



УДК: 531.352:629.7

MSC 2010: 37N05, 70H03, 70H09

## О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле

А. В. Родников

Изучается движение материальной точки по невесомому тросу, концы которого закреплены в полюсах твердого тела, совершающего регулярную прецессию. Такой трос, иначе называемый леером (голландское слово *leier* обозначает веревку с двумя закрепленными концами) может служить моделью космического лифта для динамически симметричного астероида. Устанавливается существование двух случаев полного интегрирования уравнений движения: при нулевом и прямом угле нутации. Фазовые портреты интегрируемых случаев строятся с учетом возможности ослабления троса и в предположении, что гравитация твердого тела может быть аппроксимирована полем двух равных масс, лежащих на оси динамической симметрии. В общем случае произвольного угла нутации в рамках Обобщенной Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел В. В. Белецкого изучается множество равновесий материальной точки на леере в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии. Устанавливаются некоторые факты об устойчивости этих равновесий.

Ключевые слова: космический лифт, космическая тросовая система, астероид, односторонняя связь, задача трех тел

### 1. Введение

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, описывающих динамику полета в окрестности астероидов (см., например, [7, 8, 10, 14, 17, 18, 21, 22, 25–29, 36, 47, 50] — конечно, этот список далеко не полон). При этом используются различные модели описания динамики самой малой планеты и ее гравитационного поля. Однако фактически во всех случаях движение космического аппарата в окрестности астероида описывается как движение материальной точки малой массы в окрестности гравитирующего

---

Получено 7 июня 2011 года

После доработки 23 июня 2011 года

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00406а).

---

Родников Александр Владимирович  
[springer@inbox.ru](mailto:springer@inbox.ru), [avrodnikov@yandex.ru](mailto:avrodnikov@yandex.ru)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
105005, Россия, г. Москва, ул. 2-ая Бауманская, 5



твердого тела с неподвижной точкой. Дело в том, что в системе отсчета, двигающейся поступательно вместе с центром масс астероида в относительно небольшой окрестности астероида суммарное воздействие Солнца, складывающееся из силы тяжести и центробежной силы инерции оказывается на несколько порядков меньше силы тяжести самой малой планеты. (Отметим, что сила притяжения Солнца в рассматриваемой ситуации оказывается многократно превышающей силу притяжения астероида, что используется для упрощения уравнений движения при решении задачи о пролете рядом с астероидом.)

Заметим, что многие (хотя, возможно, даже не большинство) астероидов имеют форму, близкую к осесимметричной (в качестве примеров можно указать (90)Antiope, (216)Kleopatra, (243)Ida, (762)Pulcova, (4179)Toutatis, (4769)Castalia и многие другие). Твердое тело, моделирующее такой астероид, можно считать динамически симметричным, следовательно, его движение вокруг центра масс можно считать регулярной прецессией.

Космическая миссия к астероиду может иметь своей целью высадку на астероид. В этой ситуации может оказаться полезным связать тросом околоастероидную космическую станцию и поверхность астероида. Однако поскольку движение астероида вокруг центра масс, вообще говоря, отлично от вращения вокруг постоянно ориентированной оси, космический лифт в классическом понимании (см., например, [30]) для астероида нереализуем. Тем не менее, если астероид совершает регулярную прецессию и его гравитационный потенциал аппроксимируется гравитационным потенциалом двух однородных шаров, то выполнены все предположения Обобщенной Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел (ООКЗТ) В. В. Белецкого [37]. В этом случае, как показано в [37, 42, 43], в окрестности астероида существуют такие точки, называемые, по аналогии с соответствующей классической задачей [3, 6], точками либрации (ТЛ), что станция, помещенная в ТЛ во все время движения не меняет своего положения по отношению к осям прецессии и собственного вращения твердого тела, моделирующего астероид. Очевидно, такая станция может быть соединена тросом постоянной длины с полюсами астероида, т. е. с точками пересечения динамической оси симметрии с поверхностью малой планеты, тем самым может быть сформирована космическая тросовая система, отличающаяся от впервые рассмотренной в [4, 5] классической. (Классическим тросовым системам за последние более чем 40 лет посвящены многочисленные статьи и монографии, см., например, [11, 12, 16, 35, 46], а также [13, 32] и многие другие. Космическим тросовым системам, отличным от классической, посвящены, в частности, работы [23, 39, 40, 44] и др.)

В настоящей работе изучается движение материальной точки, моделирующей космическую станцию, по тросу, концы которого закреплены в полюсах динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в центре масс, моделирующего малую планету. Такой трос может быть назван леером. (Голландский и русский морской термин *leier* означает веревку с двумя закрепленными концами [1]; движение по лееру, закрепленному на космической станции, описывается в [24, 31, 33, 34, 41, 45, 48, 49]). Очевидно, что рассматриваемое движение ограничено некоторым эллипсоидом с фокусами в полюсах твердого тела. Выводятся условия нахождения материальной точки на поверхности этого эллипсоида и уравнения движения по этой поверхности. Решения этих уравнений анализируются в предположении, что гравитационный потенциал твердого тела не зависит от угла поворота вокруг динамической оси симметрии (что соответствует, например, однородному астероиду, по форме близкому к телу вращения).

Отмечается, что в случае нулевого угла нутации, т. е. если твердое тело вращается вокруг неподвижной «вертикальной» оси, уравнения движения допускают циклический интеграл и могут быть до конца проинтегрированы. В случае прямого угла нутации уравнения

движения допускают решения, не покидающие плоскость, проходящую через неподвижную точку перпендикулярно оси прецессии. Очевидно, эти решения выписываются в квадратурах. Фазовые портреты и диаграммы устойчивости возможных положений равновесия материальной точки на тросе строятся в предположении, что гравитационный потенциал твердого тела может быть аппроксимирован потенциалом двух материальных точек равных масс, расположенных, как и точки крепления леера, симметрично относительно неподвижной точки.

В случае острого угла нутации показывается, что равновесия материальной точки на леере возможны только в плоскости, образованной осями прецессии и динамической симметрии и в плоскости, проходящей через неподвижную точку перпендикулярно оси прецессии. В соответствии с терминологией, принятой в [37, 42, 43], первые равновесия можно назвать «компланарными», а вторые — «треугольными». (Заметим, что точка, находящаяся в равновесии на леере, оказывается подвижной как в абсолютном пространстве, так и относительно поверхности твердого тела, моделирующего астероид.) В частности, если гравитацией твердого тела можно пренебречь (например, если исследуется движение некоторого груза по лееру, закрепленному на прецессирующей космической станции), существуют четыре компланарных равновесия, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми, и ни одного или два всегда неустойчивых треугольных равновесия.

Предполагая, что гравитационный потенциал твердого тела может быть аппроксимирован гравитационным потенциалом двух материальных точек, лежащих на оси динамической симметрии, т. е. в рамках ООКЗЗТ, проводится подробная классификация треугольных равновесий в зависимости от параметров твердого тела при допустимых длинах леера. Устанавливаются некоторые факты об устойчивости треугольных равновесий, в частности, доказываем, что любое из них становится устойчивым, если исключить возможность перемещения точки вдоль леера.

## 2. Параметры и обозначения

Рассмотрим твердое тело с неподвижным центром масс  $C$  (моделирующее астероид с центром масс  $C$ ) и осью динамической симметрии  $Cz$ . Пренебрегая, с учетом вышесказанного, внешними воздействиями, будем считать, что движение твердого тела вокруг  $C$  есть регулярная прецессия вокруг оси  $Cz_1$  с угловой скоростью  $\omega$  и с постоянным углом нутации  $\vartheta$  (см. рис. 1). Пусть  $Cx_1y_1z_1$  — неподвижная система координат (или кёнигова система координат, связанная с центром масс астероида). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ . Кроме того, пусть  $Cxyz$  — система координат, вращающаяся вокруг  $Cz_1$  с угловой скоростью  $\omega$ , такая, что ось  $Cx$  лежит в плоскости  $Cx_1y_1$  (соответственно,  $Cz_1$  лежит в плоскости  $Cyz$ ). Обозначим через  $F_1$  и  $F_2$  полюсы твердого тела (т. е. точки пересечения его поверхности с  $Cz_1$ ), а через  $O$  — середину  $F_1F_2$ .

Пусть  $S$  — материальная точка, моделирующая космическую станцию, способная перемещаться по инерции и без трения по тросу, концы которого закреплены в  $F_1$  и  $F_2$ . Будем называть такой трос леером. Обозначим через  $2a$  длину леера. Очевидно, что точка  $S$  не может выйти за пределы эллипсоида вращения с фокусами  $F_1, F_2$ , большой полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$  ( $e = c/a$ ,  $c = F_1O = F_2O$ ,  $0 < e < 1$ ). Будем говорить, что  $S$  находится «на связи», если она находится на поверхности эллипсоида; в противном случае будем говорить, что  $S$  «сошла со связи».

Для описания движения точки  $S$  будем использовать безразмерные переменные  $\rho, \varphi, \zeta$ , связанные с координатами  $x, y, z$  формулами  $x = a\rho \cos \varphi$ ,  $y = a\rho \sin \varphi$ ,  $z = a\zeta$ . Очевидно,

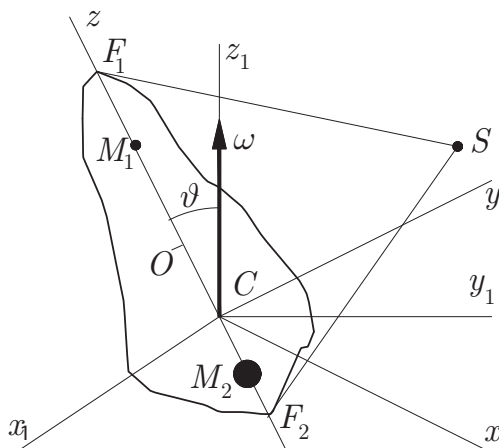


Рис. 1.

что изучаемая материальная точка будет находиться на связи, если

$$F = (\zeta - ed)^2 + \rho^2/(1 - e^2) - 1 = 0, \quad (2.1)$$

где  $d = OC/c$ .

Обозначим через  $\Pi$  гравитационный потенциал твердого тела. Будем считать, что  $\Pi$  зависит от  $\rho$  и  $\zeta$ , но не зависит от  $\varphi$ . Такая ситуация реализуется, например, если твердое тело есть однородное тело вращения. Например, если твердое тело имеет гантелевидную форму, т. е. состоит из двух однородных шаров ( $M_1$  и  $M_2$  на рис. 1) масс  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных невесомым стержнем, как это предполагается в [37], то

$$\Pi = -Gm_0 \left( \frac{m_1}{SM_1} + \frac{m_2}{SM_2} \right), \quad (2.2)$$

где  $G$  — гауссова константа тяготения,  $m_0$  — масса точки  $S$ ,  $SM_1 = a\rho_1$ ,  $SM_2 = a\rho_2$ ,

$$\rho_1^2 = \rho^2 + (\zeta - (1 - \mu)ke)^2, \quad \rho_2^2 = \rho^2 + (\zeta + \mu ke)^2, \quad (2.3)$$

$k = l/c$ ,  $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ ,  $l = M_1M_2$ .

### 3. Уравнения движения и условия нахождения на связи

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, уравнения движения материальной точки  $S$  можно представить в виде

$$\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}(\dot{\varphi} + \cos\vartheta) - 2\dot{\zeta}\sin\varphi\sin\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta(\rho\sin\varphi\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta) =, \quad (3.1)$$

$$\ddot{\zeta} - 2\frac{d(\rho\cos\varphi)}{d\tau}\sin\vartheta - (\zeta\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\zeta} = \lambda\frac{\partial F}{\partial\zeta} = 2\lambda(\zeta - de), \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + 2\cos\varphi) + 2\dot{\zeta}\sin\vartheta\cos\varphi + \zeta\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - \\ - \rho(1 - \sin^2\varphi\sin^2\vartheta) + \frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\rho} = \lambda\frac{\partial F}{\partial\rho} = \frac{2\rho\lambda}{1 - e^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$



Здесь точками обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$  ( $\tau = \omega t$ ), а через  $\tilde{\Pi}$  обозначен безразмерный потенциал ( $\tilde{\Pi} = \Delta\Pi$ , где  $\Delta$  — размерная константа).

Например, если потенциал определяется равенством (2.3), то

$$\tilde{\Pi} = -\alpha k^3 e^3 \left( \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right), \quad (3.4)$$

где  $\alpha = G(m_1+m_2)/(\omega^2 l^3)$ . В этом случае выполнены все предположения ООКЗТ, при этом динамика материальной точки на леере полностью определяется 6 параметрами: тремя параметрами ООКЗТ ( $\alpha, \mu, \vartheta$  — см. [37, 42, 43]) и величинами  $e, d, k$ . При этом, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $m_1 \leq m_2$ , откуда следует, что  $0 < \mu \leq 1/2$ . Кроме того, естественно считать, что  $-1 < d < 1$  и  $0 < k < 2$ .

В соответствии с методом Лагранжа, при  $\lambda < 0$  леер напряжен, что гарантирует нахождение точки  $S$  на связи: если  $\lambda = 0$ , сила реакции троса равна нулю и  $S$  может как находиться на связи, так и двигаться внутри эллипсоида (2.1). Неравенство  $\lambda > 0$  недопустимо.

#### 4. Случай интегрируемости уравнений движения

Уравнения (3.1), (3.2), (3) допускают интеграл Якоби, однако даже если во все время движения материальная точка  $S$  не сходит со связи, т.е. выполнено условие (2.1), этого не достаточно для интегрируемости. И все же рассмотрим две ситуации, когда эти уравнения интегрируемы.

##### 4.1. Случай нулевого угла нутации

Предположим, что  $\vartheta = 0$ , т.е. твердое тело вращается вокруг «вертикальной» оси динамической симметрии. В этом случае кинетическая энергия точки  $S$  не зависит от  $\varphi$  и имеет место циклический интеграл

$$\rho^2(\dot{\varphi} + 1) = c \quad (4.1)$$

(по существу являющийся интегралом кинетического момента), который можно рассматривать как следствие уравнения (3.1). Уравнения (3.2), (3) в рассматриваемом случае в результате редукции по Раусу упрощаются до вида

$$\ddot{\zeta} - 2\lambda(\zeta - ed) + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} = 0, \quad \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} - \frac{2\lambda\rho}{1-e^2} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \rho} = 0. \quad (4.2)$$

Ограничимся описанием движения по поверхности эллипсоида (2.1). Для этого введем новую переменную  $\gamma$  по формулам

$$\rho = \sqrt{1-e^2} \sin \gamma, \quad \zeta = de + \cos \gamma. \quad (4.3)$$

В нашем случае  $0 \leq \gamma \leq \pi$ . Интеграл Якоби, выраженный через  $\dot{\gamma}$  и  $\gamma$ , может быть записан в виде

$$\frac{1}{2}(1-e^2 \cos^2 \gamma)\dot{\gamma}^2 + \tilde{\Pi} + \frac{c^2}{2(1-e^2) \sin^2 \gamma} = h = \text{const}. \quad (4.4)$$

Подставив (4.3) в (4.2) и исключив из получившихся уравнений  $\ddot{\gamma}$ , условие нахождения точки  $S$  на связи  $\lambda \leq 0$  можно записать в виде неравенства

$$\dot{\gamma}^2 - \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \rho} - \cos \gamma \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} + \left( \frac{c}{(1-e^2) \sin \gamma} \right)^2 \geq 0. \quad (4.5)$$

При анализе движения точки  $S$  будем считать, что величина  $\tilde{\Pi}$  в (4.4), (4.5) определяется формулой (3.4). Более того, ограничимся полностью симметричной ситуацией, когда  $F_1$  и  $F_2$ , равно как и  $M_1$  и  $M_2$ , симметричны относительно центра масс  $C$ , что возможно, только если  $\mu = 1/2$  и  $d = 0$ . Заметим, что если  $c = 0$ , то  $S$  будет находиться на связи во все время движения только при относительно больших  $|\dot{\gamma}|$ . При этом  $S$  будет вращаться вокруг  $C$  в неподвижной плоскости, содержащей  $Cz_1$ .

Если  $c \neq 0$ , с учетом необходимости учитывать возможность схода со связи и в зависимости от значений параметров  $e$ ,  $\alpha$ ,  $k$  и  $c$ , возможны 6 типов фазовых портретов изучаемой системы. Каждому из типов отвечает область в пространстве этих параметров. На рисунке 2 изображено сечение этого пространства плоскостью  $e = \text{const}$  для  $\sqrt{3}/3 < e \leq 0.9965$ . (Здесь по вертикальной оси откладываются значения комбинированного параметра  $c_1 = c^2/(\alpha k^3)$ ; очевидно,  $c_1 > 0$ .) Отметим, что при  $e \leq \sqrt{3}/3$  такое сечение будет содержать элементы только областей  $I$ ,  $II$ ,  $VI$ . Кроме того, при  $e > 0.9965$  сечение области  $V$  оказывается двусвязным. Типичный фазовый портрет для области  $I$  изображен на рисунке 3. Единственной особой точкой на этом фазовом портрете соответствует равновесие точки  $S$  на середине леера. При этом в абсолютном движении точка  $S$  описывает экватор эллипсоида (2.1). Остальные движения точки  $S$  в этом случае представляют собой колебания на леере около его середины при одновременном вращении вместе с леером вокруг  $Cz_1$ .

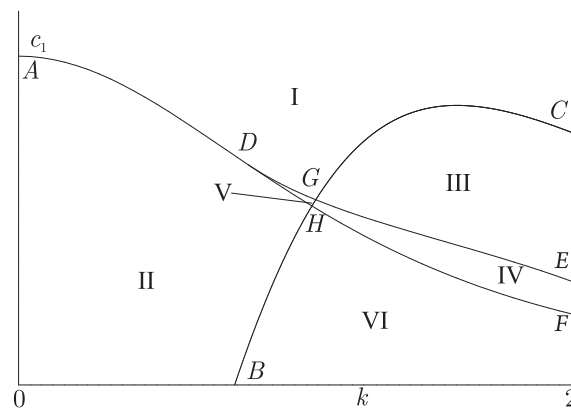


Рис. 2.

Фазовый портрет для области  $II$  отличается от предыдущего наличием вокруг равновесия  $\gamma = \pi/2$  области схода со связи (ограничена жирной линией на рис. 4), т. е. в области  $II$  движение точки  $S$  по экватору эллипсоида нереализуемо. Заметим, что для точек кривой  $AD$  область схода со связи состоит из одной точки  $\gamma = \pi/2$ , т. е. в этом случае устойчивое движение по экватору эллипсоида происходит при нулевой силе реакции леера.

В области  $III$  особая точка  $\gamma = \pi/2$  становится неустойчивой, однако появляются два устойчивых равновесия (см. рис. 5), соответствующие движениям точки  $S$  вдоль двух параллелей эллипсоида (2.1). Все движения происходят при ненулевой силе реакции троса,

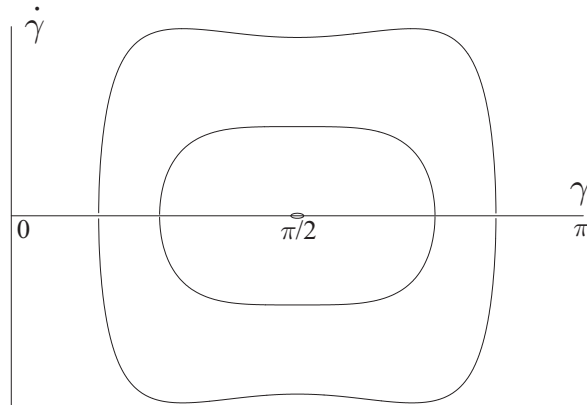


Рис. 3.

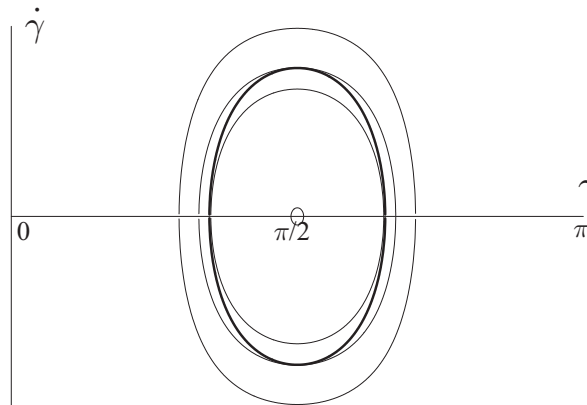


Рис. 4.

область схода со связи отсутствует. Движение по ветвям сепаратрисы соответствует траекториям изучаемой материальной точки, наматывающимся на экватор эллипсоида.

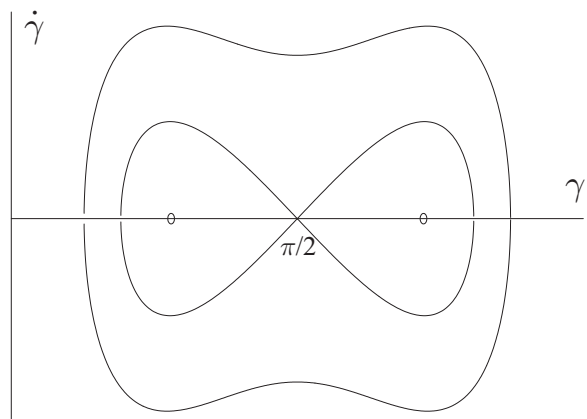


Рис. 5.

Фазовый портрет в области  $IV$  отличается от фазового портрета в области  $III$  наличием двух областей схода со связи, причем при неустойчивом движении вдоль экватора, соответствующим  $\gamma = \pi/2$ , сход со связи не происходит (рис. 6). Отметим, что области схода со связи могут как находиться целиком внутри петли сепаратрисы, так и выходить за эти пределы.

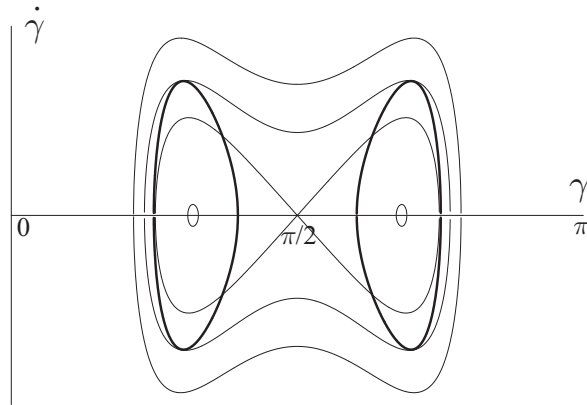


Рис. 6.

В области  $V$  также имеют место две области схода со связи, однако траектории движения оказываются такими же, как в области  $I$  (рис. 7).

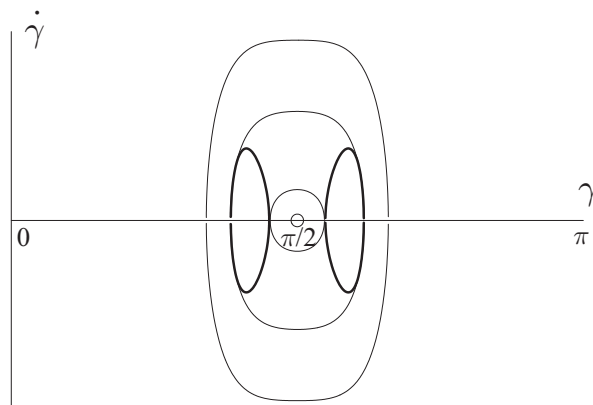


Рис. 7.

Наконец, в области  $VI$  фазовый портрет аналогичен фазовым портретам в областях  $III$  и  $IV$ , однако все особые точки оказываются внутри области схода со связи (рис. 8), т. е. равновесия точки  $S$  на леере нереализуемы.

На рисунке 2 границы  $AD$ ,  $DG$ ,  $GC$  относятся к области  $I$ ,  $BH$  — к области  $II$ ,  $GE$  — к области  $III$ ,  $GH$  — к области  $V$ . Для точек кривых  $DH$  и  $HF$  существуют две области схода со связи, касающиеся в точке  $\gamma = \pi/2$ . Кривая  $ADHF$  определяется уравнением

$$c_1 = \frac{8e^3(1 - e^2)^2}{(4 - 4e^2 + k^2e^2)^{3/2}}, \quad (4.6)$$



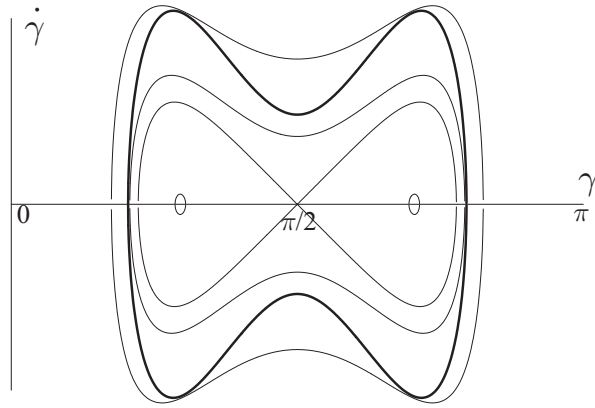


Рис. 8.

а кривая  $BHGC$  — уравнением

$$c_1 = \frac{8e^5(1 - e^2)(3k^2 - 4 + 4e^2 - k^2e^2)}{(4 - 4e^2 + k^2e^2)^{5/2}}. \quad (4.7)$$

Координаты точки  $D$  суть

$$k = \frac{\sqrt{5 + 7e^2 - \sqrt{81e^4 + 102e^2 - 32}}}{2e}, \quad c_1 = \frac{64(1 - e^2)^2}{(21 - 9e^2 - \sqrt{81e^4 + 102e^2 - 32})^{3/2}}. \quad (4.8)$$

#### 4.2. Движения в горизонтальной плоскости при прямом угле нутации

В случае, когда  $\vartheta = \pi/2$ , уравнения движения точки  $S$  в безразмерных переменных  $\xi = x/a, \eta = y/a, \zeta = z/a$  имеют вид

$$\ddot{\xi} + 2\dot{\zeta} - \xi + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \xi} = \frac{2\lambda\xi}{1 - e^2}, \quad (4.9)$$

$$\ddot{\eta} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \eta} = \frac{2\lambda\eta}{1 - e^2}, \quad (4.10)$$

$$\ddot{\zeta} - 2\dot{\xi} - \zeta + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} = 2\lambda(\zeta - ed). \quad (4.11)$$

Заметим, что если  $\tilde{\Pi}$  зависит только от  $\rho$  и  $\zeta$ , то при  $\eta = 0$   $\partial \tilde{\Pi} / \partial \eta = 0$ . Следовательно, движения точки  $S$  в плоскости  $\eta = 0$ , т.е. в плоскости  $Cxz$ , в рассматриваемом случае совпадающей в каждый момент времени с  $Cx_1y_1$ , описываются уравнениями (4.9), (4.11). Очевидно, что такие движения ограничены некоторым эллипсом, вращающимся в  $Cx_1y_1$  вокруг  $Cz_1$  с угловой скоростью  $\omega$ . Ограничимся движениями по границе этого эллипса, для чего введем переменную  $\gamma$  по формулам

$$\xi = \sqrt{1 - e^2} \sin \gamma, \quad \zeta = \cos \gamma + ed. \quad (4.12)$$

(Здесь  $0 \leq \gamma < 2\pi$ .) Интеграл Якоби, выраженный через  $\dot{\gamma}$  и  $\gamma$ , имеет вид

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \gamma)\dot{\gamma}^2 + \tilde{\Pi} - de \cos \gamma - \frac{1}{2}e^2 \cos^2 \gamma = h = \text{const.} \quad (4.13)$$

Подставив (4.12) в (4.9), (4.11) и исключив из полученных выражений  $\ddot{\gamma}$ , получим условие  $\lambda \leq 0$  нахождения на связи как неравенство

$$\dot{\gamma}^2 + \frac{2(1 - e^2 \cos^2 \gamma)}{\sqrt{1 - e^2}}\dot{\gamma} + 1 + de \cos \gamma - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} \cos \gamma - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \xi} \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - e^2}} \geq 0. \quad (4.14)$$

При анализе движения будем считать, что величина  $\tilde{\Pi}$  определяется формулой (3.4). Рассмотрим случай полной симметрии, когда  $\mu = 1/2$  и  $d = 0$ . Нетрудно убедиться, что в этой ситуации равновесия системы с интегралом Якоби (4.13) лежат либо в точках  $\gamma = \pi n/2$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ , либо удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{4e \cos \gamma} \left( \frac{2e \cos \gamma - k}{\rho_1^{3/2}} + \frac{2e \cos \gamma + k}{\rho_2^{3/2}} \right). \quad (4.15)$$

Заметим, однако, что если  $\dot{\gamma} = 0$ , то условие нахождения на связи (4.14) может быть переписано как

$$\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{4e} \left( \frac{2 - ke \cos \gamma}{\rho_1^{3/2}} + \frac{2 + ke \cos \gamma}{\rho_2^{3/2}} \right), \quad (4.16)$$

и, как нетрудно видеть, равновесия, определяемые (4.15), находятся за пределами области нахождения на связи и не могут быть реализованы. Более того, равновесия  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$  оказываются реализуемыми только при  $\alpha \leq (2 - k^2 e^2 / 2)^2 / (4 + k^2 e^2)$  и в этом случае устойчивыми, а равновесия  $\gamma = \pm \pi/2$  оказываются реализуемыми только при  $\alpha \leq (1 - e^2 + k^2 e^2 / 4)^{3/2}$  и в этом случае неустойчивыми. Из этого следует, что хотя фазовый портрет рассматриваемой системы в изучаемом случае может оказаться существенно более содержательным, чем фазовый портрет математического маятника, движения точки  $S$ , не приводящие к сходу со связи, могут быть либо, при сравнительно больших начальных значениях  $|\dot{\gamma}|$ , «вращениями», при которых  $S$  периодически пробегает упомянутый выше эллипс, или, при сравнительно малых  $|\dot{\gamma}|$ , «колебаниями» вокруг устойчивых положений равновесия  $\gamma = 0$  или  $\gamma = \pi$ . Пример фазового портрета в качественно наиболее сложной ситуации, когда существует 12 положений равновесия, 10 из которых находятся вне области нахождения на связи, изображен на рисунке 9 (граница области нахождения на связи обозначена жирной линией). Отметим также, что исследование количества и устойчивости положений равновесия существенно усложняется, если допустить отрицательные значения  $\alpha$  (т. е. силы притяжения заменить на силы отталкивания) или же если рассматривать движение точки по внешней поверхности эллипсоида (2.1).

## 5. Равновесия материальной точки на леере в случае нулевой гравитации

Предположим теперь, что угол нутации  $\vartheta$  — острый. Будем изучать положения равновесия материальной точки  $S$  на леере в системе отсчета, связанной с осями прецессии  $Cz_1$



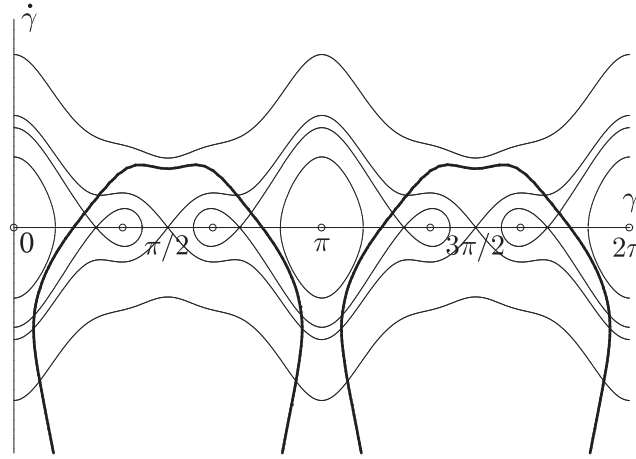


Рис. 9.

и динамической симметрии твердого тела  $Cz$ . Рассмотрим сначала случай  $\Pi \equiv 0$ , когда гравитацией можно пренебречь. Такое возможно, например, если  $S$  движется по лееру, закрепленному на протяженной прецессирующей орбитальной станции, по существу представляющей собой рукотворный астероид.

Считая без ограничения общности  $d \geq 0$  и анализируя уравнения (3.1), (3), (3.2) нетрудно установить, что существуют 4 или 6 положений равновесия точки  $S$  на эллипсоиде (2.1). Два из этих равновесий суть пересечения эллипсоида с  $Cz_1$ , для которых  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $\zeta = \rho \operatorname{ctg} \varphi$ . Можно показать, что в этом случае  $\lambda = 0$ , т.е. трос не напряжен. Очевидно, равновесия на  $Cz_1$  неустойчивы. Изучая экстремумы интеграла Якоби и опираясь на теорему А. П. Иванова [9, 15], можно доказать, что положение равновесия  $\varphi = -\pi/2$ ,  $\rho = (\zeta - ed)(1 - e^2) \operatorname{ctg} \vartheta$  всегда устойчиво, в то время как положение равновесия  $\varphi = \pi/2$ ,  $\rho = -(\zeta - ed)(1 - e^2) \operatorname{ctg} \vartheta$  устойчиво, только если

$$d < \frac{e^2 \sin \vartheta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}. \tag{5.1}$$

Кроме описанных 4 положений равновесия в плоскости  $Czz_1$  в случае выполнения условия (5.1), в плоскости  $Cx_1y_1$  существуют два неустойчивых положения равновесия, для которых

$$\varphi = \pi/2 \pm \arccos(d\sqrt{1 - e^2} \operatorname{ctg} \vartheta / \sqrt{e^4 - d^2}), \quad \rho = \sqrt{1 - e^2} \sqrt{e^4 - d^2} / e^2, \quad \zeta = -d/e^2.$$

## 6. «Треугольные» равновесия материальной точки на леере в условиях ООКЗЗТ

Из (3.1) следует, что если  $\Pi$  не зависит от  $\varphi$ , равновесия материальной точки  $S$  на леере во вращающейся системе  $Cxyz$  возможны, только если  $\varphi = \pm\pi/2$  или  $\rho = -\zeta \sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta$ . Будем называть равновесия первого типа «компланарными», а второго типа — «треугольными». Очевидно, компланарные равновесия лежат в плоскости  $Czz_1$ , в то время как треугольные равновесия лежат в плоскости  $Cx_1y_1$ . В случае, когда потенциал  $\Pi$  определяется

равенством (2.3), примерами компланарных положений равновесия могут служить компланарные точки либрации ООКЗЗТ [43]; соответственно, примерами треугольных равновесий являются треугольные точки либрации (ТТЛ) этой же задачи [37, 42]. Очевидно, точки либрации ООКЗЗТ не исчерпывают все возможные положения равновесия точки  $S$  на леере, так как описывают только равновесия с нулевым натяжением троса.

Как следует из (3.2), (3), координаты треугольных положений равновесия определяются равенствами

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} + 2\lambda de - (1 + 2\lambda)\zeta = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \rho} - \left(1 + \frac{2\lambda}{1 - e^2}\right)\rho = 0. \quad (6.1)$$

Считая, что  $\Pi$  в (6.1) определяется соотношением (2.3), условие нахождения на связи  $\lambda \leq 0$  после некоторых упрощений можно записать в виде

$$\frac{2\zeta - ke(1 - 2\mu)}{e\zeta + d(1 - e^2)} \leq 0. \quad (6.2)$$

Исключив  $\lambda$  из (6.1) и используя (2.1), (2.3), получим уравнение для определения координаты  $\zeta$  треугольного равновесия, не зависящее от  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$ . Будем рассматривать это уравнение как зависимость между  $\zeta$  и  $e$  при фиксированных значениях  $\mu$ ,  $d$ ,  $k$ ,  $\alpha$ . Такой подход позволяет строить множества треугольных равновесий для каждого конкретного твердого тела (для фиксированных значений параметров  $\mu$ ,  $d$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\vartheta$  при всевозможных допустимых длинах троса, т. е. при всех допустимых значениях  $e$ ). Здесь можно выделить пять качественно различных случаев.

В качестве первого из этих случаев рассмотрим ситуацию «полной симметрии»  $d = 0$ ,  $\mu = 1/2$ . Как следует из (6.2), треугольные положения равновесия для такого твердого тела могут находиться только на оси  $Cx$ . Можно показать, что если  $\alpha \leq 1/8$ , то все точки прямой  $Cx$  являются треугольными равновесиями. Если же  $\alpha > 1/8$ , то множество треугольных равновесий состоит из двух лучей  $|x| \geq ke\sqrt{\alpha^{2/3} - 1/4}$ , начинающихся в ТТЛ. Анализ уравнений первого приближения в окрестности каждого из равновесий, лежащих на  $Cx$ , показывает, что все они неустойчивы.

Гравитационное поле астероида может быть аппроксимировано полем двух точек равной массы ( $\mu = 1/2$ ) при  $d \neq 0$  во втором случае. Без ограничения общности будем считать, что  $d > 0$ . Возможные множества треугольных равновесий для  $\alpha > 1/8$  изображены на рисунке 10. (На этом и последующих рисунках ось  $Cy_2$  — прямая, перпендикулярная  $Cx$ , вращающаяся в плоскости  $Cx_1y_1$ .) Для  $0 < \vartheta < \pi/2$  множество треугольных равновесий представлено кривой  $\beta$  с концами в ТТЛ  $L_1$  и  $L_2$ . Если  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ , то кривая  $\beta$  стремится к некоторой предельной кривой  $\omega$ . Если  $\vartheta = 0$ , то треугольные равновесия образуют круг  $\alpha$ , целиком состоящий из точек либрации ООКЗЗТ. Если же  $\alpha \leq 1/8$ , то ТТЛ не существуют [37, 42], поэтому  $\beta$  и  $\omega$  становятся замкнутыми кривыми, проходящими через  $C$ , а окружность  $\alpha$  исчезает.

В третьем случае, когда  $\mu < 1/2$ ,  $d = 0$ , множества треугольных равновесий становятся неограниченными (см. рис. 11). При этом для  $\vartheta = 0$  треугольные равновесия не существуют. Если же угол нутации острый, то для  $\alpha \geq 1/8$  при сравнительно малых  $\vartheta$  треугольные равновесия образуют односвязную кривую  $\beta$ ; при сравнительно больших  $\vartheta$  это же множество состоит из двух кривых  $\gamma$ , начинающихся в ТТЛ  $L_1$  и  $L_2$ ,  $\gamma \rightarrow \omega$  если  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ . Если же  $\alpha < 1/8$ , то существуют только кривые типа  $\beta$ .

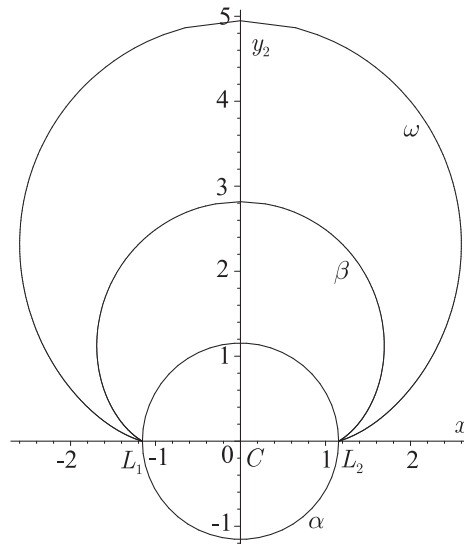


Рис. 10.

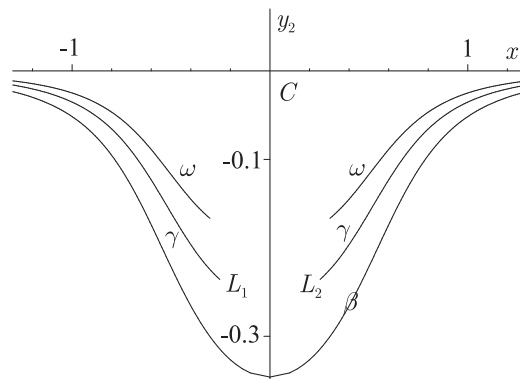


Рис. 11.

Для четвертого случая  $\mu < 1/2$ ,  $d < 0$ , когда треугольные равновесия существуют, только если  $\vartheta \geq \vartheta_{\min}$ , где  $\vartheta_{\min}$  зависит от  $\alpha$ ,  $d$ ,  $\mu$ ,  $k$ . (см. рис. 12). На этом рисунке через  $S_m$  обозначено единственное треугольное положение равновесия, существующее при  $\vartheta = \vartheta_{\min}$ . Остальные кривые и точки имеют такой же смысл, как и в третьем случае.

Для пятого случая  $\mu < 1/2$ ,  $d > 0$ , когда треугольные равновесия образуют кривые, охватывающие  $C$  (см. рис. 13). Обозначения на этом рисунке имеют тот же смысл, что и в первом и четвертом случаях.

Отметим, что при фиксированном значении  $\epsilon$  в первом, втором и третьем случаях существуют не более двух треугольных равновесий, в то время как в четвертом и пятом случаях число этих равновесий может быть 4.

Анализируя интеграл Якоби рассматриваемой задачи и используя известную теорему А. П. Иванова [9, 15], можно доказать следующий критерий: *если треугольное положение равновесия реализуется при ненулевой силе реакции троса и остром угле нутации, то оно становится устойчивым, как только точка  $S$  фиксируется на леере*, иными словами, запретив материальной точке двигаться вдоль троса, можно стабилизировать практически любое треугольное равновесие.

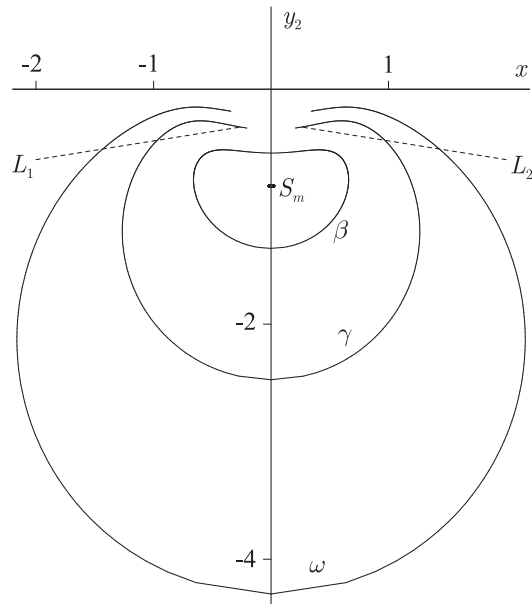


Рис. 12.

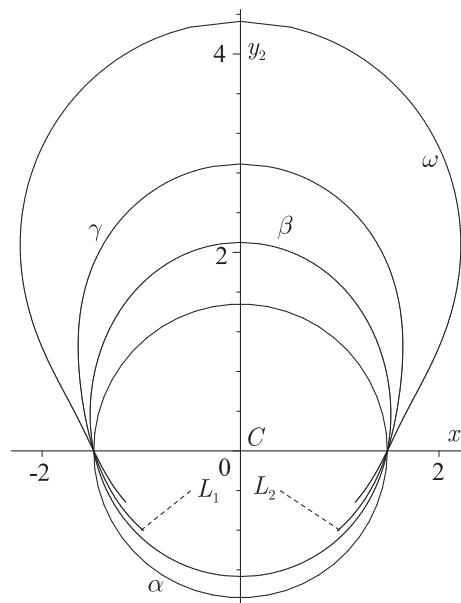


Рис. 13.

## Выводы

В настоящей работе поставлена задача о движении материальной точки вдоль троса, концы которого закреплены в полюсах гравитирующего твердого тела, совершающего регулярную прецессию. (Такую тросовую систему можно рассматривать как модель космического лифта для динамически симметричного астероида.) Выведены уравнения движения и условия нахождения на связи (т. е. условия натянутости троса). Отмечены два случая интегрируемости уравнений движения (при нулевом и прямом углах нутации). Движения



материальной точки по тросу в интегрируемых случаях изучены в предположении, что гравитационное поле твердого тела аппроксимируется полем двух центров с равными массами. Изучено существование и устойчивость равновесий материальной точки на тросе в случае пренебрежимо малой гравитации. В предположении, что гравитационный потенциал твердого тела есть потенциал двух однородных сфер, т. е. в рамках Обобщенной Ограниченной Круговой Задачи Трех Тел В. В. Белецкого построены множества равновесий материальной точки на тросе во вращающейся системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии твердого тела. Установлены некоторые факты об устойчивости этих равновесий.

## Благодарности

Автор благодарен С. Я. Степанову за обсуждения, результатом которых стала постановка задачи, В. В. Белецкому за полезные обсуждения, а также Ю. Ф. Голубеву, А. А. Бурову и И. И. Косенко за замечания и комментарии.

## Список литературы

- [1] Даль В. Толковый словарь живаго Великорусскаго языка: Т. 2. СПб.–М.: Издание М. О. Вольфа, 1881. 776 с.
- [2] Белецкий В. В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
- [3] Себехей В. Теория орбит: Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
- [4] Белецкий В. В., Новикова Е. Т. Об относительном движении связки двух тел на орбите // Космические исследования, 1969, т. 7, № 3, с. 377–384.
- [5] Белецкий В. В. Об относительном движении связки двух тел на орбите: II // Космические исследования, 1969, т. 7, № 6, с. 827–840.
- [6] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [7] Косенко И. И. О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида // ПММ, 1981, т. 45, № 1, с. 26–33.
- [8] Косенко И. И. Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде: Геометрия области устойчивости // Космические исследования, 1981, т. 19, № 2, с. 200–209.
- [9] Иванов А. П. Об устойчивости в системах с неударяющими связями // ПММ, 1984, т. 48, № 5, с. 725–732.
- [10] Kosenko I. I. Non-linear analysis of the stability of the libration points of a triaxial ellipsoid // J. Appl. Math. Mech., 1985, vol. 49, no. 1, pp. 17–24.
- [11] Иванов В. А., Ситарский Ю. С. Динамика полета системы гибко связанных космических объектов. М.: Машиностроение, 1986. 244 с.
- [12] Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
- [13] Wang Li-Sh., Cheng Sh.-F. Dynamics of two spring-connected masses in orbit // Celestial Mech. Dynam. Astronom., 1995/96, vol. 63, nos. 3–4, pp. 289–312.
- [14] Scheeres D. J., Ostro S. J., Hudson R. S., Werner R. A. Orbits close to asteroid 4769 Castalia // Icarus, 1996, vol. 121, pp. 67–87.
- [15] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
- [16] Tethers in space handbook / M. L. Cosmo, E. C. Lorenzini (Eds.), Smithsonian Astrophysical Observatory for NASA Marshall Space Flight Center, Grant NAG8-1160 monitored by C. C. Rupp. 3rd ed., 1997. 241 pp.

- [17] Scheeres D. J., Ostro S. J., Hudson R. S., DeJong E. M., Suzuki S. Dynamics of orbits close to asteroid 4179 Toutatis // *Icarus*, 1998, vol. 132, pp. 53–79.
- [18] Scheeres D. J., Williams B. G., Miller J. K. Evaluation of the dynamic environment of an asteroid: Applications to 433 Eros // *J. Guid. Contr. Dynam.*, 2000, vol. 23, no. 3, pp. 466–475.
- [19] Krupa M., Schagerl M., Steindl A., Troger H. Stability of relative equilibria: P. I. Comparison of four methods // *Meccanica*, 2001, vol. 35, pp. 325–351.
- [20] Krupa M., Steindl A., Troger H. Stability of relative equilibria: P. II. Dumbell satellites // *Meccanica*, 2001, vol. 35, pp. 353–371.
- [21] Scheeres D. J. Stability of binary asteroids // *Icarus*, 2002, vol. 159, pp. 271–283.
- [22] Белецкий В. В. Некоторые задачи динамики двойных астероидов // *Современные проблемы механики и физики космоса* / В. С. Авдеевский, А. В. Колесниченко (ред.). М.: Физматлит, 2003. С. 27–40.
- [23] Буров А. А. О существовании и устойчивости равновесий механических систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // *ПММ*, 2003, т. 67, № 2, с. 222–230.
- [24] Родников А. В. О движении груза по тороосу, закрепленному на гантелевидном космическом аппарате // *Космические исследования*, 2004, т. 42, № 4, с. 444–448.
- [25] Koon W. S., Marsden J. E., Ross S., Lo M., Scheeres D. J. Geometric mechanics and the dynamics of asteroid pairs // *Ann. New York Acad. Sci.*, 2004, vol. 1017, pp. 11–38.
- [26] Vasilkova O. O. Three-dimensional periodic motion in the vicinity of the equilibrium points of an asteroid // *Astron. Astrophys.*, 2005, vol. 430, no. 2, pp. 713–723.
- [27] Cendra H., Marsden J. E. Geometric mechanics and the dynamics of asteroid pairs // *Dyn. Syst.*, 2005, vol. 20, no. 1, pp. 3–21.
- [28] Scheeres D. J., Bellerose J. The restricted Hill full 4-body problem: Application to spacecraft motion about binary asteroids // *Dyn. Syst.*, 2005, vol. 20, no. 1, pp. 23–44.
- [29] Gabern F., Koon W. S., Marsden J. E. Spacecraft dynamics near a binary asteroid // *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, suppl., pp. 297–306.
- [30] Белецкий В. В., Иванов М. Б., Отставнов Е. И. Модельная задача о космическом лифте // *Космические исследования*, 2005, т. 43, № 2, с. 157–160.
- [31] Родников А. В. О положениях равновесия груза на тросе, закрепленном на гантелевидной космической станции, движущейся по круговой геоцентрической орбите // *Космические исследования*, 2006, т. 44, № 1, с. 62–72.
- [32] Косенко И. И., Степанов С. Я. Устойчивость положений относительного равновесия орбитальной связки с учетом ударных взаимодействий: Неограниченная задача // *Изв. РАН. МГТ*, 2006, № 4, с. 86–96.
- [33] Родников А. В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате // *Космические исследования*, 2006, т. 44, № 6, с. 553–560.
- [34] Rodnikov A. V. The algorithms for capture of the space garbage using «leier constraint» // *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 11, no. 4, pp. 483–489.
- [35] Алпатов А. П., Белецкий В. В., Драновский В. И., Закржевский А. Е., Пироженко А. В., Трогер Г., Хорошилов В. С. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. М.–Ижевск: РХД, 2006. 560 с.
- [36] Gabern F., Koon W. S., Marsden J. E. Parking a spacecraft near an asteroid pair // *J. Guid. Contr. Dynam.*, 2006, vol. 29, no. 3, pp. 544–553.
- [37] Белецкий В. В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космические исследования*, 2007, т. 45, № 6, с. 435–442.
- [38] Белецкий В. В. Регулярные и хаотические движения твердых тел. М.–Ижевск: РХД, 2007. 132 с.
- [39] Муницына М. А. Относительные равновесия системы «гантель–груз» с односторонними связями на круговой кеплеровской орбите // *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 9, с. 9–15.



- [40] Burov A. A., Guerman A. D. Steady motions of a tetrahedral satellite with tethered elements // Proc. of the 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008), <http://lib.physcon.ru/?item=1753>.
- [41] Rodnikov A. V. Rotations of a dumbbell equipped with «the leier constraint» // Journal of Vibroengineering, vol. 10, no. 4, pp. 557–561.
- [42] Белецкий В. В., Родников А. В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Космические исследования, 2008, т. 46, № 1, pp. 42–50.
- [43] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // Journal of Vibroengineering, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 550–556.
- [44] Buchin V., Burov A., Troger H. A dumb-bell satellite with a cabin: Existence and stability of relative equilibria // Proc. of the 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008), <http://lib.physcon.ru/?item=1749>.
- [45] Rodnikov A. V. On systems with «leier constraint» in the central Newtonian force field // Proc. of the 6th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008), <http://lib.physcon.ru/?item=1729>.
- [46] Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. 3-е изд. М.: УРСС, 2009. 432 с.
- [47] Fahnestock E. G., Scheeres D. J. Binary asteroid orbit expansion due to continued YORP spin-up of the primary and primary surface particle motion // Icarus, 2009, vol. 201, no. 1, pp. 135–152.
- [48] Rodnikov A. V. On dynamics of a dumbbell satellite with a small load on the leier // Physics and Control (Catania, Italy, sept. 1–4, 2009), <http://lib.physcon.ru/?item=2028>.
- [49] Родников А. В. О влиянии леерной связи на движение гантелевидного тела в центральном ньютоновском силовом поле // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 519–533.
- [50] Vasilkova O. O. Stability criterion for a light binary attracted by a heavy body // Astronomy Lett., 2010, vol. 36, no. 3, pp. 227–230.

## On a particle motion along the leier fixed in a precessing rigid body

Alexander V. Rodnikov

Bauman Moscow State Technical University  
2-ya Baumanskaya st., 5, Moscow, 105005, Russia  
[springer@inbox.ru](mailto:springer@inbox.ru), [avrodnikov@yandex.ru](mailto:avrodnikov@yandex.ru)

We study a particle motion along a cable with ends fixed in a precessed rigid body. Such cable called «the leier» is a model of space elevator for a dynamically symmetric asteroid. (The Dutch term «leier» means the rope with fixed ends). In this paper we find two integrable cases of the particle motion equations (for zero and right nutation angle) Phase portraits for integrable situations are built taking into account conditions of motion with the tense cable and assuming the body gravitation is close to gravitational field of two equal point masses that are in the axis of dynamical symmetry. Using «the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies» by V. V. Beletsky, we study the particle equilibria on the leier in the plane containing the body mass center and being perpendicular to the precession axis for all possible nutation angles. Some facts on these equilibria stability are formulated.

MSC 2010: 37N05, 70H03, 70H09

Keywords: space elevator, space tether system, asteroid, unilateral constraint, problem of three bodies

Received June 7, 2011, accepted June 23, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 295–311 (Russian)

