



УДК: 531.36

MSC 2010: 70F25, 70E55, 70E60

Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов

А. А. Зобова

В статье рассматривается новый лаконичный метод вывода динамических уравнений неголономных систем, предложенный Я. В. Татариновым в 2003 году, в применении к описанию динамики колесных систем трех различных типов (рояльное колесо, экипажи с ролконесущими колесами, с дифференциальным приводом).

Ключевые слова: системы с дифференциальными связями, лаконичная форма уравнений движения Я. В. Татаринова, мобильные экипажи

1. Введение

Рассмотрим механическую систему с лагранжианом $L = L(\dot{q}_i, q_i, t)$, q_i ($i = 1 \dots n$) — обобщенные координаты, Q_i — соответствующие им обобщенные силы. Предположим, что на систему также наложены идеальные дифференциальные связи:

$$\dot{q}_i = v_i(\omega_\alpha, q, t). \quad (1.1)$$

Здесь ω_α ($\alpha = 1, \dots, m$, $m < n$) — псевдоскорости системы, вариации которых независимы, а матрица $\frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha}$ имеет максимальный ранг. Тогда m -мерное пространство виртуальных перемещений задается уравнениями

$$\delta q_i = \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} \delta \omega_\alpha$$

Получено 27 июня 2011 года

После доработки 17 ноября 2011 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 10-01-00292, 09-08-00925), Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант поддержки молодых российских ученых МК-698.2010.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № 14.740.12.0837).

Зобова Александра Александровна
azobova@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1



и принцип Д'Аламбера–Лагранжа может быть записан в виде (здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i\right)\frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha}\delta\omega_\alpha = 0.$$

Поскольку вариации $\delta\omega_\alpha$ независимы, то получаем уравнения движения в форме уравнений Маджи:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} = Q_i \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha}. \quad (1.2)$$

Здесь и далее $(\cdot)^*$ означает подстановку связей (1.1) и их производных в выражение в скобках. Данная форма уравнений движения легко запоминается, однако при выводе уравнений конкретных неголономных систем оказывается необходимо выразить вторые производные \ddot{q}_i обобщенных координат через $\dot{\omega}_\alpha$, ω_α , q , t из уравнений, полученных дифференцированием правой и левой части связей (1.1), что приводит к достаточно громоздким выкладкам. Кроме того, при этом подходе приходится работать с «большим» лагранжианом L , зависящим от обобщенных координат и скоростей, в котором уравнения связей не учтены, тогда как, например, в системах, включающих абсолютно твердые тела, выражение кинетической энергии через компоненты угловой скорости значительно проще, чем в обобщенных координатах. Другие формы уравнений движения также бывают неудобны для работы с конкретными механическими системами из-за явных громоздких формул для членов неголономности (уравнения Чаплыгина, Воронца и др.) либо из-за сложности в выводе энергии ускорений (уравнения Ашеля).

В 2003 году Я. В. Татаринев предложил новую лаконичную форму уравнений классической механики для систем, содержащих любые виды связей, в том числе нелинейные и сервосвязи, которая имеет хорошо запоминающийся вид и сводит написание уравнений к последовательности общепринятых операций (аналогично последовательности операций для получения уравнений Лагранжа второго рода для голономных систем). Естественно, в результате динамические уравнения механических систем одинаковы, каким бы методом они ни были составлены, однако используемая здесь форма наиболее экономична в части производимых выкладок. Цель настоящей статьи — проиллюстрировать сильные стороны данного метода в задачах о движении мобильных экипажей с неголономными идеальными связями. Для полного ознакомления с мощью данного метода (геометрические аспекты, системы с сервосвязями, универсальные характеристические функции и др.) можно обратиться к статье [1] и препринту [2].

2. Уравнения классической механики в лаконичных формах

Введем тройственную характеристическую функцию

$$Y = Y(\omega, q, p, t) = L^* - p_i v_i, \quad (2.1)$$

где $L^* = L^*(\omega, q, t) = L(v_i(\omega, q, t), q, t)$ — лагранжиан с учетом связей (1.1), а p_i — формальные импульсы, которые пока никак не связаны с исходным лагранжианом. Обозначим $\frac{d^\omega}{dt}$ следующий дифференциальный оператор:

$$\frac{d^\omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\omega}_\alpha \frac{\partial}{\partial \omega_\alpha}. \quad (2.2)$$



Нужная нам скобка Пуассона вводится обычным образом:

$$\{F, H\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i}.$$

Для получения динамических уравнений необходимо составить уравнения

$$\frac{d^\omega}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha} - \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha}, Y \right\} = Q_i \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} \tag{2.3}$$

и, получив в правой и левой части выражения, зависящие от $\dot{\omega}_\alpha, \omega_\alpha, q_i, p_i, t$, только после этого подставить выражения для импульсов $p_i = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)^*$.

Приведем полное доказательство указанного метода, преобразовав левую часть уравнений (1.2) к левой части (2.3). Воспользуемся следующей леммой:

Лемма. Для любой функции $\Phi = \Phi(\dot{q}, q, t)$ справедливо

$$\left[\frac{d}{dt} \Phi(\dot{q}, q, t) \right]^* \equiv \frac{d}{dt} \left[\Phi(\dot{q}, q, t) \right]^*.$$

Доказательство леммы сводится к непосредственной проверке и дифференцированию сложной функции. Также для доказательства необходимо провести следующие простые выкладки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} &= \frac{\partial L(v_i(\omega, q, t), q, t)}{\partial \omega_\alpha} = \left[\frac{\partial L(\dot{q}, q, t)}{\partial \dot{q}_i} \right]^* \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^* \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^* \frac{d}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha}, \\ \frac{\partial L^*}{\partial q} &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^* \frac{\partial v_i}{\partial q} + \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \right]^*, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d^\omega}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_i} v_i. \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть (1.2):

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^* \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} - \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \right]^* \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^* \frac{d}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} - \\ - \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} \left(\frac{\partial L^*}{\partial q_i} - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^* \frac{\partial v_i}{\partial q_i} \right) &= \frac{d^\omega}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} + \frac{\partial^2 L^*}{\partial q_i \partial \omega_\alpha} v_i - p_i \left[\frac{d^\omega}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial q_j \partial \omega_\alpha} v_j \right] - \\ - \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} \left(\frac{\partial L^*}{\partial q_i} - p_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} \right) &= \text{л. ч.} \end{aligned}$$

В последнем преобразовании символом p_i обозначено выражение $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]^*$. С этого момента символы p_i трактуются как независимые переменные, и для завершения доказательства остается свернуть последнее выражение при помощи формальной скобки Пуассона по переменным q_i, p_i к лаконичному виду левой части (2.3). Итак,

$$\text{л. ч.} = \frac{d^\omega}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha} + v_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} - p_i \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} \right) - \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha} \left(\frac{\partial L^*}{\partial q_i} - p_l \frac{\partial v_l}{\partial q_i} \right) =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{d^\omega}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha} + \left(-\frac{\partial Y}{\partial p_j} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha} - \left(\frac{\partial Y}{\partial q_i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha} \right) = \\
&= \frac{d^\omega}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha} - \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha}, Y \right\},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для линейных по псевдоскоростям и не зависящих от времени связей, которые возникают в приложениях, в [2] была предложена еще одна форма уравнений, не требующая введения функции Y и оператора (2.2). Введем функции $P_\alpha(q, p)$ с помощью тождества $P_\alpha \omega_\alpha = p_i v_i$, тогда уравнения (2.3) примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \{P_\alpha, \omega_\mu P_\mu\} + Q_i \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\alpha}. \quad (2.4)$$

Здесь также после проведения всех необходимых преобразований необходимо подставить выражение для $p_i = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)^*$. (В случае когда на систему не наложены дифференциальные связи (1.1), т. е. $m = n$, $\omega_\alpha \equiv \dot{q}_i$ и $P_\alpha \equiv p_i$, из указанных уравнений после вычисления скобок Пуассона непосредственно получаем уравнения Лагранжа второго рода.)

Доказательство. Преобразуем левую часть уравнений (2.3), воспользовавшись тем, что P_α не зависит от t и ω , L^* не зависит от p_i и $\frac{\partial}{\partial p_i} P_\alpha \omega_\alpha = v_i$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^\omega}{dt} \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha} - \left\{ \frac{\partial Y}{\partial \omega_\alpha}, Y \right\} &= \frac{d^\omega}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} - P_\alpha \right) - \left\{ \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} - P_\alpha, L^* - P_\mu \omega_\mu \right\} = \\
&= \frac{d^\omega}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} \right) - \left\{ \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} - P_\alpha, L^* - P_\mu \omega_\mu \right\} = \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} \right) v_i + \left\{ \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha}, P_\mu \omega_\mu \right\} + \{P_\alpha, L^*\} - \{P_\alpha, P_\mu \omega_\mu\} = \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\alpha} \right) + \{P_\alpha, L^*\} - \{P_\alpha, P_\mu \omega_\mu\},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Далее рассмотрим ряд примеров применения уравнений (2.4) в динамике мобильных экипажей.

3. Динамика рояльного колеса

Рассмотрим динамику рояльного колеса, на которое действует постоянная тяговая сила, направленная вдоль некоторого постоянного в абсолютном пространстве направления. Пусть абсолютно твердый диск радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости Oxy , так что его плоскость все время остается вертикальной. Ось диска закреплена в вилке, которая может поворачиваться без трения относительно вертикали Oz . К вилке приложена постоянная сила, направленная вдоль оси Ox (см. рис. 1). Составим динамические уравнения движения вилки и колеса с помощью уравнений (2.4).

Выберем следующие обобщенные координаты системы: угол χ поворота диска относительно его оси, угол θ поворота вилки относительно вертикали и координаты x и y центра



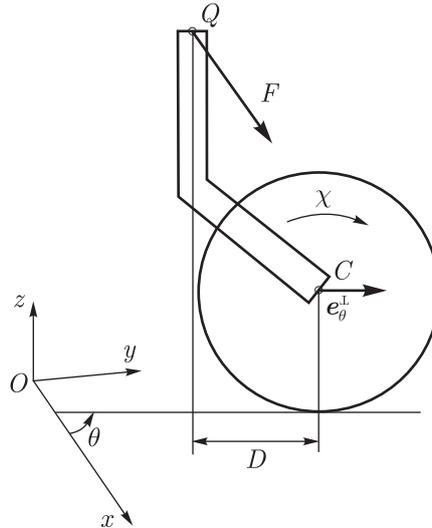


Рис. 1. Рояльное колесо.

колеса (высота центра колеса C предполагается постоянной $z = R$). Лагранжиан L системы равен кинетической энергии системы, так как потенциал силы тяжести не меняется во время движения, а других потенциальных сил нет. Предположим, что центр масс всей системы совпадает с центром колеса C , а ось диска является главной центральной осью инерции. Тогда

$$2L = mv_C^2 + (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J_1\dot{\theta}^2 + J_3\dot{\chi}^2.$$

Здесь m — масса всей системы, J_1 — момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через точку C , J_3 — момент инерции системы относительно оси колеса. Связи, наложенные на данную систему,— отсутствие проскальзывания наинизшей точки колеса:

$$\dot{x} = R\dot{\chi} \cos \theta, \quad \dot{y} = R\dot{\chi} \sin \theta. \tag{3.1}$$

Таким образом, лагранжиан с учетом связей имеет вид

$$2L^* = (mR^2 + J_3)\dot{\chi}^2 + J_1\dot{\theta}^2.$$

Система имеет две степени свободы. В качестве псевдоскоростей выберем обобщенные скорости $\dot{\theta}$ и $\dot{\chi}$. Следуя алгоритму, представленному в пункте 2, составим сумму

$$P_\theta\dot{\theta} + P_\chi\dot{\chi} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_\theta\dot{\theta} + p_\chi\dot{\chi}$$

и с учетом связей получим

$$P_\theta = p_\theta, \quad P_\chi = p_x R \cos \theta + p_y R \sin \theta + p_\chi.$$

Вычислим скобку Пуассона и после вычисления подставим выражения для импульсов $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ и связи (3.1):

$$\begin{aligned} \left(\{P_\theta, P_\chi\} \right)^* &= (-1(p_x R \sin \theta + p_y R \cos \theta))^* = \\ &= mR^2 \dot{\chi} \cos \theta \sin \theta - mR^2 \dot{\chi} \sin \theta \cos \theta = 0. \end{aligned}$$



Поскольку лагранжиан не зависит от координат и формальных импульсов, то $\{L^*, P_{\theta, \chi}\} = 0$. Таким образом, получаем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} = Q_\theta, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\chi}} = Q_\chi.$$

Найдем теперь обобщенные силы Q_θ , Q_χ . Пусть к верхней точке Q вилки приложена сила $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x$, направленная вдоль абсолютной оси Ox . Тогда элементарная работа этой силы на виртуальном перемещении точки Q с учетом связей имеет вид

$$\begin{aligned} \delta A &= (\mathbf{F}, \delta \mathbf{r}_Q) = (\mathbf{F}, \delta \mathbf{r}_C + [\delta \theta \mathbf{e}_z \times \overrightarrow{CQ}]) = (F\mathbf{e}_x, \delta x\mathbf{e}_x + \delta y\mathbf{e}_y + \\ &+ [\delta \theta \mathbf{e}_z \times (-D\mathbf{e}_\theta^\perp)]) = F\delta x + DF \sin \theta \delta \theta = RF \cos \theta \delta \chi + DF \sin \theta \delta \theta. \end{aligned}$$

Отсюда находим обобщенные силы $Q_\theta = DF \sin \theta$, $Q_\chi = RF \cos \theta$ и получаем динамические уравнения системы:

$$J_1 \ddot{\theta} = DF \sin \theta, \quad (3.2)$$

$$(J_3 + mR^2) \ddot{\chi} = RF \cos \theta. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.2) сразу следует хорошо известный факт, что устойчивым движением роляльного колеса вдоль оси Ox является движение, когда колесо следует за толкающей силой (центр колеса C следует позади точки Q приложения силы, например, $F > 0$, $D > 0$, $\theta = \pi$).

4. Экипаж с роликонесущими колесами

Рассмотрим модели мобильных экипажей с колесами, которые получили название окольцованные и роликонесущие (или омниколеса¹, механум-колеса, называемые также «шведскими»²). Конструкция этих колес такова: на периферии диска каждого колеса укреплены ролики, так что колесо может опираться на несущую поверхность только роликом. Ролик может свободно вращаться относительно некоторой неподвижной в диске колеса оси. Для омниколес ось вращения ролика является касательной к окружности диска, для механум-колес она повернута на угол 45° . Такое колесо обладает следующим свойством: опираясь на поверхность одним роликом, оно может катиться по прямой перпендикулярно плоскости диска (при этом опорный ролик вращается, а диск колеса нет). Практический подход к созданию экипажей с такими колесами хорошо разработан зарубежными авторами (см., например, [3, 4] и библиографию в указанных статьях). Подробные аналитические исследования динамики таких экипажей изложены в статьях [5–9]. Здесь остановимся на выводе уравнений движений с помощью приведенного выше алгоритма.

Рассмотрим движение экипажа с N роликонесущими колесами радиуса R по шероховатой горизонтальной плоскости OXY . Колеса установлены на тележке жестко, т. е. колесо не может поворачиваться вокруг вертикальной оси Qz относительно экипажа. Введем обобщенные координаты: x, y — координаты центра масс S на плоскости OXY , курсовой угол θ (т. е. угол между осью OX и некоторой фиксированной относительно корпуса экипажа осью

¹<http://kornylak.com/wheels/omniwheel.html>

²Pon В. Е. Wheels for a course stable self propelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base // US Patent 3,876,255.

$Q\xi$) и углы собственного вращения колес $\chi_i, i = 1, \dots, N$. Предположим, что ось $Q\eta$, дополняющая оси $Q\xi$ и Qz до правой тройки $Q\xi\eta z$, проходит через точку $S, QS = \Delta R$ (см. рис. 2). Геометрию установки колес зададим следующим образом: $\delta_i R$ — расстояние от Q до центра i -того колеса P_i, α_i — угол между осью $Q\xi$ и направлением $\overrightarrow{QP_i}, \beta_i$ — угол между осью $Q\xi$ и осью колеса \mathbf{n}_i , угол γ_i между осью ролика и нормалью к плоскости колеса равен $\pi/2$ (омниколеса) или $\pm\pi/4$ (меканум-колеса).

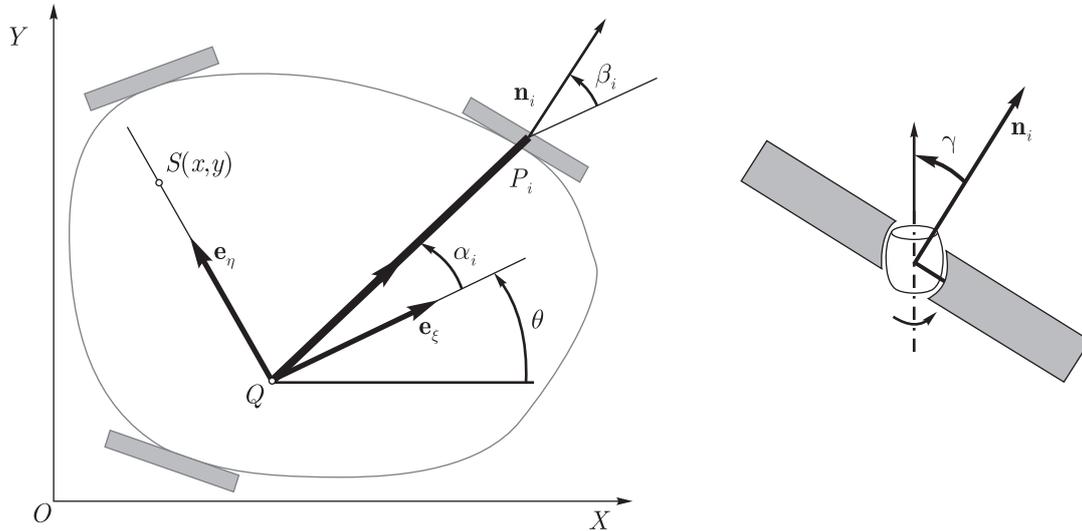


Рис. 2. Геометрия экипажа с роликонесущими колесами.

Введем также псевдоскорости ν_1, ν_2, ν_3 следующим образом: $\mathbf{v}_S = R\nu_1\mathbf{e}_\xi + R\nu_2\mathbf{e}_\eta, \nu_3 = \Lambda\dot{\theta}$ (ν_1 и ν_2 — с точностью до коэффициента проекции скорости центра масс на оси, жестко связанные с корпусом экипажа, смысл безразмерного множителя Λ будет выявлен ниже).

Самая простая модель роликонесущего колеса — твердый диск, скорость наинизшей точки которого перпендикулярна направлению оси ролика в этой точке (динамика роликов в такой модели не учитывается). Запишем дифференциальные уравнения связей (подробный вывод уравнений связи приведен в [8]):

$$\dot{\chi}_i \sin \gamma_i = \cos(\beta_i + \gamma_i)\nu_1 + \sin(\beta_i + \gamma_i)\nu_2 + (\Delta \cos(\beta_i + \gamma_i) + \delta_i \sin(\beta_i + \gamma_i - \alpha_i)) \dot{\theta}.$$

Тогда уравнения (1.1) имеют вид

$$\dot{x} = R \cos \theta \nu_1 - R \sin \theta \nu_2, \quad \dot{y} = R \sin \theta \nu_1 + R \cos \theta \nu_2, \quad \dot{\theta} = \Lambda^{-1} \nu_3, \tag{4.1}$$

$$\|\dot{\chi}_1, \dots, \dot{\chi}_N\|^T = \Xi \|\nu_1, \nu_2, \nu_3\|^T, \quad \Xi = \|\sigma_{is}\|, \tag{4.2}$$

$$\sigma_{i1} = \frac{\cos(\beta_i + \gamma_i)}{\sin \gamma_i}, \quad \sigma_{i2} = \frac{\sin(\beta_i + \gamma_i)}{\sin \gamma_i}, \tag{4.3}$$

$$\sigma_{i3} = \frac{\Delta \cos(\beta_i + \gamma_i) + \delta_i \sin(\beta_i + \gamma_i - \alpha_i)}{\Lambda \sin \gamma_i}. \tag{4.4}$$

Лагранжиан L системы имеет вид

$$2L = 2T = M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_S \dot{\theta}^2 + J(\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 + \dots + \dot{\chi}_n^2).$$



Здесь M — полная масса системы, I_S — полный момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку S , J — момент инерции каждого колеса относительно его оси. Введем безразмерные параметры Λ и λ следующим образом: $I_S = \Lambda^2 MR^2$, $J = \lambda^2 MR^2$, тогда

$$2L^* = MR^2 \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{E} + \lambda^2 \boldsymbol{\Xi}^T \boldsymbol{\Xi}) \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu} = \|\nu_1, \nu_2, \nu_3\|^T.$$

Воспользуемся уравнениями (2.4). Выпишем сумму

$$p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_\theta \dot{\theta} + p_1 \dot{\chi}_1 + \dots + p_N \dot{\chi}_N = \sum_{\alpha=1}^3 P_\alpha \nu_\alpha,$$

тогда для P_α получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_1 &= R(p_x \cos \theta + p_y \sin \theta) + \sum p_i \sigma_{1i}, \\ P_2 &= R(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta) + \sum p_i \sigma_{2i}, \\ P_3 &= \frac{p_\theta}{\Lambda} + \sum p_i \sigma_{3i}. \end{aligned}$$

Посчитаем формальные скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} \{P_1, P_2\} &= -\frac{\partial P_1}{\partial p_x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial p_x} + \dots = 0, \\ \{P_1, P_3\} &= \frac{\partial P_1}{\partial \theta} \frac{\partial P_3}{\partial p_\theta} = R(-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta) \frac{1}{\Lambda}, \\ \{P_2, P_3\} &= \frac{\partial P_2}{\partial \theta} \frac{\partial P_3}{\partial p_\theta} = R(-p_x \cos \theta - p_y \sin \theta) \frac{1}{\Lambda}. \end{aligned}$$

Также заметим, что лагранжиан системы не зависит от обобщенных координат и импульсов, поэтому $\{P_\alpha, L^*\} = 0$.

Теперь необходимо подставить выражения для импульсов: $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$. Подставляя связи (4.1), получим:

$$\begin{aligned} p_x^* &= (M\dot{x})^* = MR(\cos \theta \nu_1 - \sin \theta \nu_2), & p_y^* &= (M\dot{y})^* = MR(\sin \theta \nu_1 + \cos \theta \nu_2), \\ \{P_1, P_3\}^* &= \frac{MR^2}{\Lambda} \nu_2, & \{P_2, P_3\}^* &= -\frac{MR^2}{\Lambda} \nu_1. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_1} = \frac{MR^2}{\Lambda} \nu_2 \nu_3 + Q_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_2} = -\frac{MR^2}{\Lambda} \nu_1 \nu_3 + Q_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \nu_3} = Q_3, \quad (4.5)$$

где $Q_\alpha = Q_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu_\alpha}$ — обобщенные силы, действующие на систему. В развернутом матричном виде уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \Lambda^{-1} \mathbf{a} + (MR^2)^{-1} \mathbf{Q}^T, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{E} + \lambda^2 \boldsymbol{\Xi}^T \boldsymbol{\Xi}, \quad \mathbf{a} = \|\nu_2 \nu_3, -\nu_1 \nu_3, 0\|^T, \quad \mathbf{Q} = \|Q_1, Q_2, Q_3\|. \end{aligned} \quad (4.6)$$



Для примера вычисления обобщенных сил \mathbf{Q} предположим, что в осях колес со стороны корпуса приложены управляющие моменты $M_i \mathbf{n}_i = (c_1 U_i - c_2 \dot{\chi}_i) \mathbf{n}_i$, где U_i — управляющие напряжения. Моменты $\mathbf{M} = \|M_1, \dots, M_N\|$ являются обобщенными силами Q_i по координатам χ_i (т. е. элементарная работа имеет вид $\delta A = \sum M_i \delta \chi_i$) и $\left\| \frac{\partial v_i}{\partial \nu_\alpha} \right\| = \Xi$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}\Xi = (c_1 \mathbf{U} - c_2 \dot{\chi})\Xi = c_1 \mathbf{U}\Xi - c_2 \nu^T \Xi^T \Xi.$$

Уравнения управляемых движений в таком случае имеют вид

$$\mathbf{A}\dot{\nu} = \frac{1}{\Lambda} \mathbf{a} + (MR^2)^{-1} c_1 \Xi^T \mathbf{U}^T - (MR^2)^{-1} c_2 \Xi^T \Xi \nu. \quad (4.7)$$

Таким образом, получены уравнения движения экипажа с роликонесущими колесами с произвольной геометрией, которые позволяют выявить структуру и общие динамические свойства таких систем, а также дают возможность ставить задачи оптимизации геометрии мобильного экипажа. Далее кратко изложим основные результаты по динамике экипажа при движении по инерции и при наличии управления.

5. Динамика экипажа с роликонесущими колесами

Рассмотрим сначала задачу о движении экипажа по инерции при отсутствии трения в осях колес [8]. Тогда уравнения движения будут иметь вид

$$\mathbf{A}\dot{\nu} = \frac{1}{\Lambda} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \|\nu_2 \nu_3, -\nu_1 \nu_3, 0\|^T. \quad (5.1)$$

Система допускает интеграл энергии $T^* = MR^2 h \equiv \text{const}$ и линейный интеграл $\frac{\partial T^*}{\partial \nu_3} = MR^2 K \equiv \text{const}$, а также инвариантную меру $\mu = \frac{d\nu_1 \wedge d\nu_2 \wedge d\nu_3}{|\nu_3|}$. В пространстве псевдоскоростей ν_1, ν_2, ν_3 траектории системы лежат на сечении эллипсоида $\nu \mathbf{A} \nu^T = 2h = \text{const}$, являющемся уровнем интеграла энергии, плоскостью линейного интеграла $\frac{\partial T^*}{\partial \nu_3} = \text{const}$.

Для примера рассмотрим экипаж с тремя колесами со следующей геометрией (см. рис. 3): $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi, \alpha_3 = \pi/2, \beta_i = \alpha_i, \gamma_i = \pi/2, i = 1, \dots, 3, \delta_1/\Lambda = \delta_2/\Lambda = \sigma > 0, (\delta_3 - \Delta)/\Lambda = \rho > 0$. Уравнения движения такого экипажа имеют вид:

$$A_1 \dot{\nu}_1 - \kappa A_3 \dot{\nu}_3 = \frac{1}{\Lambda} \nu_2 \nu_3, \quad A_2 \dot{\nu}_2 = -\frac{1}{\Lambda} \nu_1 \nu_3, \quad -\kappa A_3 \dot{\nu}_1 + A_3 \dot{\nu}_3 = 0,$$

где $A_1 = 1 + \lambda^2, A_2 = 1 + 2\lambda^2, A_3 = 1 + (2\sigma^2 + \rho^2)\lambda^2, \kappa = \rho\lambda^2/A_3$. Заметим, что κ (с точностью до положительного множителя) — расстояние от переднего колеса до центра масс системы.

На плоскости (ν_3, ν_2) траектории системы с различной энергией h принадлежат концентрическим эллипсам с центром на оси $\nu_2 = 0$ (фазовый портрет представлен на рис. 4). Центр эллипсов $\nu_2 = 0, \nu_3 = A_3^{-1} K$ соответствует равномерному вращению экипажа вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс ($\nu_1 \equiv 0, \nu_2 \equiv 0, \dot{\theta} \equiv \text{const}, x \equiv x_0, y \equiv y_0$). Особая прямая $\nu_3 = 0$ соответствует равномерному прямолинейному движению экипажа (угол θ во время движения постоянен, причем ось симметрии экипажа не обязана быть параллельна курсу). В полупространстве $\nu_3 > 0$ движение по эллипсам происходит по часовой



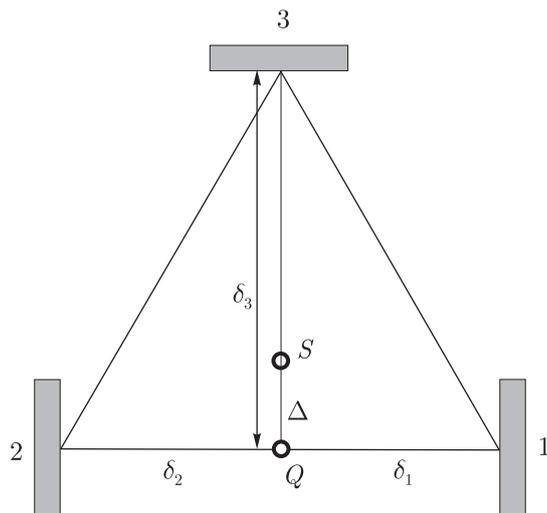


Рис. 3. Экипаж с тремя омниколесами.

стрелке, а в полупространстве $\nu_3 < 0$ — против часовой стрелки, т. е. равномерные прямолинейные движения ($\nu_2 = \text{const}$, $\nu_3 = 0$) устойчивы при $\nu_2 < 0$ и неустойчивы при $\nu_2 > 0$ (здесь и далее имеется в виду устойчивость по части переменных — по псевдоскоростям ν_s и модулю скорости центра масс $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$). Физический смысл этого условия заключается в том, что прямолинейное движение устойчиво, если и только если центр масс во время движения находится позади оси параллельных колес.

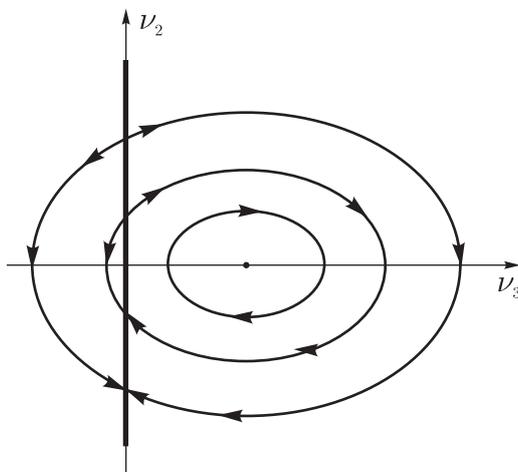


Рис. 4. Фазовый портрет движений по инерции экипажа с омниколесами.

Периодическим движениям изображающей точки по эллипсам соответствует следующее движение экипажа: центр масс описывает многолепестковую кривую, при этом платформа вращается вокруг вертикальной оси в некотором постоянном направлении. Непериодическим (асимптотическим) движениям (т. е. движениям с большой энергией) соответствуют следующие движения экипажа: при $t \rightarrow \infty$ движение экипажа асимптотически стремится к прямолинейному равномерному движению.

Было проведено также исследование существования и устойчивости управляемых стационарных движений при таких постоянных управляющих напряжениях U_i экипажа, которые допускает важный класс движений $\dot{\chi}_1 = -\dot{\chi}_2$ (параллельные колеса равномерно вращаются в одну сторону) [8]. Тогда, помимо прямолинейных стационарных движений существуют еще и вращательные: на опорной плоскости центр масс движется по окружности, при этом экипаж равномерно вращается вокруг вертикали $\dot{\theta} = \omega$, проходящей через центр масс. Анализ устойчивости показывает, что прямолинейные движения устойчивы при $\nu_2 < 2\Lambda\rho^{-1}\sigma^2$. На бифуркационной диаграмме (ν_2, ω) прямолинейные стационарные движения представляют собой прямую, а вращательные — параболу (рис. 5, полужирными линиями выделены устойчивые стационарные движения). Ветви параболы направлены вправо, ее вершина находится в точке

$$\omega_0 = -\frac{\rho\nu_1}{2(\rho^2 + 2\sigma^2)}, \quad (\nu_2)_0 = \frac{2\Lambda\sigma^2}{\rho} - \frac{\rho\nu_1^2}{\Lambda(\rho^2 + 2\sigma^2)}.$$

Показано, что при некоторых значениях массо-инерционных параметров происходит потеря устойчивости вращательных стационарных движений с возникновением неустойчивых предельных циклов.

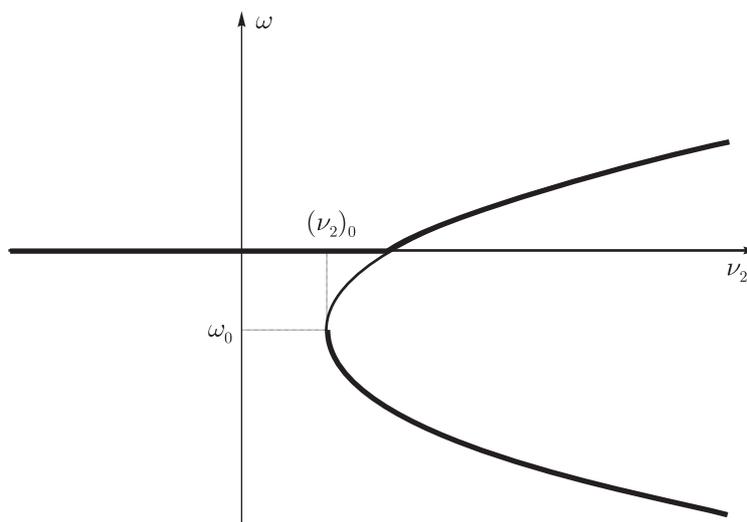


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма стационарных движений экипажа с омниколесами.

6. Экипаж с дифференциальным приводом

Уравнения (2.4), помимо своей компактной и запоминающейся формы, обладают следующим удобным для приложений свойством. Предположим, что на изучаемую систему накладывается дополнительная дифференциальная линейная связь (например, для исследования выделенного класса программных движений или для сравнения динамических свойств полученной и предшествующих моделей). Тогда для получения уравнений движения новой модели необходимо подстановкой дополнительной связи составить новый лагранжиан \tilde{L}^* , выделить из исходного набора псевдоскоростей (которые после наложения связи стали зависимыми), некоторой независимой подсистемы, заново составить выражения

для величин \tilde{P}_α , которые окажутся линейными комбинациями старых P_α , и, воспользовавшись свойством линейности скобок Пуассона, вычислить выражения для $\{L^*, \tilde{P}_\beta\}$ и $\{\tilde{P}_\alpha, \tilde{P}_\beta\}$. В качестве примера получим хорошо известные уравнения движения экипажа с дифференциальным приводом из уравнений (4.7).

Рассмотрим экипаж с омниколесами, аналогичный описанному выше, но без третьего колеса, т. е.

$$\Xi^0 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \sigma \\ 0 & -1 & \sigma \end{array} \right\|, \quad A^0 = \left\| \begin{array}{ccc} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{array} \right\|, \quad (6.1)$$

где $A_1 = 1 + \lambda^2$, $A_2 = 1 + 2\lambda^2$, $A_3 = 1 + 2\sigma^2\lambda^2$. Уравнения движения (2.4) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\nu}_1 &= \frac{1}{\Lambda} \nu_2 \nu_3, \\ A_2 \dot{\nu}_2 &= -\frac{1}{\Lambda} \nu_1 \nu_3 + (MR^2)^{-1} (M_1 - M_2), \\ A_3 \dot{\nu}_3 &= (MR^2)^{-1} \sigma (M_1 + M_2). \end{aligned}$$

Сведем эту механическую систему к хорошо известной модели экипажа с дифференциальным приводом, движущегося по шероховатой горизонтальной плоскости. Он представляет собой платформу с двумя обычными колесами, плоскости которых вертикальны, параллельны друг другу и неподвижны относительно платформы [10]. В осях колес приложены независимые управляющие моменты. Предполагается, что колеса не проскальзывают относительно опорной плоскости. Это условие можно получить, добавив к связям (4.1) следующее условие: скорость средней точки оси колес Q направлена вдоль оси $Q\eta$, т. е.

$$0 = (\mathbf{v}_Q, \mathbf{e}_\xi) = (\mathbf{v}_S + [\dot{\theta} \mathbf{e}_z \times (-R\Delta \mathbf{e}_\eta)], \mathbf{e}_\xi) = R(\nu_1 + \Delta\Lambda^{-1}\nu_3).$$

Таким образом, дополнительное условие связи имеет вид $\nu_1 = -\Delta\Lambda^{-1}\nu_3$. В качестве независимых псевдоскоростей выберем ν_2 , ν_3 . Новый лагранжиан с учетом связей принимает вид $2L^* = A_2\nu_2^2 + (\Delta^2\Lambda^{-2}A_1 + A_3)\nu_3^2$. Введем новые функции \tilde{P}_α : составим сумму $\tilde{P}_2\nu_2 + \tilde{P}_3\nu_3 = P_1(-\Delta\Lambda^{-1})\nu_3 + P_2\nu_2 + P_3\nu_3$, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 &= P_2, \quad \tilde{P}_3 = -\Delta\Lambda^{-1}P_1 + P_3, \\ \{\tilde{P}_2, \tilde{P}_3\}^* &= \{P_2, P_3\}^* - \Delta\Lambda^{-1}\{P_2, P_1\}^* = -\frac{MR^2}{\Lambda}(\nu_1)^* = \frac{MR^2\Delta}{\Lambda^2}\nu_3. \end{aligned}$$

Обобщенные силы в системе не изменились, так как первый столбец матрицы Σ^0 нулевой. Таким образом, окончательно получаем уравнения движения экипажа с дифференциальным приводом (ср. с [10]):

$$\begin{aligned} A_2 \dot{\nu}_2 &= \Delta\Lambda^{-2}\nu_3^2 + (MR^2)^{-1}(M_1 - M_2), \\ (\Delta^2\Lambda^{-2}A_1 + A_3)\dot{\nu}_3 &= -\Delta\Lambda^{-2}\nu_2\nu_3 + (MR^2)^{-1}\sigma(M_1 + M_2). \end{aligned}$$

Сравнение динамики экипажа с роликонесущими колесами с экипажем с дифференциальным приводом проведено в работе [7].



7. Заключение

В статье приведено доказательство и подробные примеры использования лаконичных форм уравнений движений систем с идеальными дифференциальными связями. Данный метод удобен для вывода уравнений конкретных неголономных систем, содержащих более одного тела, которые часто встречаются, например, в робототехнике, и при этом позволяет компактно и наглядно получать уравнения системы при наложении дополнительных связей на исходную механическую систему. Уравнения в предложенной форме также удобно программировать в системах символьных вычислений, так как они представляют собой четкую последовательность простых математических операций (подстановку выражений, приведение подобных слагаемых, дифференцирование).

Список литературы

- [1] Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в новой форме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2003, вып. 3, с. 67–76.
- [2] Татаринов Я. В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. 88 с.
- [3] Williams II R. L., Carter B. E., Gallina P., Rosati G. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots // IEEE Trans. Robotics and Automation, 2002, vol. 18, no. 3, pp. 285–293.
- [4] Ashmore M., Barnes N. Omni-drive robot motion on curved paths: The fastest path between two points is not a straight line // Proc. 15th Australian Joint Conf. on Artificial Intelligence, 2002. P. 225–236.
- [5] Зобова А. А., Татаринов Я. В. Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами // Мобильные роботы и мехатронные системы: Материалы научной школы-конференции (Москва, 23–27 октября 2006 г.). М.: МГУ, 2006. С. 61–67.
- [6] Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2007, № 6, с. 142–149.
- [7] Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2008, № 6, с. 61–66.
- [8] Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ, 2009, т. 73, вып. 1, с. 13–22.
- [9] Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ, 2010, т. 74, вып. 4, с. 610–619.
- [10] Девянин Е. А., Буданов В. М. О движении колесных роботов // ПММ, 2003, т. 26, вып. 2, с. 244–255.

Application of laconic forms of the equations of motion in the dynamics of nonholonomic mobile robots

Alexandra A. Zobova

Lomonosov Moscow State University
 Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia
 azobova@gmail.com

The paper considers a new laconic method for deriving the dynamical equations of nonholonomic systems proposed by Ya. V. Tatarinov in 2003 for description of the dynamics of wheel systems of three different types (piano wheel, carriages with roller-bearing wheels, with differential drive).

MSC 2010: 70F25, 70E55, 70E60

Keywords: systems with differential constraints, laconic form of Ya. V. Tatarinov's equations of motion, mobile vehicles

Received June 27, 2011, accepted November 17, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 4 (Mobile Robots), pp. 771–783 (Russian)

