



УДК: 517.9+621.372.011.7

MSC 2010: 34F05, 60G05, 60G20, 60G35, 93E35

Редупликация хаотических аттракторов и построение составных мультиаттракторов

В. Г. Прокопенко

В статье на примере уравнений Лоренца рассмотрен способ формирования составных (композиционных) хаотических мультиаттракторов, представляющих собой объединение нескольких локальных аттракторов, являющихся копиями некоторого исходного хаотического аттрактора.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, автостохастическая система, хаотический аттрактор, аттрактор Лоренца, составной мультиаттрактор, метастабильный аттрактор, многосегментная нелинейность, перемежаемость, хаотические переключения, редуплицирующий оператор

Одним из характерных свойств хаотического и стохастического движения является возможность непредсказуемой самопроизвольной смены динамических режимов [1, 2]. Оно связано с различными типами взаимодействия аттракторов и проявляется, в частности, в виде перемежаемости «квазирегулярное движение–хаос» (перемежаемость I, II и III типа по И. Помо и П. Манневиллю [3–9]) и перемежаемости «хаос–хаос» [10–14]. В известных примерах этого явления оно выступает как следствие принципиальной неустранимости бифуркаций предельных множеств в квазиаттракторах с изменением параметров динамической системы [14].

Однако необходимость внутренней перестройки аттракторов для организации их взаимодействия в ряде случаев оказывается весьма «неудобной». Например, если нужно получить взаимодействие хаотических аттракторов со строго заданными параметрами или надежно отделить эффекты взаимодействия от результатов собственно вариации параметров динамической системы.

Получено 16 января 2011 года

После доработки 14 марта 2011 года

Прокопенко Вадим Георгиевич

vadipro@yandex.ru

Южный федеральный университет

344006, Россия, г. Ростов-на Дону, ул. Большая Садовая, 105/44

Поэтому представляет интерес исследование возможности реализации взаимодействия хаотических аттракторов без принципиальной необходимости изменения параметров самих аттракторов. Или, в общем случае, таким образом, чтобы изменение аттракторов поддавалось (в пределе) неограниченной минимизации.

К тому же, как правило, рассматриваются случаи перемежаемости только между двумя областями [11–15] (например, в цепи Чуа при кризисе симметричных хаотических аттракторов и образовании аттрактора «double scroll» или в неавтономном осцилляторе Дуффинга). Однако не менее интересен случай взаимодействия значительно большего количества областей притяжения с образованием некоторого более сложно устроенного мультиаттрактора. При этом наибольший интерес представляет поиск возможности построения мультиаттракторов, объединяющих множество хаотических аттракторов произвольного типа.

Поскольку движение на таком мультиаттракторе представляет собой совокупность движений на отдельных аттракторах и переходов между ними, данная задача имеет сходство с задачей стохастических переключений между устойчивыми состояниями, вызванными шумом [16]. Однако в данном случае переключения (переходы между отдельными аттракторами) индуцируются не шумом, а спецификой собственного движения динамической системы.

Поэтому такие мультиаттракторы могут быть весьма полезны при моделировании работы памяти, сложных движений живых существ (активные броуновские частицы), явлений тепло- и массопереноса (в частности, направленной миграции примесей под действием тепловых колебаний кристаллической решетки), динамики рыночной экономики, некоторых сложных климатических и погодных явлений, автоколебательных химических процессов и т. п.

Одним из подходов, позволяющих решить эту задачу, является построение составных хаотических мультиаттракторов с использованием редуцирующих операторов [17–21].

Составной (или композиционный) хаотический мультиаттрактор представляет собой предельное множество, состоящее из множества областей притяжения (локальных хаотических аттракторов), в каждой из которых фазовая траектория остается достаточно долго, совершая хаотические движения и, время от времени, переходя в одну из соседних областей [18]. Рассмотрим построение такого аттрактора путем замены в уравнениях движения независимых переменных специальными нелинейными функциями, каждая из которых состоит из последовательно расположенных линейных сегментов с единичным наклоном, разделенных разрывами первого рода (в простейшем случае) или соединенных дополнительными «промежуточными» сегментами, например, линейными сегментами с противоположным наклоном (рис. 1). В последнем случае такую функцию можно представить следующим уравнением [19]:

$$H(\xi) = \xi + (d+1) \left\{ P\left(\xi + s + h + \frac{h}{d}\right) + P\left(\xi + s - h - \frac{h}{d}\right) - \sum_{m=0}^M \left[P\left(\xi + s - (2m-1)\left(h + \frac{h}{d}\right)\right) + \frac{h}{d} \right] - \sum_{n=0}^N \left[P\left(\xi + s + (2n-1)\left(h + \frac{h}{d}\right)\right) - \frac{h}{d} \right] \right\}, \quad (1)$$

где $P(\xi) = \frac{1}{2} \left(\left| \xi + \frac{h}{d} \right| - \left| \xi - \frac{h}{d} \right| \right)$, d , h и s — вещественные коэффициенты, M , N — целые неотрицательные числа. Коэффициенты h и s задают, соответственно, протяженность и асимметрию сегментов с единичным наклоном (протяженность этих сегментов по аргументу равна $2h$, смещение середины сегмента относительно точки пересечения с осью $O\xi$ равно s), коэффициент d задает наклон «соединительных сегментов», протяженность которых по ξ равна $2h/d$.

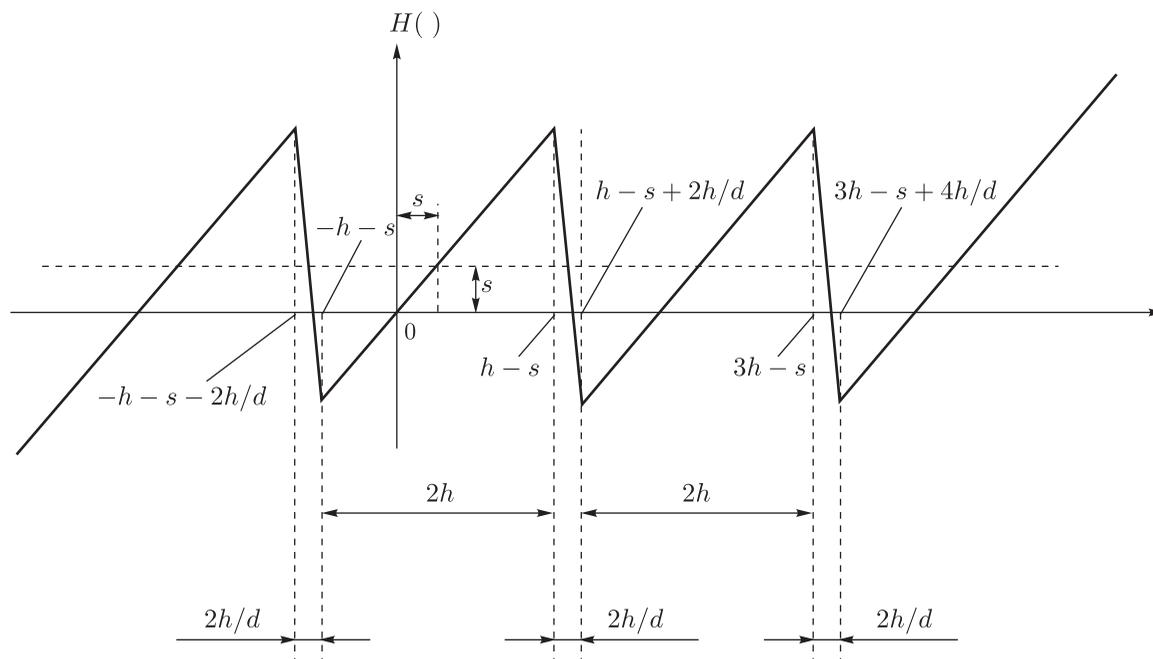


Рис. 1. «Редуплицирующая» функция, в которой сегменты с единичным наклоном соединены более крутыми линейными сегментами.

Рассмотрим построение составного хаотического мультиаттрактора на примере преобразования динамической системы Лоренца к виду, соответствующему хаотическому мультиаттрактору, объединяющему несколько аттракторов Лоренца. Используем уравнения Лоренца, записанные в той форме, как они даны в оригинальной работе [22]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = x(B - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - Cz, \end{cases} \quad (2)$$

приняв $A = 10$, $B = 30$, $C = 2.6$.

Вначале рассмотрим поведение системы (2) при замене только одной переменной — x — кусочно-линейной функцией $H_1(x)$ с параметрами M_1, N_1, h_1, d_1, s_1 . В этом случае данные уравнения примут вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(y - H_1(x)), \\ \frac{dy}{dt} = H_1(x)(B - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = H_1(x)y - Cz. \end{cases} \quad (3)$$

Функция $H_1(x)$ разбивает фазовое пространство системы (3) на слои, параллельные плоскости $x = 0$. Сегментам функции $H_1(x)$ с единичным наклоном соответствуют слои толщиной $2h_1$, сегментам с наклоном $-d_1$ — слои толщиной $2h_1/d_1$. Границами каждого k -го слоя с единичным наклоном являются плоскости $x = (2k - 1)h_1 - s_1 + 2k\frac{h_1}{d_1}$ и $x = (2k + 1)h_1 -$

$-s_1 + 2k \frac{h_1}{d_1}$, где $k = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M$; границами каждого k -го слоя толщиной $2h_1/d_1$ — плоскости $x = (2k + 1)h_1 - s_1 + 2k \frac{h_1}{d_1}$ и $x = (2k + 1)h_1 - s_1 + 2(k + 1) \frac{h_1}{d_1}$.

Внутри каждого слоя, соответствующего сегменту функции $H_1(x)$ с единичным наклоном, воспроизводится фрагмент фазового пространства, идентичный фазовому пространству исходной системы (2). Действительно, пока значение переменной x лежит в интервале $[-h_1 - s_1; h_1 - s_1]$, то есть находится в пределах центрального, проходящего через начало координат, сегмента функции $H_1(x)$, уравнения (3) ничем не отличаются от уравнений (2), так как в этом случае $H_1(x) = x$. Если значение x находится в пределах любого другого сегмента с единичным наклоном, то уравнения (3) имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(y - x - x_k), \\ \frac{dy}{dt} = (x - x_k)(B - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = (x - x_k)y - Cz, \end{cases} \quad (4)$$

где $x_k = 2kh_1 \left(1 + \frac{1}{d_1}\right)$, так как в этом случае $H_1(x) = x - x_k$ вследствие того, что k -й линейный сегмент с единичным наклоном смещен относительно центрального сегмента по оси x на интервал $2kh_1 \left(1 + \frac{1}{d_1}\right)$. Если сделать замену переменных $x_1 = x - x_k$ и учесть, что $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A(y - x_1); \\ \frac{dy}{dt} = x_1(B - z) - y; \\ \frac{dz}{dt} = x_1y - Cz, \end{cases} \quad (5)$$

которая ничем не отличается от уравнений (2). Поэтому при движении на k -м сегменте с единичным наклоном воспроизводится исходный хаотический аттрактор, смещенный относительно аттрактора системы (2) на интервал $2kh_1 \left(1 + \frac{1}{d_1}\right)$ по оси x .

Чтобы аттрактор исходной системы и его копии могли целиком «поместиться» внутри «своих» слоев фазового пространства, значения коэффициентов h_1 и s_1 должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$h_1 > \frac{XA_2 - XA_1}{2}, \quad s_1 = \frac{XA_1 + XA_2}{2}, \quad (6)$$

где XA_1 и XA_2 — координаты наиболее удаленных друг от друга точек аттрактора по оси x , причем $XA_2 > XA_1$. Таким образом, коэффициент h_1 должен быть больше половины наибольшей протяженности аттрактора по координате x , а коэффициент s_1 — учитывать асимметрию исходного аттрактора относительно центра координат по координате x .

Функция (1) содержит $1 + M + N$ линейных сегментов с единичным наклоном. Следовательно, замена в уравнениях движения независимой переменной на функцию (1) этой

переменной приводит (если выполнены условия (6)) к образованию дополнительно $M + N$ аттракторов, являющихся копиями исходного аттрактора (к «редупликации» исходного хаотического аттрактора).

Механизм образования единого мультиаттрактора, состоящего из исходного хаотического аттрактора и его копий, заключается в следующем. Пусть в уравнениях (3) функция $H_1(x)$ содержит только два линейных сегмента (допустим, при $M_1 = 1, N_1 = 0$), причем выполнены условия (6). Тогда она делит фазовое пространство на три области. Первая соответствует центральному сегменту функции $H_1(x)$ с единичным наклоном и содержит исходный хаотический аттрактор A_0 . Вторая область соответствует второму сегменту с единичным наклоном и содержит хаотический аттрактор A_1 , представляющий собой копию аттрактора A_0 . Между ними расположен слой фазового пространства, отвечающий сегменту с наклоном $-d$.

Зададим вначале такое положение границы первой области (положение плоскости $x = h_1 - s_1$), чтобы она не пересекала находящийся в ней аттрактор A_0 , и выберем начальные значения переменных x, y и z в области притяжения этого аттрактора. В этом случае в системе (3) движение устойчиво происходит на аттракторе A_0 . (Если начальные значения переменных поместить в область притяжения аттрактора A_1 , расположенного во второй области фазового пространства, движение будет происходить на нем.) Теперь передвинем границу первой области фазового пространства (изменив коэффициент h_1) так, чтобы она оказалась в контакте с периферийной частью аттрактора A_0 , то есть возникло некоторое малое ненулевое пересечение исходного аттрактора с этой границей. Для этого нужно положить

$$h_1 = h_{10} - \Delta_1,$$

где $h_{10} = \frac{XA_2 - XA_1}{2}$, $\Delta_1 \ll h_{10}$.

Решение уравнений (3) показывает, что в таком случае фазовая траектория однажды пересечет эту границу и покинет хаотический аттрактор A_0 . После этого траектория, миновав слой, соответствующий сегменту с наклоном $-d$, перейдет в область фазового пространства, содержащую аттрактор A_1 , где, оказавшись в области притяжения этого аттрактора, выйдет на него и движение продолжится на копии исходного аттрактора. Так как в рассматриваемом случае аттрактор A_1 также имеет пересечение с границей содержащей его области фазового пространства (с плоскостью $x = h_1 - s_1 + \frac{2h_1}{d_1}$), фазовая траектория со временем вновь перейдет в первую область, движение возвратится на исходный хаотический аттрактор и т. д. В результате образуется составной мультиаттрактор, объединяющий два одинаковых хаотических аттрактора (рис. 2а).

Образование мультиаттрактора происходит в результате перехода аттракторов A_0 и A_1 в метастабильное состояние при пересечении ими границ своих ячеек фазового пространства, то есть наблюдается ситуация, аналогичная приведенной в [23], где описан переход хаотического аттрактора в метастабильное состояние в результате касания границы своей области притяжения. Отличие заключается в том, что в рассматриваемом случае эта граница является также границей области существования аттрактора; кроме того, здесь нет необходимости изменять параметры аттракторов — их пересечение с границами своих областей притяжения достигается путем независимого перемещения самих границ.

Точно так же образуется композиционный хаотический мультиаттрактор при большем числе сегментов в составе функции $H_1(x)$ (рис. 2б). Приведенный на рисунке аттрактор соответствует значениям параметров $M_1 = 2, N_1 = 2, h_1 = 18, d_1 = 10, s_1 = 0$.

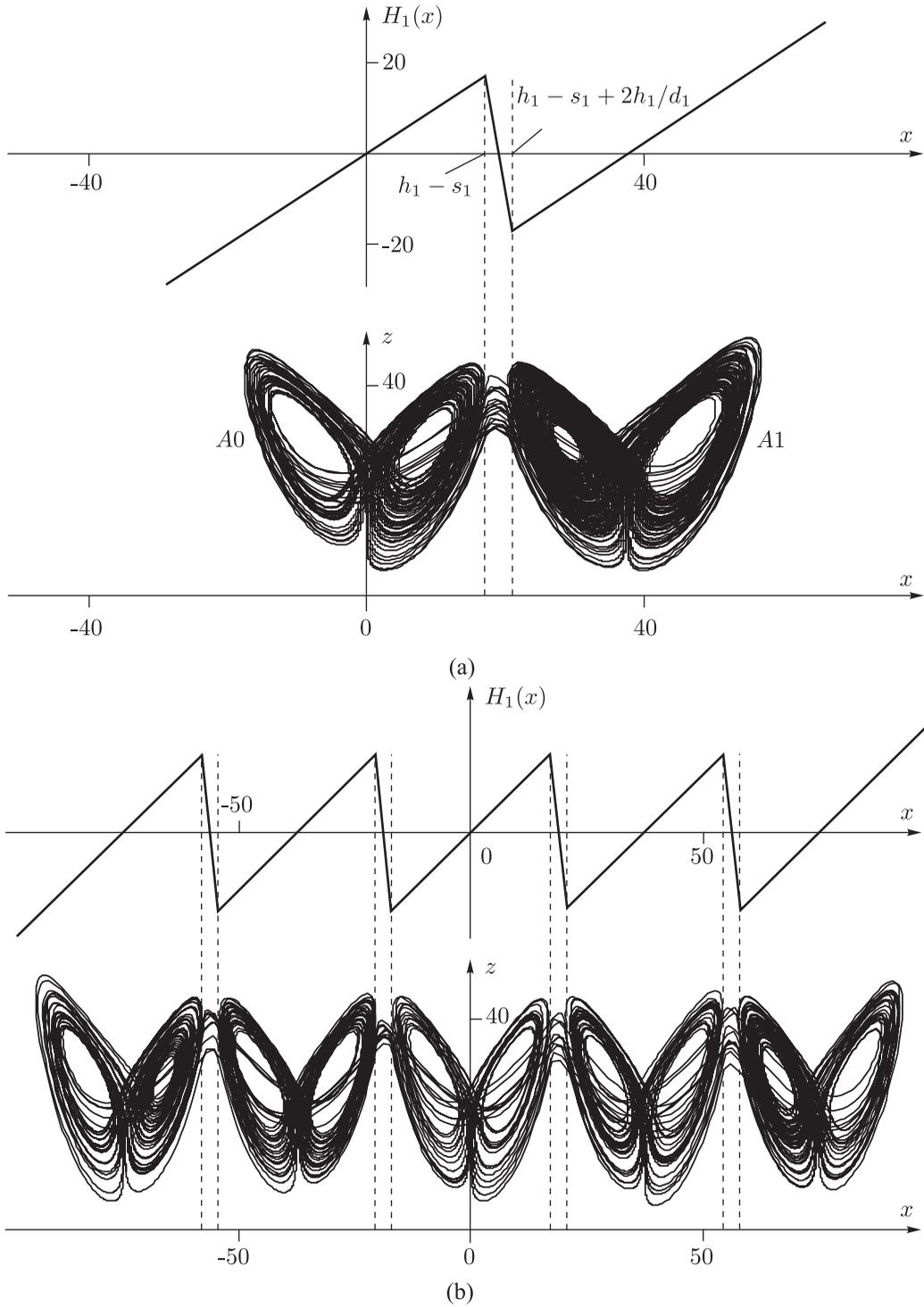


Рис. 2. (а) Образование композиционного хаотического мультиаттрактора из аттрактора Лоренца и его копии. (б) Мультиаттрактор, состоящий из исходного аттрактора Лоренца (в середине) и четырех его копий, полученных применением «редуплицирующего» оператора $H_1(x)$ с параметрами $M_1 = 2, N_1 = 2, h_1 = 18, d_1 = 10, s_1 = 0$.

Аналогично происходит образование составных мультиаттракторов, содержащих копии исходного аттрактора, упорядоченные вдоль оси Oz (рис. 3а): в уравнениях (2) необходимо заменить переменную z функцией $H_3(z)$ с параметрами M_3, N_3, h_3, d_3, s_3 , которая разбивает фазовое пространство системы (3) на чередующиеся слои толщиной $2h_3$ и $2h_3/d_3$, ортогональные координатной оси Oz . При этом значения коэффициентов h_3 и s_3 выражаются как

$$h_3 = h_{30} - \Delta_3; \quad s_3 = \frac{ZA1 + ZA2}{2},$$

где $ZA1$ и $ZA2$ — координаты наиболее удаленных друг от друга точек аттрактора по координате z , $ZA2 > ZA1$, $h_{30} = \frac{ZA2 - ZA1}{2}$, $\Delta_3 \ll h_{30}$. Мультиаттрактор, приведенный на рисунке 3а, соответствует параметрам $M_3 = 2, N_3 = 2, h_3 = 18, d_3 = 10, s_3 = 27.2$.

Особенностью этого мультиаттрактора является то, что, вследствие асимметрии аттрактора Лоренца по оси z , частота переходов фазовых траекторий между соседними областями притяжения зависит от направления перехода. В отрицательном направлении по z она приблизительно на порядок выше, чем в обратном. Поэтому «обход» фазовыми траекториями локальных аттракторов здесь носит преимущественно «конвейерный» характер — от самого «верхнего» (по оси z) аттрактора последовательно вплоть до самого «нижнего», далее сразу на «верхний» и все повторяется.

Если в уравнениях (2) заменить функциями $H_1(x)$ и $H_3(z)$ сразу две переменные x и z ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A[y - H_1(x)], \\ \frac{dy}{dt} = H_1(x)[B - H_3(z)] - y, \\ \frac{dz}{dt} = H_1(x)y - CH_3(z), \end{cases} \quad (7)$$

образуется «двумерный» хаотический мультиаттрактор (рис. 3б), состоящий из аттракторов Лоренца, центры локальных систем координат которых лежат в плоскости (x, z) .

Добавление в уравнения (6) третьей «редуплицирующей» функции, очевидно, должно дать «трехмерный» мультиаттрактор, в котором локальные аттракторы имеют пространственное распределение. Однако при замене переменной y функцией $H_2(y)$ получить составной мультиаттрактор не удается. Попад в «промежуточный» слой, соответствующий сегменту с наклоном $-d_2$, фазовые траектории, вместо того, чтобы перейти в соседнюю ячейку фазового пространства, соответствующую сегменту функции $H_2(y)$ с единичным наклоном, при выбранных параметрах уравнений (2) выходят на нехаотический аттрактор, расположенный внутри «промежуточного» слоя (рис. 4а).

Чтобы избавиться от этого «паразитного» аттрактора, не меняя параметры исходной динамической системы, необходимо изменить «редуплицирующую» функцию. Это, в принципе, можно сделать двумя способами: изменить параметры «промежуточных» сегментов в составе этой функции (например, их крутизну или нелинейность) или поменять ее аргумент. В нашем случае первый способ не дает результата. Остается изменить аргумент, то есть вместо переменной y следует взять некоторую новую переменную $w = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z$, где μ_1, μ_2, μ_3 — вещественные константы. Функция $H_2(w) = H_2(\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z)$ (с параметрами M_2, N_2, h_2, d_2, s_2) также разбивает фазовое пространство на чередующиеся слои толщиной $2h_2$ и $2h_2/d_2$, но ортогональные не одной из осей координат, а лучу Ow (т. е. функция $H_2(w)$ задает иную, по сравнению с функцией $H_2(y)$, ориентацию границ слоев фазового пространства по отношению к заключенным в них аттракторам).

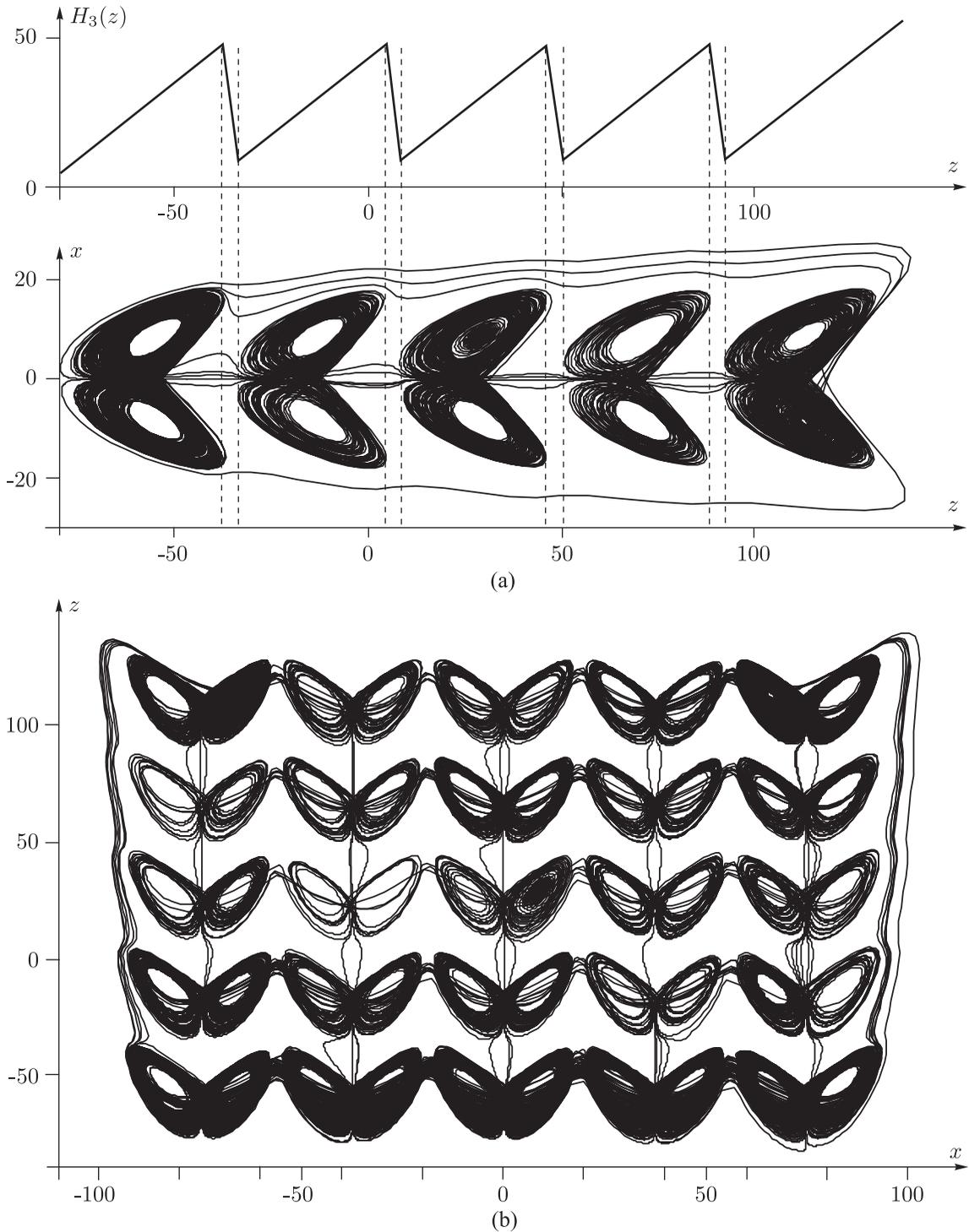


Рис. 3. (а) Композиционный мультиаттрактор, состоящий из исходного аттрактора Лоренца (в середине) и четырех его копий, полученных применением «редуплицирующего» оператора $H_3(z)$ с параметрами $M_3 = 2$, $N_3 = 2$, $h_3 = 18$, $d_3 = 10$, $s_3 = 27.2$. (б) «Двумерный» мультиаттрактор, состоящий из исходного аттрактора Лоренца (в центре) и 14 его копий, полученных одновременным применением двух «редуплицирующих» операторов $H_1(x)$ и $H_3(z)$ с параметрами $M_1 = 2$, $N_1 = 2$, $h_1 = 18$, $d_1 = 10$, $s_1 = 0$, $M_3 = 2$, $N_3 = 2$, $h_3 = 18$, $d_3 = 10$, $s_3 = 27$.

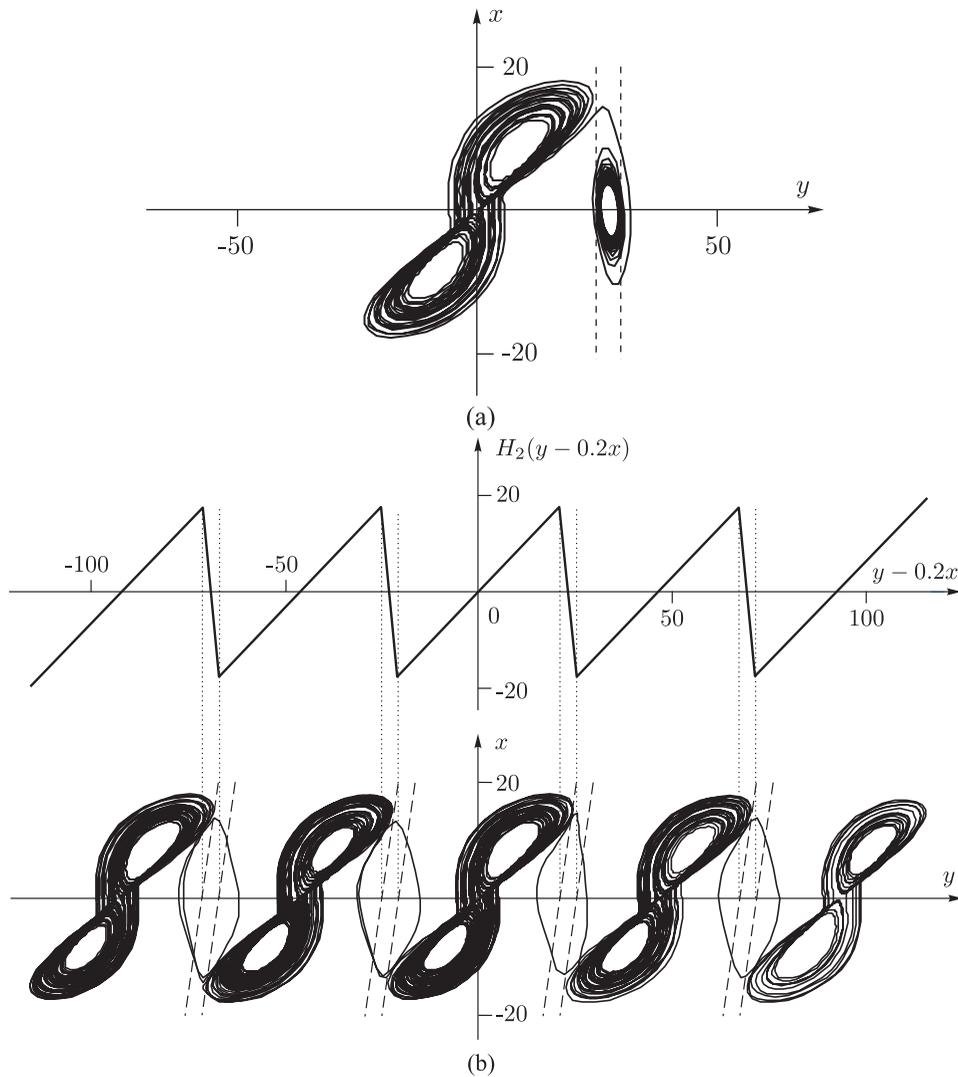


Рис. 4. (а) Срыв «редупликации» хаотического аттрактора вследствие выхода фазовой траектории на аттрактор, расположенный внутри «промежуточного» слоя фазового пространства. (б) Композиционный мультиаттрактор, состоящий из исходного аттрактора Лоренца (в середине) и четырех его копий, полученных применением «редуплицирующего» оператора $H_2(w)$, где $w = y - 0.2x$, с параметрами $M_2 = 2$, $N_2 = 2$, $h_2 = 21$, $d_2 = 10$, $s_2 = 0$.

Для того чтобы ввести функцию $H_2(w)$ в уравнения (2), необходимо выразить переменную y через x, z и w ($y = \frac{w - \mu_1 x - \mu_3 z}{\mu_2}$), подставить результат в систему (2) и заменить переменную w функцией $H_2(w) = H_2(\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A \left[\frac{H_2(\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z) - \mu_1 x - \mu_3 z}{\mu_2} - x \right], \\ \frac{dy}{dt} = x(B - z) - \frac{H_2(\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z) - \mu_1 x - \mu_3 z}{\mu_2}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{H_2(\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z) - \mu_1 x - \mu_3 z}{\mu_2} x - Cz. \end{cases} \quad (8)$$

Значения коэффициентов h_2 и s_2 в данном случае

$$h_2 = h_{20} - \Delta_2, \quad s_2 = \frac{WA1 + WA2}{2},$$

где $WA1$ и $WA2$ — координаты наиболее удаленных друг от друга точек аттрактора по координате w , $WA2 > WA1$, $h_{20} = \frac{WA2 - WA1}{2}$, $\Delta_2 \ll h_{20}$.

На рисунке 4б показан образующийся при этом мультиаттрактор, который соответствует $M_2 = 2$, $N_2 = 2$, $h_2 = 21$, $d_2 = 10$, $s_2 = 0$, $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$.

Наконец, заменив в уравнениях (8) переменные x и z (кроме входящих под знаком функции $H_2(w)$) соответствующими «редуплицирующими» операторами, получим динамическую систему, реализующую «трехмерный» композиционный мультиаттрактор Лоренца, состоящий из исходного аттрактора и $(M_1 + N_1)(M_2 + N_2)(M_3 + N_3)$ его копий (рис. 5):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A[E(x, y, z) - H_1(x)], \\ \frac{dy}{dt} = H_1(x)[B - H_3(z)] - E(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = E(x, y, z)H_1(x) - CH_3(z), \end{cases} \quad (9)$$

где $E(x, y, z) = \frac{H_2(\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z) - \mu_1 H_1(x) - \mu_3 H_3(z)}{\mu_2}$.

Границы ячеек фазового пространства, содержащих локальные аттракторы системы (9), параллельны плоскостям $x = 0$, $w = 0$, $z = 0$.

Рассмотренный пример демонстрирует все основные элементы данного способа построения композиционных хаотических мультиаттракторов, который в общем виде состоит в том, чтобы:

1. Определить направления, вдоль которых возможна «редупликация» исходного хаотического аттрактора (направления копирования). Решение данной задачи дает новую систему координат, оси которой коллинеарны этим направлениям.
2. Заменить исходные переменные в правой части уравнений на новые, соответствующие новой системе координат.
3. Заменить новые переменные «редуплицирующими» операторами.
4. Заменить новые переменные под знаком «редуплицирующих» операторов исходными переменными.

Таким образом, если дана автостохастическая система n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \alpha x + f(x), \quad (10)$$

где $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$, $\dot{x}_j = \frac{dx_j}{dt}$, с постоянными коэффициентами $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$,

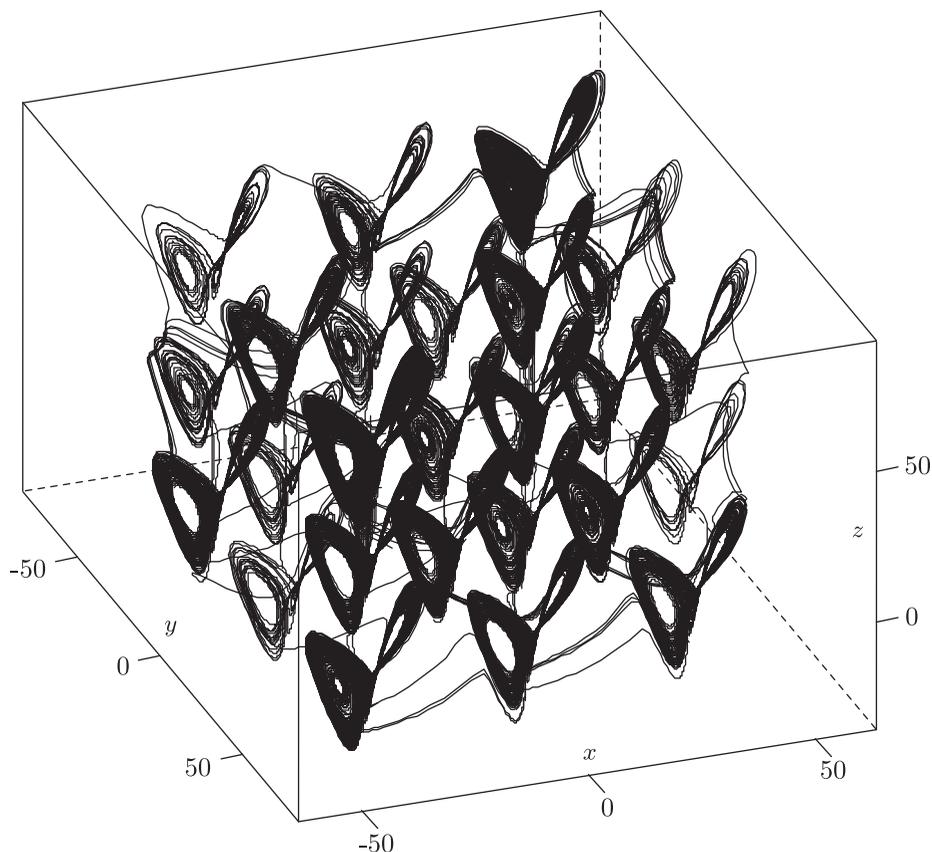


Рис. 5. Композиционный хаотический аттрактор, состоящий из исходного аттрактора Лоренца и 26 его копий, упорядоченных по направлениям Ox , Oz и Ow , где $w = y - 0.2x$; $M_1 = 1$, $N_1 = 1$, $h_1 = 18$, $d_1 = 10$, $s_1 = 0$, $M_2 = 1$, $N_2 = 1$, $h_2 = 21$, $d_2 = 10$, $s_2 = 0$, $M_3 = 1$, $N_3 = 1$, $h_3 = 18$, $d_3 = 10$, $s_3 = 27$.

и нелинейными членами $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$, для которой найдены новые переменные

$$w = \mu x, \quad (11)$$

где $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$, $\mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix}$, соответствующие выбранным направлениям ко-

пирования, то для построения составного мультиаттрактора необходимо:

1. Выразить исходные переменные x через новые переменные (11) $x = \mu^{-1}w$ (где μ^{-1} — матрица, обратная матрице μ) и сделать замену переменных в уравнениях (10), которые

в результате примут вид

$$\dot{x} = \alpha\mu^{-1}w + f(\mu^{-1}w). \quad (12)$$

2. Заменить в системе (12) новые переменные «редуплицирующими» операторами (1):

$$\dot{x} = \alpha\mu^{-1}H(w) + f(\mu^{-1}H(w)), \quad (13)$$

где $H(w) = \begin{bmatrix} H_1(w_1) \\ H_2(w_2) \\ \dots \\ H_n(w_n) \end{bmatrix}$.

3. Выразить в уравнениях (13) новые переменные w через исходные:

$$\dot{x} = \alpha\mu^{-1}H(\mu x) + f(\mu^{-1}H(\mu x)). \quad (14)$$

Далее необходимо найти значения констант h, s, d , определив наибольшую протяженность и асимметрию аттрактора исходной динамической системы по направлениям копирования, а также оптимальную ширину «промежуточных» слоев фазового пространства.

Движение, определяемое полученной системой уравнений, будет происходить на мультиаттракторе, состоящем из $1 + (M_1 + N_1)(M_2 + N_2) \dots (M_n + N_n)$ локальных хаотических аттракторов, идентичных аттрактору исходной системы уравнений.

Другие примеры составных хаотических мультиаттракторов, полученных с применением описанного метода, приведены в [18–21].

Рассмотренный способ формирования мультиаттракторов не требует (хотя и не исключает) непосредственного взаимодействия локальных областей притяжения фазовых траекторий. Для образования мультиаттрактора достаточно перевода локальных хаотических аттракторов в метастабильное состояние за счет организации пересечения этих аттракторов с границами областей их притяжения. При этом локальные аттракторы непосредственно не взаимодействуют с своими соседями — только с границами (в общем случае, с пограничными областями [21]) своих фазовых ячеек. Цельность мультиаттрактора в таком случае связана с тем, что фазовая траектория, покинув данный локальный аттрактор, имеет возможность вернуться обратно, посетив некоторое множество соседних локальных областей притяжения. Благодаря такому механизму образования мультиаттрактора достигается исковое качество — независимость параметров локальных аттракторов от режима их взаимодействия между собой. (При замене кусочно-линейных редуплицирующих операторов их сглаженными версиями [21], разумеется, можно говорить только о наличии возможности неограниченной минимизации данной зависимости.) Поэтому данный подход позволяет конструировать составные мультиаттракторы, состоящие из множества локальных областей притяжения, на основе хаотических аттракторов самых разных динамических систем.

Следует добавить, что здесь был рассмотрен простейший, базовый, вариант обсуждаемого способа, позволяющий реализовать мультиаттракторы, имеющие однородную структуру. В более общем случае, при введении индивидуальных различий между локальными аттракторами и различий в поведении траекторий во время переходов между разными аттракторами, данный подход позволяет строить составные мультиаттракторы, имеющие существенно неоднородную структуру [18].

В заключение необходимо подчеркнуть, что существование подобных динамических объектов обусловлено хаотическим характером движения на локальных аттракторах. Очевидно, что на основе регулярных аттракторов (в отсутствие внешнего воздействия или шума) получить такие структуры нельзя. Таким образом, здесь наблюдается ярко выраженное конструктивное действие хаотической динамики, позволяющее создавать устойчивые упорядоченные динамические структуры с чрезвычайно сложным и многообразным внутренним поведением.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., Айфромович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Динамические системы — 5 / В. И. Арнольд. (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 5.) М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
- [2] Малинецкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 1984. 320 с.
- [3] Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Comm. Math. Phys., 1980, vol. 74, pp. 189–197.
- [4] Kim C.-M., Yim G.-S., Kim Y. S., Kim J.-M., Lee H. W. Experimental evidence of characteristic relations of type-I intermittency in an electronic circuit // Phys. Rev. E, 1997, vol. 56, no. 3, pp. 2573–2577.
- [5] Baptista M. S., Caldas I. L. Type-II intermittency in the driven double scroll circuit // Phys. D, 1999, vol. 132, pp. 325–338.
- [6] Ringuet E., Rozé C., Gouesbet G. Experimental observation of type-II intermittency in a hydrodynamic system // Phys. Rev. E, 1993, vol. 47, no. 2, pp. 1405–1407.
- [7] Кye W.-H., Rim S., Kim C.-M., Lee J.-H., Ryu J.-W., Yeom B.-S., Park Y.-J. Experimental observation of characteristic relations of type-III intermittency in the presence of noise in a simple electronic circuit // Phys. Rev. E, 2003, vol. 68, 036203, 5 pp.
- [8] Laugesen J., Mosekilde E., Bountis E., Kuznetsov S. P. Type-II intermittency in a class of two coupled one-dimensional maps // Discrete Dyn. Nat. Soc., 2000, vol. 5, pp. 233–245.
- [9] de S. Cavalcante H. L. D., Rios Leite J. R. Averages and critical exponents in type-III intermittent chaos // Phys. Rev. E, 2002, vol. 66, 026210, 5 pp.
- [10] Анищенко В. С., Нейман А. Б. Увеличение длительности корреляций при перемежаемости типа «хаос–хаос» // Письма в ЖТФ, 1987, т. 13, № 17, с. 1063–1066.
- [11] Анищенко В. С. Взаимодействие странных аттракторов. Перемежаемость «хаос–хаос» // Письма в ЖТФ, 1984, т. 10, № 10, с. 629–633.
- [12] Афраймович В. С., Рабинович М. И., Угодников А. Д. Критические точки и «фазовые переходы» в стохастическом поведении неавтономного ангармонического осциллятора // Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 38, № 2, с. 64–67.
- [13] Дмитриев А. С., Кислов В. Я., Старков С. О. Экспериментальное исследование образования и взаимодействия странных аттракторов в кольцевом автогенераторе // ЖТФ, 1985, т. 55, № 12, с. 2417–2419.
- [14] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, Физматлит, 1990. 312 с.
- [15] Хованов И. А., Анищенко В. С. Воздействие периодического сигнала на среднюю частоту переключений хаотической бистабильной системы // Радиотехника и электроника, 1997, т. 42, № 7, с. 823–827.
- [16] Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН, 1999, т. 169, с. 7–38.
- [17] Прокопенко В. Г. Динамический аналог схемы Чуа с многосегментной нелинейностью // Докл. РАН, 2004, т. 396, № 3, с. 317–323.

- [18] Прокопенко В. Г. Статистические характеристики хаотических колебаний в автостохастических системах с многосегментной нелинейностью // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2010, № 4, с. 106–119.
- [19] Прокопенко В. Г. Генератор хаотических колебаний: Патент РФ на изобретение № 2403672 от 10.11.2010, бюл. 31.
- [20] Прокопенко В. Г. Генератор хаотических колебаний: Патент РФ на изобретение № 2421877 от 20.06.2011, бюл. 17.
- [21] Прокопенко В. Г. Хаотические автоколебания в автостохастических системах с гладкой многосегментной нелинейностью // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2012, № 1, с. 93–105.
- [22] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Sci., 1963, vol. 20, pp. 130–141.
- [23] Постнов Д. Э., Баланов А. Г., Черняков В. И. Синхронизация и хаос в моделях динамики популяций // Изв. вузов. ПНД, 1997, т. 5, № 1, с. 54–68.

Reduplication of chaotic attractors and construction of compound multiattractors

Vadim G. Prokopenko

Southern Federal University

B. Sadovaia st. 105, Rostov-on-Don, 344006, Russia

vadipro@yandex.ru

This paper is concerned with a method for forming compound (composite) chaotic multiattractors using the Lorentz equations as an example. These multiattractors are a union of several local attractors which are copies of some initial chaotic attractor.

MSC 2010: 34F05, 60G05, 60G20, 60G35, 93E35

Keywords: nonlinear dynamic system, autostochastic system, chaotic attractor, Lorentz attractor, compound multiattractor, metastable attractor, multisegment nonlinearity, intermittency, chaotic switchings, reduplication operator

Received January 16, 2011, accepted March 14, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 483–496 (Russian)