

**В.Ф. Журавлев.**

**Отклик на статью А. В. Борисова и И. С. Мамаева  
«Законы сохранения, иерархия динамики и явное  
интегрирование неголономных систем».**

**Ответ А.В. Борисова**

*Редакция публикует дискуссию В. Ф. Журавлева и А. В. Борисова о применимости различных моделей контактного взаимодействия для описания движения тела по поверхности. Поводом к дискуссии послужила статья А. В. Борисова и И. С. Мамаева («НД», 2008, т. 4, № 3, с. 223–280), вызвавшая отклик В. Ф. Журавлева. Обмен мнениями выражен в формате переписки, размещаемой в журнале с согласия авторов<sup>1</sup>. Публикация данной дискуссии в этом номере представляется особо уместной, поскольку в нем освещаются проблемы, связанные с ударом и бильярдной игрой — явлениями, в описании которых вопросам трения и реализации связей отводится существенная роль.*

**Письмо В. Ф. Журавлева**

Уважаемый Алексей Владимирович! С большим интересом прочитал Вашу учебно-методическую работу «Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование», опубликованную в НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ, 2008, Т. 4, № 3. Хотелось бы сообщить Вам мои комментарии.

**1.** Мне не представляются удачными модели *резинового и мраморного тела*. Решения задач контактной теории упругости для известных в настоящее время материалов этим моделям противоречат. Я понимаю, что в «математикоподобной механике» (термин П. В. Харламова) допустимы любые, не имеющие отношения к практике умозрительные модели. Можно, например, вместо закона Ньютона употребить какой-угодно другой. Однако, полученную на такой основе теоретическую конструкцию уже называть механикой нельзя.

**2.** Я не понял Вашего упрека в мой адрес на с. 238. В мировой литературе нет единодушия в вопросе об определении неголономной связи. В учебнике по аналитической и небесной механике Ива Тири можно, например, прочитать такое определение: «Связь называется голономной, если она может быть выражена уравнениями, накладывающими ограничения

---

<sup>1</sup>С целью обеспечения свободы дискуссии редколлегия не подвергала письма рецензированию и не несет ответственности за их содержание.

на время и координаты системы. Связь не являющаяся голономной называется неголономной». По такому определению неголономной приходится признать любую неустойчивую связь (конечную, или кинематическую), сервосвязи Бегенна, связи Деляссу, бинарные связи и т. п.

Пример катящегося шара я неголономным не считаю. Это система с неустойчивой кинематической связью, сохраняющейся на части фазового пространства, когда верчение отсутствует. Но если верчение равно нулю, то шар движется по геодезической, превращающейся в случае плоскости в прямую. В этом случае соотношение  $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$  немедленно интегрируется.

3. В дискуссии на с. 269 Вы пишете «Одна из моделей сухого трения . . . была предложена Контенсу и Эрисманом». Это неверно. Контенсу исходил непосредственно из модели сухого трения Кулона. Он лишь правильно применил её для случая контакта по Герцу. В литературе, относящейся к задачам обкатывания поверхностей выпуклыми телами, до Контенсу применялась ошибочная модель трения, из закона Кулона никак не вытекавшая. Откуда и следовало несоответствие теории и эксперимента, отмеченное Контенсу. Далее, вопреки вашему утверждению у Контенсу нет момента трения верчения. Этот момент вычислил я. Для полноты картины вы могли бы отметить, что мною исправлено ошибочное утверждение Контенсу о неэлементарности полученных им интегралов. Мною эти интегралы вычислены в элементарных функциях.

Кроме того, мною предложена новая модель сухого трения при комбинации скольжения и верчения в виде дробно-линейной функции линейной и угловой скорости. С одной стороны такое представление может следовать из точных интегральных выражений в качестве разложений Паде, т. е. быть приближенным следствием модели Кулона, с другой стороны такая модель может рассматриваться, как феноменологическая, два неопределенных коэффициента которой подлежат нахождению из эксперимента; тогда это новая модель, обобщающая модель Кулона.

4. Едва ли следует при обсуждении моделей трения упоминать Пенлеве, не отмечая допущенных им принципиальных ошибок.

*Дополнение.* К тому моему письму я хотел бы добавить предложение Вам дать определение неголономной неустойчивой связи. С этим в современной литературе плохо.

### Ответ А. В. Борисова

Уважаемый Виктор Филиппович!

Ниже приводятся мои ответы на Ваши замечания (в том порядке, в котором они были высказаны). Но прежде отмечу свое недоумение по поводу характеристики (в самом начале письма) данной нашей работы [1] как «учебно-методической». Считаете ли Вы тогда учебно-методическими и работы С. А. Чаплыгина о качении шара и об исследованиях по динамике неголономных систем? В нашей статье мы развиваем классические методы Чаплыгина и применяем их к принципиально новым задачам, которые фактически также поставил Чаплыгин, но не смог их полностью разрешить [2]. Имеется ввиду задача о качении динамически несимметричного шара по сфере — как в классическом, так и несколько ином варианте (модель резинового шара, которая также описывается неголономными уравнениями).

1. О моделях резинового и мраморного тел.

Эти термины были введены в работах J. Koiller et al и уже достаточно укрепились в западной литературе. Несмотря на то, что сами термины, возможно, не вполне академичны, нам представляется, что они отражают суть дела и дают интуитивно ясное представление

о том, что рассматривается соприкосновительная модель, а в зависимости от материалов соприкасаемых тел связи, и, стало быть, законы движения, могут быть различными.

Модель мраморного тела тождественна обычной неголономной модели качения тела по абсолютно шероховатой плоскости, для которой скорость точки контакта равна нулю. Под моделью резинового тела понимается модель, при которой кроме аналогичной связи (равенства нулю скорости точки контакта) накладывается дополнительная связь, заключающаяся в том, что проекция угловой скорости на нормаль к поверхности в точке контакта равна нулю. Общая система связей для резиновой модели также получается неинтегрируемой, неголономной. Эта модель призвана формализовать описание таких качений, при которых существует сильное сопротивление верчению тела вокруг нормали. В то же время аналогичные уравнения движения, очевидно, появятся при рассмотрении более сложных, реалистичных моделей, включающих сухое трение, для тех стадий движения, когда система выйдет на такую связь. В нашей статье [1] все это описано подробно.

Таким образом, нельзя утверждать, что данные модели являются умоглядными и не имеют отношения к практике. Естественно, решающим критерием применимости математической модели являются экспериментальные данные. Для вышеупомянутых моделей они пока, действительно, отсутствуют. С другой стороны, здесь будет весьма уместно процитировать высказывание Дарбу [8]: «... Несомненно, при переходе к приложениям нам приходится выяснять, какие ошибки мы можем допустить, применяя теоремы чистой науки, однако, с нашей точки зрения, этот вопрос не следует смешивать с развитием науки самой по себе».

Сравнение наших результатов с «математикоподобной механикой» в данном контексте воспринимается мною даже как комплимент. Действительно, этот термин употреблялся П. В. Харламовым в отношении исследований В. В. Козлова, связанных с новыми моделями механики и применимостью предельных переходов и различных реализаций связей при построении различных моделей в механике. В той дискуссии истинность соображений В. В. Козлова, в противовес критическим и догматическим соображениям П. В. Харламова, для здравомыслящих людей совершенно очевидна.

## 2. К вопросу об определении неголономной связи.

Я не разделяю Вашего мнения об отсутствии единодушия в вопросе об определении неголономных связей. Приведение в качестве довода цитаты из некоего «учебника», что «связь, не являющаяся голономной, называется неголономной» воспринимается скорее как некий курьез. Если же иметь в виду всем известные, авторитетные учебники, то там вопросы о неголономных связях трактуются одинаково, тем более в тех случаях, что рассматриваются у нас в работах — случаях стационарных, линейных и удерживающих связей. По стандартному определению система уравнений связей считается неголономной, если определяемое ей распределение является неинтегрируемым в смысле теоремы Фробениуса. Это определение легко проверяется с помощью вычисления соответствующих коммутаторов, что и выполнено явно в нашей статье.

В частности, явными вычислениями у нас показана неголономность системы, описывающей движение катящегося без проскальзывания шара [1]. Как же Вы не считаете ее неголономной? То, что «соотношение  $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$  немедленно интегрируется» — просто элементарное, достаточно часто возникающее заблуждение. Дело в том, что, действительно, неголономность — это свойство неинтегрируемости связей, устанавливаемое до составления уравнений движения. То есть, при неголономных связях уравнения движения системы, тем не менее, могут быть и гамильтоновы, и лагранжевы. (Этот вопрос достаточно подробно освещен, например, в обзоре А. С. Сумбатова [3].) Кроме того, если шар движется при на-

личии этой связи, но моменты инерции шара не совпадают между собой, то без изменения связи задача не является гамильтоновой. То есть, в общем случае становится невозможно найти преобразование, приводящее к гамильтоновой форме. Если, кроме того, центр масс не совпадает с геометрическим центром, то система будет демонстрировать асимптотическое поведение. Подобными причинами объясняются многие необычные эффекты, например, в динамике кельтских камней.

### 3. О модели Контенсу.

Вы правы в своем замечании, что у Контенсу нет момента трения верчения, и что Вы поправили его, вычислив его интегралы в элементарных функциях (хотя и Контенсу графически хорошо представлял себе, как ведет себя соответствующая функция). Но вычисление элементарного интеграла все таки не может быть равнозначно созданию новой модели. Я согласен с Вами, что момент трения верчения можно вычислить аналогично, что и было сделано Вами. Отмечу только, что используемая Вами методика этих вычислений не нова. Общая технология расчета — и момента, и коэффициента, и силы — есть в книге Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева [4, с. 218], а также в книге А. И. Лурье [5]. (Кроме того, у Неймарка и Фуфаева указаны различные закономерности движения шара при наличии верчения и качения, некоторые из которых Вы также устанавливаете в своих работах. В частности, они указывают на тот факт, что шар движется так, что верчение и скольжение, уменьшаясь со временем, всегда прекращаются одновременно.)

Надо сказать, что влияние момента трения верчения на динамику во многих системах существенно меньше, и во многих моделях им, как правило, пренебрегают. В частности, значение трения верчения не является существенным для описания динамики таких систем, как кельтский камень и волчок Томсона (так как не является причиной возникающих динамических эффектов). В связи мне непонятны причины, побудившие Вас пересмотреть эти эффекты, опираясь на закон Контенсу. Эти известные задачи уже были решены ранее при более простых законах трения, либо при неголономном законе соприкосновения (т.е. при наличии абсолютной шероховатости).

Обратим также внимание на то, что сам Контенсу в конце своей статьи отмечает, что «изложенную теорию трения при одновременном верчении и скольжении нельзя считать безоговорочно истинной». Тем самым он осознает, что эта теория опирается на некоторые допущения (требующие экспериментальной проверки). Так, в ней применяется закон Герца распределения статических контактных напряжений. В то время как в задачах динамики, в отличие от статики, закон распределения давления, а стало быть контактных напряжений, неизвестен; здесь лишь можно строить различные гипотезы и предположения. Следовательно, данное допущение, вообще говоря, ставит под сомнение корректность пропагандируемой Вами теории, не говоря уже об ее превосходстве над другими существующими моделями, на Ваш взгляд, неудачными. То, что эта модель сложнее — очевидно, а точнее ли и надежнее — неизвестно. Так и Ваша дробно-рациональная модель (построенная на аппроксимации Паде), хоть она и проще, чем модель Контенсу, фактически является такой же гипотезой — возможно более точной, а возможно и нет. Необходимо поставить эксперименты, которые показывали бы ее существенное преимущество. Пока же она также остается в рамках умозрительных заключений. Идея ревизовать, исходя из данной неапробированной модели, классические, общепризнанные результаты Чаплыгина, Рауса, Пенлеве мне не представляется целесообразной. Интереснее было бы, если бы Вы попробовали применить ее в решении принципиально новых, содержательных задач и объяснить эффекты, которые другими моделями нигде не объясняются.

4. В связи с этим я считаю неверным говорить о принципиальных ошибках, якобы имеющихся у Пенлеве. Пенлеве просто применял наиболее простые и естественные, на его взгляд, закономерности трения (их использовал и Раус). Отмечу, что и сам Контенсу, хотя он и предложил более сложную модель, в дальнейшем ограничился применением в гироскопических расчетах обычной линейной по скоростям модели, показав, что в предельном случае она приводит к вязкому (линейному по скорости) закону сопротивления. Простую вязкую модель он в дальнейшем и использовал. То есть, две модели — сухого и вязкого трения, линейного по скорости — пока остаются базовыми в динамике.

*Дополнение.* В дополнение к своему письму Вы предлагаете дать определение неголономной неударяющей связи. Частично этот вопрос прояснен в статье А. П. Иванова [6] в задаче об отрыве тела от плоскости в неголономной постановке, где указаны парадоксы (типа парадоксов Пенлеве), возникающие при отрыве тела от плоскости. Однако, дать замкнутое определение такой связи мне представляется достаточно сложным, поскольку в таких системах могут возникать парадоксальные ситуации. Мне представляется наиболее приемлемым подход, применяемый в книге В. Ф. Журавлева и Н. А. Фуфаева [7], где этот вопрос анализируется для каждой конкретной задачи. Как правило, для конкретных задач затруднений не возникает. Хотя, опять же подчеркиваю, что при неголономном отрыве, как и при отрыве с трением, могут возникать парадоксы, впервые отмеченные Пенлеве.

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 23–280.
- [2] Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // *Математический сборник*, т. XX, 1897; Доступное издание: *Собрание сочинений*, том 1 «Теоретическая механика. Математика» М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 26–56. (За настоящую статью и работы «О движении тяжёлого тела вращения на горизонтальной плоскости» и «О некоторых случаях движения твёрдого тела в жидкости», стр. 57 и 194 «Собрания сочинений», т. 1, С.А. Чаплыгину была присуждена золотая медаль Академии наук.)
- [3] Сумбатов А. С. Неголономные системы // *Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы. Сборник статей.* М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 20–48. English version: Sumbatov A.S. Nonholonomic Systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 221–238.
- [4] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.
- [5] Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [6] Иванов А. П. Об условиях отрыва в задаче о движении твердого тела по шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 287–302.
- [7] Журавлев В. Ф., Фуфаев Н. А. Механика систем с неударяющими связями. М.: Наука, 1993.
- [8] Darboux G. Note XXI: Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps // Despeyroux T. *Cours de mécanique*; (avec des notes par m. G. Darboux): Т. II. Paris, 1884. P. 547–581 [Дарбу Г. Геометрическое исследование ударов и столкновений тел // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 2, с. 387–413].