphi = \pi/2 + \pi k$ и «ущельями» $\varphi = \pi k$ (см. рис. 2). На каждом хребте есть «пики» $\gamma = \pi k$ и «перевалы» $\gamma = \pi/2 + \pi k$. (Здесь k — произвольное целое число.)

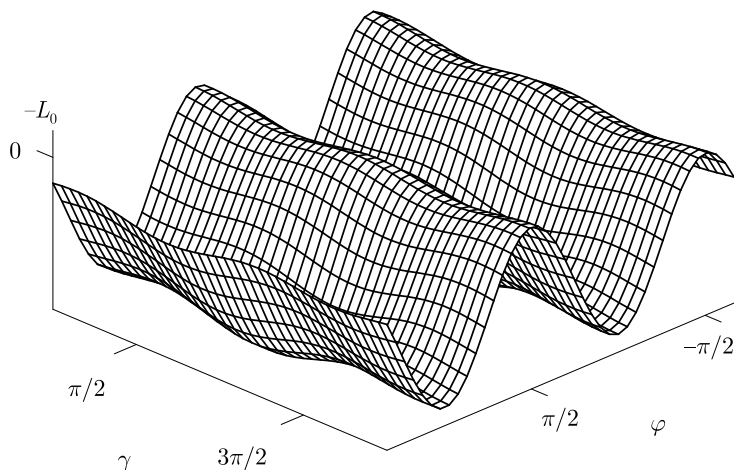


Рис. 2

Очевидно, что если константа интеграла Якоби меньше значения функции $-L_0$ на перевале, то движение гантели ограничено двумя соседними хребтами, т. е. если $h < 0$, то возможно только колебательное движение гантели. Такая ситуация возникает, например, если в начальный момент времени гантель не горизонтальна, кабина находится вне некоторых окрестностей точек $\gamma = \pi k$ и все начальные скорости равны нулю. Как показывает численный анализ движения системы, при достаточно больших начальных относительных скоростях кабины возникают вращательные движения гантели.

6. Редукция уравнений движения в окрестности горизонтального равновесия гантели

Если $h \approx 0$, то в какой-то момент времени гантель окажется в некоторой окрестности «горизонтального» равновесия. Выведем критерий, позволяющий определять направление дальнейшего вращения гантели. Не теряя общности, будем считать, что в начальный момент времени $\varphi \approx -\pi/2$. Используя замену $\varphi = -\pi/2 + \sqrt{\kappa}\psi$ и сохраняя в уравнениях движения только слагаемые порядка меньше, чем κ , получим

$$\psi'' - 3\psi + \sqrt{\kappa}D(\gamma, \gamma') = 0, \quad (5)$$

где

$$D(\gamma, \gamma') = e \sin \gamma (\mu - e \cos \gamma) \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} (\gamma'^2 + 3 \sin^2 \gamma)}{1 - e^2 \cos^2 \gamma} + 2\gamma' \right).$$

Уравнение движения кабины при этом окажется таким, как если бы гантель была зафиксирована в «горизонтальном» положении. Следовательно, γ как функция времени может

быть определена из

$$(1 - e^2 \cos^2 \gamma) \gamma'^2 - 3(1 - e^2) \sin^2 \gamma = h_2 = \text{const} \quad (6)$$

(см. [15, 24]). Решение (5) может быть представлено в виде

$$\psi(\tau) = p(\tau) + q(\tau), \quad (7)$$

где $q(\tau)$ — периодическая функция безразмерного времени (см. [25]),

$$p(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(C_+ \exp(\tau\sqrt{3}) + C_- \exp(-\tau\sqrt{3}) \right),$$

$$C_{\pm} = \sqrt{\kappa} (z_{\pm} - A_{\pm}(\gamma_0, \gamma'_0)),$$

$$z_{\pm} = \kappa^{-1/2} (\sqrt{3}\psi_0 \pm \psi'_0) = \kappa^{-1} (\sqrt{3}\varphi_0 + \sqrt{3}\pi/2 \pm \varphi'_0), \quad (8)$$

$$A_{\pm}(\gamma_0, \gamma'_0) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau\sqrt{3}) D(\gamma(\pm\tau, \gamma_0, \gamma'_0), \gamma'(\pm\tau, \gamma_0, \gamma'_0)) d\tau, \quad (9)$$

$\gamma_0, \gamma'_0, \varphi_0, \varphi'_0, \psi_0, \psi'_0$ — начальные значения $\gamma, \gamma', \varphi, \varphi', \psi, \psi'$.

Заметим, что если $C_+ = 0$, то имеет место асимптотическое решение (5), стремящееся к колебаниям около $\psi = 0$. Следовательно, поверхность $z_+ = A_+$ аппроксимирует множество таких начальных значений фазовых переменных рассматриваемой задачи, для которых гантель во все время движения остается в окрестности «горизонтального» положения равновесия. При этом если начальные условия таковы, что $z_+ > A_+$, то гантель перевернется против часовой стрелки, если же $z_+ < A_+$, то гантель перевернется по часовой стрелке. (Конечно, равенство $z_+ = A_+$ определяет границу между областями правых и левых переворачиваний гантели с некоторой погрешностью, так как для его вывода были использованы «укороченные» уравнения (5). Некоторое представление о величине этой погрешности дает рис. 3, на котором представлена кривая, являющаяся сечением поверхности $z_+ = A_+$ плоскостью $\gamma_0 = 12\pi/7, \varphi_0 = -\pi/2$. На этом рисунке крестиками обозначены найденные численно точки границы областей правых и левых переворачиваний. Вычисления проводились при $e = 0.5, \mu = 0.5, \kappa = 0.01$.)

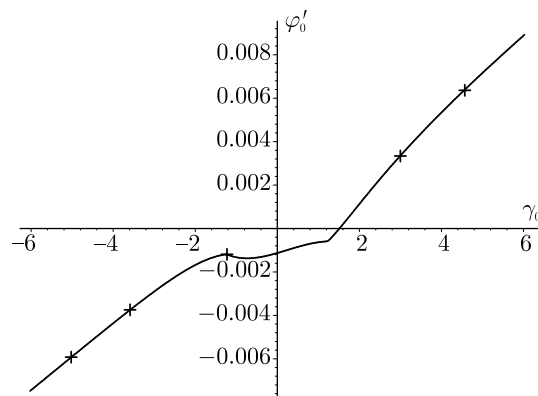


Рис. 3

7. Вычисление и свойства интеграла A_+

Заметим, что если $h_2 \neq 0$, то функция $f(\tau) = D(\gamma(\tau, \gamma_0, \gamma'_0), \gamma'(\tau, \gamma_0, \gamma'_0))$ является периодической функцией безразмерного времени τ с некоторым периодом T . Из равенства

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \exp(-\sqrt{3}\tau) f(\tau) d\tau = \exp(-nT\sqrt{3}) \int_0^T \exp(-\sqrt{3}\tau) f(\tau) d\tau$$

следует, что

$$A_+ = \frac{1}{1 - \exp(T\sqrt{3})} \int_0^T \exp(-\sqrt{3}\tau) f(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Если $h_2 > 0$, с помощью замены

$$d\tau = \pm V(y) dy, \quad V(y) = \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 y}{h_2 + 3(1 - e^2) \sin^2 y}} \quad (11)$$

(10) преобразуется к виду

$$A_+ = \pm \frac{1}{1 - \exp(\sqrt{3} \int_0^{2\pi} V(y) dy)} \int_{\gamma_0}^{\gamma_0 \pm 2\pi} \exp(\pm \sqrt{3} \int_y^{\gamma_0} V(\xi) d\xi) \cdot f_{\pm}(y) dy, \quad (12)$$

где

$$f_{\pm}(y) = e(\mu - e \cos y) \sin y \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cos^2 y} \left(\frac{1}{V(y)} + 3V(y) \sin^2 y \right) \pm 2 \right).$$

Если же $h_2 < 0$, та же замена приводит к равенству

$$A_+ = \frac{\exp(-\sqrt{3}(T/2 \pm t_1))}{1 - \exp(-\sqrt{3}T)} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \left(f_-(y) \exp\left(\sqrt{3} \int_{\gamma_2}^y V(\xi) d\xi\right) \pm \right. \\ \left. \pm f_+(y) \exp\left(-\sqrt{3} \int_{\gamma_2}^y V(\xi) d\xi\right) \right) dy \pm \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \exp\left(\pm \sqrt{3} \int_y^{\gamma_0} V(\xi) d\xi\right) f_{\pm}(y) dy, \quad (13)$$

где

$$T = 2 \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} V(y) dy, \quad t_1 = 2 \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} V(y) dy,$$

$$\gamma_2 = \arccos H + \pi k, \quad \gamma_1 = \pi(k+1) - \arccos H, \quad H = \sqrt{1 + \frac{h_2}{3(1 - e^2)}},$$

причем $k = 0$, если $0 < \gamma_0 < \pi$, и $k = 1$, если $\pi < \gamma_0 < 2\pi$. В (12), (13) знак «+» следует выбирать, если $\gamma'_0 > 0$, а знак «-», если $\gamma'_0 < 0$.



Отметим, однако, что при $h_2 < 0$ замена (11) имеет особенность при $y = \gamma_{1,2}$. Поэтому для численного анализа интеграла A_+ удобнее использовать не имеющую особенности замену

$$d\tau = \pm \frac{W(x)dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-e^2}}, \quad W(x) = \sqrt{\frac{1-e^2H^2\cos^2x}{1-H^2\cos^2x}}$$

(в этом случае $\cos y = \pm H \cos x$, γ_2 превращается в 0, γ_1 превращается в π).

Если $h_2 = 0$, для вычисления (9) следует сделать замену

$$d\tau = \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2y}}{\sqrt{3(1-e^2)}\sin y} dy.$$

Получающийся при этом интеграл будет собственным.

Будем рассматривать интеграл A_+ как функцию переменных γ_0, γ'_0 и параметров e, μ . Можно доказать, что эта функция обладает следующими свойствами.

1. A_+ является линейной функцией μ , т. е. $A_+ = A_0 + \mu A_\mu$, причем A_0 есть π -периодическая функция γ_0 , A_μ есть 2π -периодическая функция γ_0 .
2. Если $\gamma_0 = 0$ или $\gamma_0 = \pi$ и $\gamma'_0 = 0$, то $A_+ = 0$. Если же $\gamma_0 = \pi/2$ и $\gamma'_0 = 0$, то $A_+ = \mu e \sqrt{3(1-e^2)}$.
3. Если $\gamma'_0 = \pm \sqrt{3(1-e^2)}/e$, то

$$A_+ = \frac{(2e \pm \sqrt{3})\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{4-3e^2}} \left(2\mu\sqrt{4-3e^2} \cos(\gamma_0 \mp \arcsin e) - e \cos \left(2\gamma_0 \mp \arcsin \frac{e}{\sqrt{4-3e^2}} \right) \right).$$

4. Если $\gamma'_0 \rightarrow \infty$, то A_+ стремится к линейной по γ'_0 функции, т. е. $A_+ = A_{1+}\gamma'_0 + A_{0+} + o(1/\gamma'_0)$, где

$$A_{1+} = \sqrt{1-e^2} \left(\mu e \cos \gamma_0 - 1 + \frac{\pi \sqrt{1-e^2\cos^2\gamma_0}}{2E(e)} \right),$$

$$A_{0+} = (1-e^2) \frac{K(e)}{E(e)} + \sqrt{3(1-e^2)} \left(\frac{\pi \int_0^{\gamma_0} \sqrt{1-e^2\cos^2x} dx}{2E(e)} - \gamma_0 + \mu e \sin \gamma_0 \right) +$$

$$+ 2\mu e \cos \gamma_0 + e^2 \sin^2 \gamma_0 - \frac{e^2 + 1}{3},$$

где $K(e)$ и $E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем e соответственно.

Примеры поверхностей $z = A_+$, где A_+ вычисляется по формулам этого раздела, приведены на рис. 4 ($e = 1/2, \mu = 2/3$) и рис. 5 ($e = 3/4, \mu = 1/5$). На этих рисунках из $z = A_+$ вырезаны диски, где движение с натянутым тросом невозможно (в изображаемой области фазового пространства области схода со связи близки к цилиндрам, параллельным оси z).

8. Околосепаратрисное движение гантели в случае относительно длинного троса

Решение (7) позволяет описать движение гантели только в окрестности горизонтального равновесия. При изучении околосепаратрисного движения вне таких окрестностей (или,

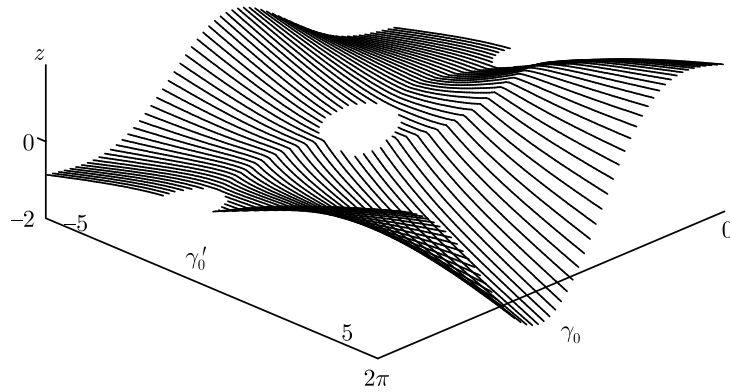


Рис. 4

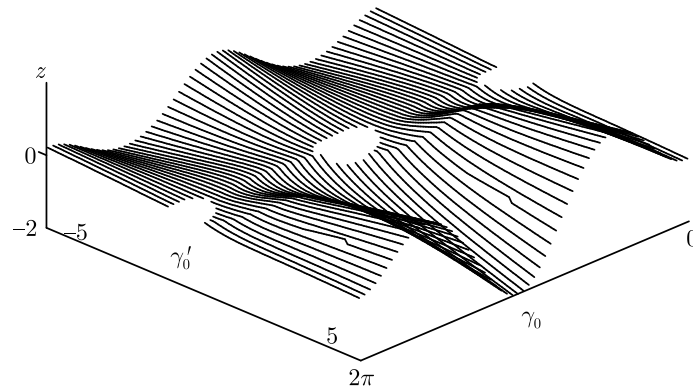


Рис. 5

точнее, между такими окрестностями) ограничимся случаем, когда гантель симметрична, т. е. составлена из равных масс ($\mu = 0$) и $e < \sqrt[4]{\kappa}$, т. е. длина троса достаточно велика по сравнению с длиной гантели. (Например, если $\kappa = 0.01$, то достаточно взять $e \leq 0.316$.) Для определенности будем считать, что в момент времени $\tau = 0$ гантель вертикальна. Запишем закон околосепаратрисного движения в виде

$$\varphi(\tau) = \varphi_S(\tau) + \sqrt{\kappa}\psi(\tau), \quad (14)$$

где $\varphi_S(\tau) = \pi/2 - 2 \arctan \exp(\mp \tau \sqrt{3})$ — закон сепаратрисного движения свободной гантели («-» выбирается для вращения против часовой стрелки, «+» — для вращения по часовой стрелке). Подставим (14) в уравнения движения для φ и сохраним в них только слагаемые порядка меньше, чем κ и e^4 . После преобразований получим

$$(p+1)^2 \psi'' - 3(p^2 - 6p + 1)\psi - 12\sqrt{\kappa}\psi^2 \sqrt{p}(p-1) = 0, \quad (15)$$

где $p = \exp(2\tau\sqrt{3})$. Заметим, что (15) не зависит от γ и e . Будем искать решение (15) в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\kappa}$. Подставляя это решение в (14) и сохраняя только слагаемые

порядка менее, чем $\kappa^{3/2}$, получим

$$\varphi(\tau) = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{p}} \right) + \frac{\sqrt{\kappa} \psi_1 (p^2 + 4\tau p \sqrt{3} - 1)}{4\sqrt{3p}(1+p)} \pm \left(\frac{\kappa \psi_1^2 (24p\tau^2(1-p) + 4\tau\sqrt{3}(p+1)(p^2+p+1) + 3(p+1)^2(1-p))}{96\sqrt{p}(1+p)^2} \right), \quad (16)$$

где $\psi_1 = \psi'(0)$, «+» соответствует вращению против часовой стрелки, а «-» — вращению по часовой стрелке.

Заметим, что правая часть (16) — нечетная функция τ . Следовательно, если в некоторый момент времени $-\tau_*$ гантель занимала положение, соответствующее $\varphi = -\varphi_0$ и $\varphi' = \varphi'_0$, то в момент времени τ_* гантель займет симметричное относительно направления на притягивающий центр положение, соответствующее $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi' = \varphi'_0$. Таким образом, в рамках сделанных предположений можно утверждать, что точки выхода гантели из окрестности (радиуса $\sqrt{\kappa}$) равновесия $\varphi = \pm\pi/2$ и входа гантели в окрестность равновесия $\varphi = \mp\pi/2$ симметричны относительно местной вертикали, причем вход и выход происходят с одинаковыми угловыми скоростями.

Для определения движения тела на лере во время околосепаратрисного движения гантели вне окрестностей горизонтальных равновесий подставим (14) в уравнение движения для γ . Учитывая (16) и пренебрегая слагаемыми порядка κ , e^4 и выше, получим

$$v'' + \frac{3}{2} \sin(2v) + e^2 q(v, v', t) = 0, \quad (17)$$

где $v = \varphi + \gamma$. Выражение для $q(v, v', t)$ не приводится в связи с его громоздкостью. Решение уравнения (17) может быть представлено приближенной квадратурой

$$\tau = \pm \tau_0(v, v_0) \pm e^2 \tau_1(v, v_0), \quad (18)$$

где

$$\tau_0(v, v_0) = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{h_3 + \frac{3}{2} \cos 2\nu}}, \quad \tau_1(v, v_0) = \int_{v_0}^v \frac{Q(\nu, v_0) d\nu}{\left(h_3 + \frac{3}{2} \cos 2\nu\right)^{3/2}},$$

$$Q(v, v_0) = \int_{v_0}^v q \left(\nu, \pm \sqrt{h_3 + \frac{3}{2} \cos 2\nu}, \pm \tau_0(\nu, v_0) \right) d\nu, \quad h_3 = v_{01}^2 - \frac{3}{2} \cos 2v_0,$$

v_0 и v_{01} — значения v и v' в тот момент времени, когда гантель вертикальна.

«Сшивая» решения типа (7), (6) для движения в окрестности горизонтальных равновесий и типа (16), (18) для движения вне таких окрестностей, мы можем проследить движение гантели на протяжении нескольких полуоборотов. (При этом, в частности, может возникнуть ситуация, когда гантель не выйдет за пределы очередной окрестности горизонтального равновесия: после одного или нескольких полуоборотов гантель будет стремиться к колебаниям вокруг касательной к орбите, т. е. будет иметь место асимптотическое движение, начинающееся с одного или нескольких полуоборотов). Следует, однако, помнить, что получаемые «сшиванием» приближенные законы движения будут достаточно хорошо аппроксимировать движение системы только на небольших (порядка нескольких витков системы по орбите) промежутках безразмерного времени τ .



9. Примеры численного анализа движения гантели для сравнительно короткого троса

В заключение приведем несколько примеров численного анализа околосепаратрисных вращений гантели в двумерных сечениях четырехмерного пространства начальных условий рассматриваемой задачи в случае, когда трос сравнительно короток и/или гантель несимметрична. Ограничимся двумя первыми полуоборотами. В этом случае возможны четыре варианта движений — это описанные во Введении случаи а)–д). Для обозначения соответствующих областей будем использовать следующие виды штриховки (штриховка типа е) соответствует областям схода со связи, т. е. тем ситуациям, когда движение с натянутым тросом в течение первых двух полуоборотов невозможно):



Наиболее сложная ситуация наблюдается в плоскостях $\varphi = \text{const}$, $\varphi'_0 = \text{const}$ (см. рис. 6, построенный для $\mu = 1/3$, $e = 1/3$; здесь изображены области движений гантели, начинающихся из горизонтального равновесия $\varphi = -\pi/2$ с нулевой начальной угловой скоростью $\varphi'_0 = 0$). Заметим, однако, что количество полосок с горизонтальной штриховкой конечно, т. е. при относительно больших начальных скоростях тела на леере имеют место только «вращательные» движения гантели. Отметим также, что, как и следовало ожидать, при увеличении $|\varphi'_0|$ начинают преобладать «вращательные» движения, а при увеличении $|\varphi_0 \pm \pi/2|$ — «колебательные».

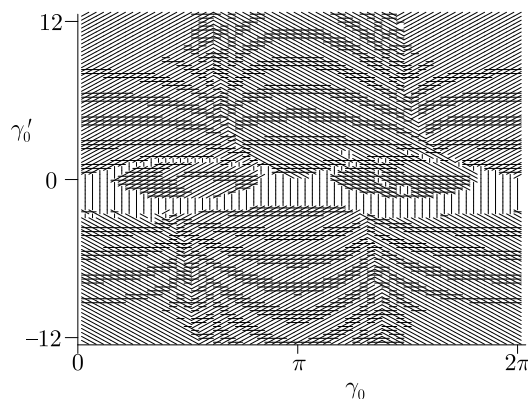


Рис. 6

В плоскостях вида $\gamma_0 = \text{const}$, $\varphi'_0 = \text{const}$ «полоски» меняются на «лепестки» (рис. 7 для $\mu = 0$, $e = 0.9$, $\gamma_0 = 5\pi/7$, $\varphi'_0 = 0$ и рис. 8 для $\mu = 0$, $e = 1/2$, $\gamma_0 = \pi/4$, $\varphi'_0 = 0$). Заметим, что с ростом эксцентриситета e , т. е. при уменьшении длины троса, область схода со связи начинает преобладать. Можно также показать, что с уменьшением e размеры «лепестков» уменьшаются.

Наиболее просто диаграмма различных движений гантели выглядит в плоскостях вида $\gamma_0 = \text{const}$, $\gamma'_0 = \text{const}$ (рис. 9 для $\mu = 1/3$, $e = 1/3$, $\gamma_0 = \pi/2$, $\gamma'_0 = -3$ и рис. 10 для $\mu = 1/3$, $e = 1/3$, $\gamma_0 = \pi/6$, $\gamma'_0 = 3$), по крайней мере в достаточно малой окрестности горизонтального равновесия.

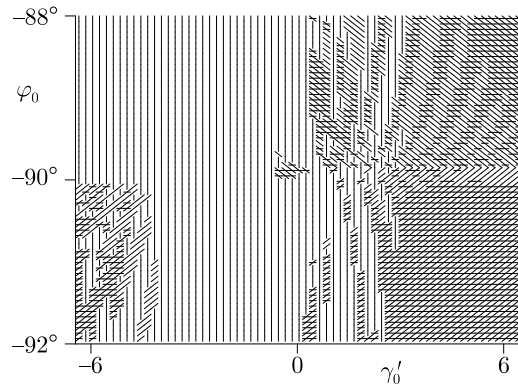


Рис. 7

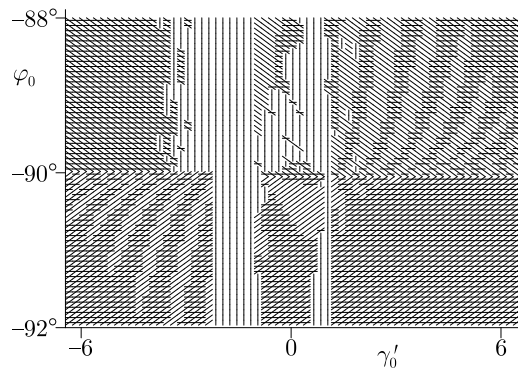


Рис. 8

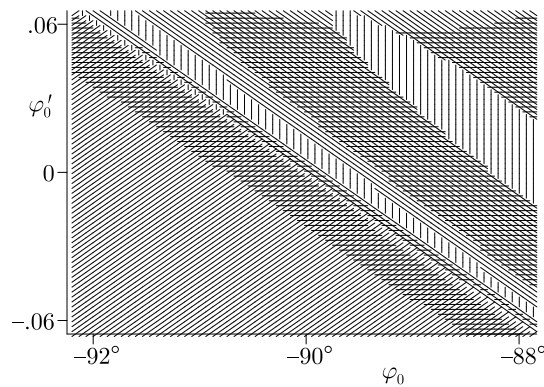


Рис. 9

Во всех изображенных примерах расчеты проводились при $\kappa = 0.01$.

Важно отметить, что во всех примерах границы между областями наклонных штриховок разных направлений отвечают асимптотическим движениям гантели в окрестности касательной к орбите. Эти границы во всех произведенных расчетах фактически совпадают с соответствующими сечениями поверхности $z_+ = A_+$. В то же время границы между областями, содержащими и не содержащими горизонтальную штриховку, образуют многообразие, соответствующее асимптотическим движениям, начинающимся с полуоборота и стремящимся к колебаниям около касательной к орбите. Как характерно для возмущенных систем рассматриваемого типа, это многообразие имеет весьма сложную форму.

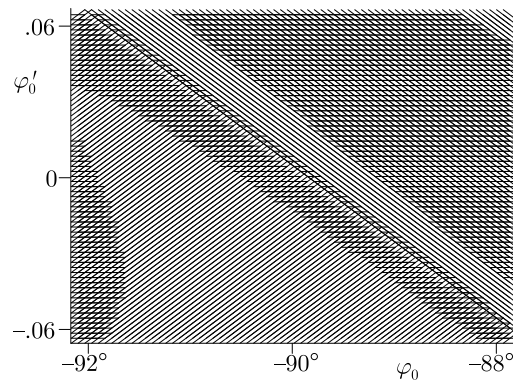


Рис. 10

Выводы

В настоящей работе изучаются околосепаратрисные вращения вокруг центра масс гантелевидного спутника, движущегося по круговой орбите, вызванные движением тела малой массы по лееру, т. е. по тросу, концы которого закреплены на спутнике. Выведен критерий для определения направления вращения гантели из неустойчивого равновесия, для чего в фазовом пространстве построена поверхность асимптотических движений, стремящихся к колебаниям гантели около горизонтального (т. е. касательного к орбите) положения. Для описания движения гантели в целом в случае гантели, составленной из равных масс, и относительно длинного троса выведен приближенный закон околосепаратрисного движения системы вне окрестностей неустойчивых равновесий. Для случая несимметричной гантели или относительно короткого троса приведены примеры численного анализа движения гантели на протяжении первых двух переворачиваний.

Благодарности

Автор благодарен В. В. Белецкому, Ю. Ф. Голубеву, И. И. Косенко, В. В. Сазонову и С. Я. Степанову за полезные замечания и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 06-01-90505-БНТС-а и 07-01-00663-а).

Список литературы

- [1] Белецкий В.В. *Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс*. М., Наука, 1965
- [2] Белецкий В.В., Новикова Е.Т. Об относительном движении связки двух тел на орбите. *Космические исследования*. 1969, т.7, №3, с. 377–384.
- [3] Белецкий В.В. Об относительном движении связки двух тел на орбите (II). *Космические исследования*. 1969, т.7, №6, с. 827–840.
- [4] Белецкий В.В. *Очерки о движении космических тел*. Из-е 3-е. М., URSS, 2009.
- [5] Иванов В.А., Ситарский Ю.С. *Динамика полета системы гибко связанных космических объектов*. М., Машиностроение, 1986.
- [6] Белецкий В.В., Левин Е.М. *Динамика космических тросовых систем*. М., Наука, 1990.

- [7] Li-Shengwang, Shyn-Feng Cheng. Dynamics of Two Spring-Connected Masses in Orbit. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1996, 63, pp. 289–312.
- [8] Иванов А.П. *Динамика систем с механическими соударениями*. М., Международная программа образования, 1997.
- [9] *Tethers In Space Handbook*. Edited by M.L. Cosmo and E.C. Lorenzini. Smithsonian Astrophysical Observatory for NASA Marshall Space Flight Center Grant NAG8-1160 monitored by C.C. Rupp M.L. Cosmo and E.C. Lorenzini, Principal Investigators. 3rd Edition, 1997.
- [10] Krupa M., Schagerl M., Steindl A., Troger H. Stability of Relative Equilibria. Part I: Comparison of Four Methods. *Meccanica*, 2001, 35, pp. 325–351.
- [11] Krupa M., Steindl A., Troger H. Stability of Relative Equilibria. Part II: Dumbell Satellites. *Meccanica*, 2001, 35, pp. 353–371.
- [12] Буров А.А. О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами. *Прикладная математика и механика*. 2003. т. 67. №2. с. 222–230.
- [13] Родников А.В. О движении груза по тороосу, закрепленному на гантелевидном космическом аппарате. *Космические исследования*. 2004, т. 42, №4, с. 444–448.
- [14] Белецкий В.В., Иванов М.Б., Отставнов Е.И. Модельная задача о космическом лифте. *Космические исследования*. 2005, т.43, №2, с. 157–160.
- [15] Родников А.В. О положениях равновесия груза на тросе, закрепленном на гантелевидной космической станции, движущейся по круговой геоцентрической орбите. *Космические исследования*. 2006, т. 44, №1, с. 62–72.
- [16] Косенко И.И., Степанов С.Я. Устойчивость положений относительного равновесия орбитальной связки с учетом ударных взаимодействий. Неограниченная задача. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2006, №4, с. 86–96.
- [17] Родников А.В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате. *Космические исследования*. 2006, т. 44, №6, с. 553–560.
- [18] Rodnikov, A. V. The Algorithms for Capture of the Space Garbage Using 'Leier Constraint'. *Regular and Chaotic Dynamics*, v. 11, No 4, p. 483–489.
- [19] Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С. *Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями*. М.–Ижевск, РХД, 2006.
- [20] Белецкий В.В. *Регулярные и хаотические движения твердых тел*. М.–Ижевск, РХД, 2007.
- [21] Муницына М.А. Относительные равновесия системы «гантель-груз» с односторонними связями на круговой кеплеровской орбите. *Автоматика и телемеханика*. №9, 2007, с. 9–15.
- [22] Burov A.A., Guerman A.D. Steady Motions of a Tetrahedral Satellite with Tethered Elements. *Proceedings of 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, <http://lib.physcon.ru, open library>.
- [23] Buchin V., Burov A., Troger H. A Dumb-Bell Satellite with a Cabin. Existence and Stability of Relative Equilibria. *Proceedings of 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, <http://lib.physcon.ru, open library>.
- [24] Rodnikov A.V. On Systems with 'Leier Constraint' in the Central Newtonian Force Field. *Proceedings of 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, <http://lib.physcon.ru, open library>.
- [25] Rodnikov A.V. Rotations of a dumbbell equipped with 'the leier constraint'. *Journal of Vibroengineering*. v.10,i.4, pp. 557–561.