



УДК: 531.352:629.7

MSC 2010: 70K20, 70K42

## Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел

В. В. Белецкий, А. В. Родников

Изучаются стационарные движения материальной точки в окрестности динамически симметричного прецессирующего твердого тела, гравитационное поле которого моделируется как поле тяготения двух центров. Уравнения движения такой материальной точки записываются как двухпараметрическое обобщение уравнений ограниченной круговой задачи трех тел (ОКЗТ). Исследуется существование и определяется количество относительных равновесий материальной точки в плоскости, проходящей через ось динамической симметрии твердого тела параллельно вектору его кинетического момента. Такие равновесия, являющиеся аналогами эйлеровых точек либрации в ОКЗТ названы компланарными точками либрации (КТЛ). Устойчивость КТЛ изучается в первом приближении в предположении, что притягивающие центры имеют равные массы.

Ключевые слова: задача трех тел, точки либрации, устойчивость, стационарные движения, астероид

### 1. Введение

Исследование динамики двойного астероида является одной из актуальных задач механики. Ранее в [1] была построена модель описания относительного движения такой астероидной системы, основывающаяся на следующих предположениях: малая компонента двойного астероида не оказывает влияния на движение большей компоненты; большая компонента является динамически симметричным твердым телом; гравитационное поле большей

---

Получено 30 июня 2011 года

Принято к печати 9 августа 2011 года

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00406а).

---

Белецкий Владимир Васильевич

[beletsky@keldysh.ru](mailto:beletsky@keldysh.ru)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4

Родников Александр Владимирович

[springer@inbox.ru](mailto:springer@inbox.ru)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

105005, Россия, г. Москва, 2-ая Бауманская, д. 5



компоненты есть поле тяготения двух центров. Фактически, в [1] описывается движение материальной точки пренебрежимо малой массы в окрестности гантелевидного тела, чье движение вокруг центра масс есть регулярная прецессия. Уравнения движения этой точки являются двухпараметрическим обобщением уравнений движения ограниченной круговой задачи трех тел (ОКЗТ). В [1] отмечено, что в рассматриваемой системе существуют стационарные движения, отвечающие относительным равновесиям материальной точки в системе отсчета, связанной с осью динамической симметрии большего астероида и вектором его кинетического момента. В [1, 2] установлено существование и исследована устойчивость таких равновесий в случае, когда материальная точка равноудалена от притягивающих центров. В настоящей работе исследуются равновесия другого типа, лежащие в плоскости, проходящей через ось гантели, моделирующей большой астероид, параллельно его кинетическому моменту. Такие равновесия являются отдаленными аналогами эйлеровых точек либрации (ЭТЛ) и могут быть названы компланарными точками либрации (КТЛ). В настоящей работе строятся диаграммы, иллюстрирующие зависимость количества КТЛ от значений параметров задачи. Устанавливается, что в отличие от всегда неустойчивых ЭТЛ, КТЛ могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

## 2. Уравнения для вычисления координат КТЛ

Следуя [1], рассмотрим в качестве модели большего астероида гантель, состоящую из двух однородных шаров с массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_2 \leq m_1$ ) и центрами  $O_1$  и  $O_2$  ( $O_1O_2 = l$ ), соединенных невесомым стержнем. В соответствии со сделанными предположениями, гантель совершает регулярную прецессию вокруг оси  $Oz$ , направленной по вектору кинетического момента ( $O$  — центр масс гантели) с углом нутации  $\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ) (рис. 1). Введем вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$  правую декартову систему координат  $Oxyz$  так, чтобы ось гантели лежала в плоскости  $Oxz$  и координаты точки  $O_2$  были неотрицательны. Из уравнений движения, выписанных в [1], после некоторых преобразований следует, что если  $\vartheta \neq 0, \pi/2$  (наклонная гантель) точка  $m_0$  исчезающее малой массы будет находиться в равновесии в плоскости  $Oxz$ , если

$$\xi_1^2 - \frac{2\xi_1}{1-\Phi} + \left( \zeta_1^2 - \frac{2\zeta_1}{1-\Phi} \right) \operatorname{ctg}^2 \vartheta + \frac{1}{(1-\Phi) \sin^2 \vartheta} = 0, \quad (2.1)$$

$$\alpha = \frac{(\mu - \xi_1)(1 - \zeta_1)(\xi_1^2 \sin^2 \vartheta + \zeta_1^2 \cos^2 \vartheta)^{3/2}}{(1 - \mu)(\zeta_1 - \xi_1)}, \quad (2.2)$$

где безразмерные переменные  $\xi_1$  и  $\zeta_1$  связаны с координатами материальной точки  $m_0$  соотношениями  $\zeta_1 = z/(l \cos \vartheta) + \mu$ ,  $\xi_1 = x/(l \sin \vartheta) + \mu$ ,  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ ,  $0 < \mu \leq 1/2$ ,  $\alpha = G(m_1 + m_2)/(\omega^3 l^3)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $G$  — гравитационная постоянная,

$$\Phi = \left( \frac{\mu(1 - \zeta_1)}{\zeta_1(1 - \mu)} \right)^{2/3}.$$

Заметим, что  $0 < \zeta_1 < 1$ , так как КТЛ не могут находиться вне полосы, ограниченной прямыми, проходящими через  $O_1$  и  $O_2$  параллельно  $Ox$ . Уравнение (2.1) является квадратным уравнением относительно  $\xi_1$  с коэффициентами, не зависящими от  $\alpha$ . Подставляя его корни в (2.2), получим уравнения для координаты  $\zeta_1$  КТЛ в виде

$$\alpha = f_{1,2}(\zeta_1; \vartheta, \mu). \quad (2.3)$$



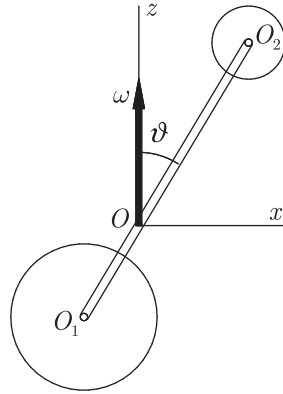


Рис. 1.

Если  $\vartheta = \pi/2$  (горизонтальная гантель), КТЛ могут лежать только на  $Ox$ , причем

$$\alpha = \frac{(\xi_1 - \mu)(1 - \xi_1)^2 \zeta_1^2}{(1 - \mu)(1 - \xi_1)^2 \text{sign } \xi_1 - \mu \xi_1^2 \text{sign}(1 - \xi_1)}. \quad (2.4)$$

Если  $\vartheta = 0$  (вертикальная гантель), удобнее использовать координату  $z$  и переменную  $\rho$  — расстояние от КТЛ до  $Oz$ . В этом случае при  $\rho \neq 0$  справедливы равенства

$$\xi = \frac{\rho}{l} = \sqrt{\frac{\zeta_1^2 \Phi - (1 - \zeta_1)^2}{1 - \Phi}}, \quad \alpha = \zeta_1(1 - \zeta_1) \left( \frac{2\zeta_1 - 1}{((1 - \mu)\zeta_1)^{2/3} - ((1 - \zeta_1)\mu)^{2/3}} \right)^{3/2}. \quad (2.5)$$

### 3. Диаграммы количества КТЛ в зависимости от значений параметров

Количество КТЛ для соответствующих значений параметров  $\alpha, \mu, \theta$  равно количеству корней уравнений (2.3), (2.4) или (2.5). Так, правая часть (2.4) является знакопеременной монотонной функцией переменной  $\xi_1$  на каждом из промежутков  $(-\infty; 0), (0; 1)$  и  $(1; \infty)$ . Поэтому для горизонтальной гантели, как и в классической ОКЗТ, существуют ровно три КТЛ.

В случае вертикальной гантели существует одна изолированная КТЛ, лежащая на оси гантели, для которой  $\zeta_1 = \sqrt{1 - \mu} / (\sqrt{1 - \mu} + \sqrt{\mu})$  и от 1 до 3 окружностей, перпендикулярных  $Oz$  с центрами на этой оси, целиком состоящих из точек либрации, каждая из которых может быть названа КТЛ при соответствующем выборе оси  $Ox$ . Количество таких окружностей (фактически являющихся стационарными орбитами — СО) определяется экстремумами функции, стоящей в правой части второго из равенств (2.5) на промежутке  $0 < \zeta_1 < 1$ , и значениями этой функции в крайних точках ее области определения. Так, для значений  $\mu$  и  $\alpha$  из области I существует 1 СО, в области II — 2 СО, в области III — 3 СО (см. рис. 2). Кривым  $AC$  и  $BC$  отвечают 2 СО, кривой  $CD$  — 1 СО. Уравнение кривой  $BCD$  имеет вид

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu(1 - \mu)}}{(1 + 2\sqrt{\mu(1 - \mu)})^2}. \quad (3.1)$$

Кривая  $AC$  была определена численно. Характерные точки имеют следующие координаты:  $A(1/2; 3\sqrt{3}/8), B(1/2; 1/8), C(1/2 - \sqrt{3}/4; 1/9), D(0; 0)$ .



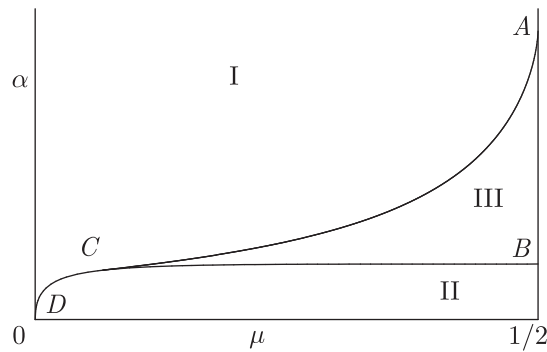


Рис. 2.

В общем случае наклонной гантели количество КТЛ определяется экстремумами правых частей (2.2) на интервале  $0 < \zeta_1 < 1$ . Результаты анализа этих экстремумов представим в виде диаграмм в плоскостях  $\mu = \text{const}$ . Диаграмма количества КТЛ для  $\mu = 1/2$ , полученная несколько отличным от излагаемого способом, была построена в [3]. В силу симметрии, в этом случае возможно только нечетное (3, 5 или 7) число КТЛ. Если же  $\mu < 1/2$ , возможны следующие ситуации.

1)  $0.1375 \lesssim \mu < 1/2$ . В этом случае может быть от 3 до 7 КТЛ. Качественная картина распределения областей плоскости параметров  $\vartheta$  и  $\alpha$ , соответствующих различному количеству КТЛ, изображена на рисунке 3. Области, в которых существует 3, 5 или 7 КТЛ, отмечены соответствующими цифрами. Для точек кривых  $EF$  и  $BF$  существуют 6 КТЛ, для точек кривых  $EA$ ,  $AC$ ,  $CF$  и  $FD$  существует 4 КТЛ, однако в точке  $F$  существует 5 КТЛ.

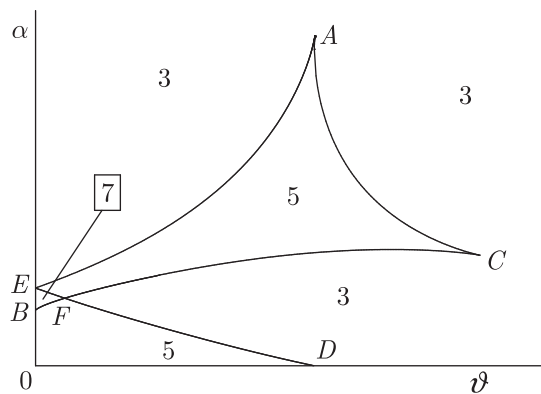


Рис. 3.

2)  $\mu \approx 0.1375$ . Этот случай отличается от изображенного на рисунке 3 тем, что кривые  $EA$  и  $FC$  касаются друг друга, т. е. одна из областей, соответствующих 5 КТЛ, разрывается на две части, причем в точке касания оказывается 3 КТЛ.

3)  $1/2 - \sqrt{3}/4 < \mu \lesssim 0.1375$ . Этот случай отличается от предыдущих наличием трех областей, в точках которых существуют 5 КТЛ, и сохранением области, соответствующей 7 КТЛ, причем в точках кривых, ее ограничивающих, существуют 6 КТЛ (за исключением точки  $F$ , в которой по-прежнему 5 КТЛ). В точках остальных «пограничных» кривых — 4 КТЛ (рис. 4).



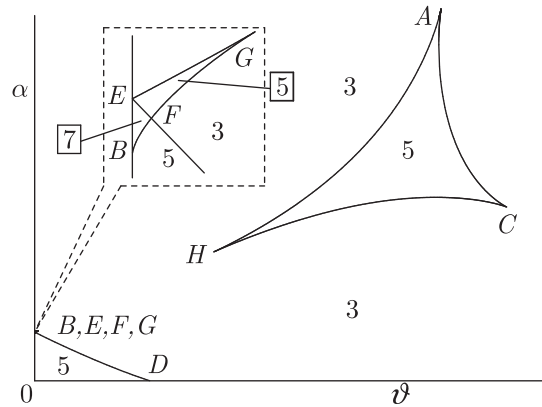


Рис. 4.

4)  $0 < \mu \leq 1/2 - \sqrt{3}/4$ . В этом случае существуют от 3 до 5 КТЛ (рис. 5). На «пограничных» кривых существуют 4 КТЛ.

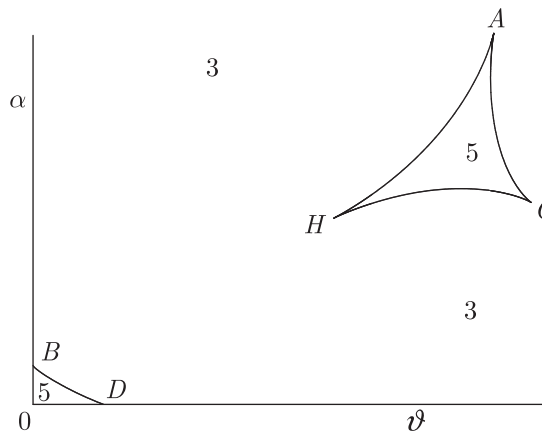


Рис. 5.

На рисунках 3–5 координаты точки  $B$  определяются формулой (3.1). Отметим также, что эти диаграммы показывают, что четное число КТЛ возможно только на некоторых двумерных многообразиях трехмерного пространства параметров задачи.

#### 4. Условия устойчивости КТЛ

Можно показать, что какова бы ни была КТЛ, характеристическое уравнение для ли-неаризованных в окрестности этой точки уравнений движения имеет вид

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0 = 0, \quad (4.1)$$

где коэффициенты  $A_2$  и  $A_0$  зависят от параметров задачи и координат исследуемой КТЛ. Нетрудно убедиться, что если

$$A_0 > 0, \quad A_2 > 0, \quad D = \left(\frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{3} + \frac{8}{27}\right)^2 + \left(\frac{3A_2 - 4}{9}\right)^3 < 0, \quad (4.2)$$

то кубическое уравнение  $x^3 + 2x^2 + A_2x + A_0 = 0$  имеет три различных отрицательных действительных корня, следовательно, (2.1) имеет три различных пары чисто мнимых корней, т.е. рассматриваемая КТЛ устойчива в первом приближении. Если же в (2.1) хотя бы один из знаков неравенства заменить на противоположный, то хотя бы один из корней кубического уравнения либо будет действительным положительным, либо будет иметь ненулевую мнимую часть. В этом случае (4.1) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью, т.е. рассматриваемая КТЛ неустойчива.

Если гантель «вертикальна» ( $\vartheta = 0$ ), можно показать, что все КТЛ неустойчивы, однако в ряде случаев можно говорить об устойчивости СО.

В случае «горизонтальной» ( $\vartheta = \pi/2$ ) гантели из (2.1) следует, что устойчивой может быть только КТЛ, расположенная между  $O_1$  и  $O_2$ . Область устойчивости этой точки затемнена на рисунке 6. В случае гантели, состоящей из равных масс ( $\mu = 1/2$ ), при любых допустимых значениях  $\alpha$  и  $\mu$  существует «центральная» КТЛ, расположенная в геометрическом центре гантели. Подставив ее координаты в (4.2), получим условия устойчивости этой точки. Из этих условий, в частности, следует, что центральная КТЛ может быть устойчива, если кроме нее существуют еще только 2 другие (как будет показано ниже, неустойчивые) КТЛ. Соответствующие области устойчивости (криволинейные треугольники  $BCD$  и  $FEG$ , наложенные на диаграмму количества КТЛ из [3]) изображены на рисунке 8. Здесь  $B(\arccos(1/3); 1/8)$ ,  $C(\pi/2; 1/8)$ ,  $D(\pi/2; 1/9)$ ,  $E(\arccos(1/3); 1/24)$ ,  $F(\arccos(\sqrt{5}/3); 1/24)$ ,  $G(\arccos(1/\sqrt{3}); 0)$ .

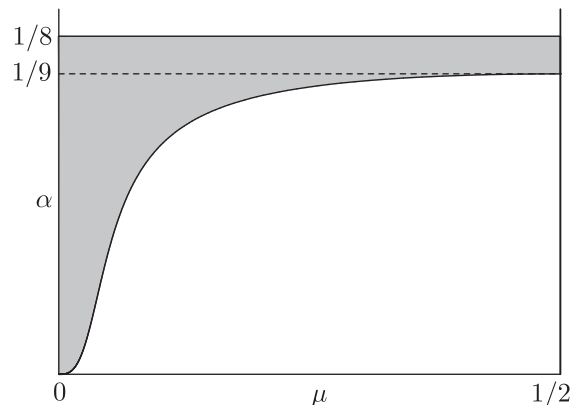


Рис. 6.

Для построения областей устойчивости для КТЛ, отличных от центральной, исключим с помощью (2.1) и (2.2) параметры  $\alpha$  и  $\vartheta$  из выражений для  $A_0$  и  $A_2$ . Для некоторого упрощения сделаем замену  $\xi_1 = 1/2 + \xi_2$ ,  $\zeta_1 = 1/2 + \zeta_2$ , поместив тем самым центр гантели в начало координат. Заметим, что в каждой из областей  $\xi_2 > 0$ ,  $\zeta_2 > 0$  и  $\xi_2 < 0$ ,  $\zeta_2 < 0$  при любых допустимых значениях параметров существует по одной КТЛ. Для этих точек  $A_0 < 0$ , поэтому они неустойчивы. Отметим, что эти точки являются аналогами L2 и L3 из ОКЗЗТ (в нумерации, принятой в [4]), поэтому и в этом случае можно говорить, что «внешние» КТЛ неустойчивы. Далее, в квадрантах  $\xi_2 > 0$ ,  $\zeta_2 < 0$  и  $\xi_2 < 0$ ,  $\zeta_2 > 0$  существуют 4 области устойчивости. Две из них затемнены на рисунке 7. Оставшиеся две симметричны изображенным относительно начала координат. (На рис. 7  $A(0.342, -0.407)$ .) Вычисляя с помощью (2.1) и (2.2) значения  $\alpha$  и  $\theta$  для точек этих четырех областей, получим области возможной устойчивости КТЛ в плоскости параметров  $\theta$  и  $\alpha$  (на рис. 8 это  $AFG$

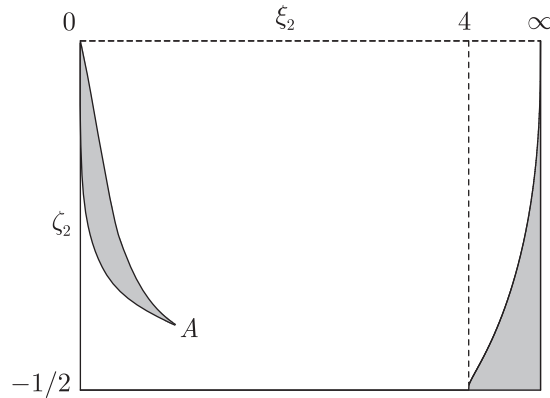


Рис. 7.

и  $ONPQ$ ; точке  $A$  на рис. 7 соответствует точка  $A(0.458; 0.046)$  на рис. 8). Можно показать, что в каждой точке построенных таким образом областей существуют ровно две устойчивые симметричные относительно центра гантели КТЛ. Таким образом, во внутренних точках криволинейных треугольников  $BCD$  и  $FEG$  существует одна устойчивая (центральная) и две неустойчивые КТЛ, в криволинейных треугольниках  $AFG$  и  $ONQ$  — 2 устойчивые и 3 неустойчивые КТЛ, в  $QRH$  — 2 устойчивые и 5 неустойчивых КТЛ, во внутренних точках остальных областей устойчивых КТЛ нет. Неупомянутые выше точки на рисунке 8 имеют следующие координаты:  $H(0; 1/8)$ ,  $P(0; 3\sqrt{3}/8)$ ,  $Q(0.07; 0.012)$ ,  $S(0.626; 0.0607)$ . Каждая из областей на этом рисунке помечена так: количество устойчивых КТЛ + количество неустойчивых КТЛ.

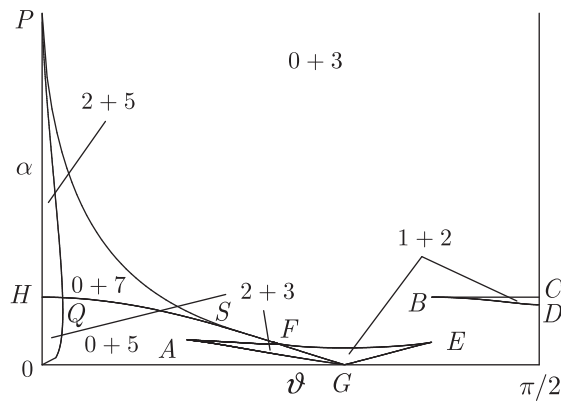


Рис. 8.

## Выводы

В настоящей работе в рамках сформулированной в [1] обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел исследованы относительные равновесия точки бесконечно малой массы, лежащие в плоскости, образованной вектором кинетического момента и осью динамической симметрии прецессирующего твердого тела, моделируемого как гантель. Показано, что количество таких равновесий, названных компланарными точками либрации (КТЛ), в зависи-



мости от значений параметров системы может меняться от 3 до 7, причем четное количество КТЛ возможно только на некоторых двумерных многообразиях трехмерного пространства параметров. Построены диаграммы количества КТЛ в виде набора двумерных сечений пространства параметров, образованных фиксированием значения одного из параметров. В случае, когда твердое тело моделируется гантелью, образованной равными массами, исследована (в первом приближении) устойчивость КТЛ. Показано, что аналоги «внешних» точек либрации неустойчивы, в то время как общее количество устойчивых КТЛ может быть равно только 1 или 2, причем одна устойчивая КТЛ возможна только при условии, что общее количество КТЛ равно трем. Построены соответствующие области устойчивости.

## Список литературы

- [1] Белецкий В. В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // Космические исследования, 2007, т. 45, № 6, с. 435–442.
- [2] Белецкий В. В., Родников А. В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Космические исследования, 2008, т. 46, № 1, с. 42–50.
- [3] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // Journal of Vibroengineering, 2008, v. 10, no. 4, pp. 550–556.
- [4] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

## Coplanar Libration Points in the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies

Vladimir V. Beletsky<sup>1</sup>, Alexander V. Rodnikov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>M. V. Keldysh Institute for Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences  
Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047, Russia

<sup>2</sup>N. E. Bauman Moscow State Technical University  
2-nd Baumanskaya st. 5, Moscow, 105005, Russia

<sup>1</sup>beletsky@keldysh.ru, <sup>2</sup>springer@inbox.ru

A particle steady motions in vicinity of dynamically symmetric precessing rigid body are studied in assumption that the body gravitational field is modeled as two centers gravitational field. The particle motion equations are written as two-parametric generalization for equations of Restricted Circular Problem of Three Bodies (RCP3B). Existence and number of the particle relative equilibria in the plane passing through the body axis of dynamical symmetry and through the vector of angular momentum are established. These equilibria called Coplanar Libration Points (CLP) are analogs of Eulerian Libration Points in RCP3B. Stability of CLP is studied for the first approximation in assumption that attracting centers have equal masses.

MSC 2010: 70K20, 70K42

Keywords: problem of three bodies, libration points, stability, steady motions, asteroid

Received June 30, 2011, accepted August 9, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 569–576 (Russian)

