



УДК: 531.36:521.1

MSC 2010: 70K20, 70K42

Точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами

В. В. Белецкий, А. В. Родников

Изучаются существование и эволюция стационарных движений материальной точки в окрестности прецессирующего динамически симметричного твердого тела, гравитационное поле которого моделируется как поле тяготения двух материальных точек равных действительных масс, находящихся на мнимом расстоянии. Уравнения движения такой материальной точки являются вариантом уравнений движения Обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел. Устанавливается, что количество компланарных точек либрации (КТЛ), то есть положений относительного равновесия материальной точки в плоскости, образуемой осями прецессии и динамической симметрии твердого тела, всегда нечетно и может быть равно 5, 7 или 9. Исследуется эволюция КТЛ при изменении параметров задачи. Кроме того, устанавливается существование двух треугольных точек либрации (ТТЛ), то есть равновесий материальной точки на оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно осям прецессии и динамической симметрии.

Ключевые слова: задача трех тел, точки либрации, стационарные движения, астероид, регулярная прецессия

Получено 22 августа 2012 года

После доработки 18 октября 2012 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00406а).

Белецкий Владимир Васильевич

beletsky@keldysh.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4

Родников Александр Владимирович

springer@inbox.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

105005, Россия, г. Москва, 2-ая Бауманская, д. 5



1. Введение

В [8] была предложена Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел (ООКЗЗТ), которую можно рассматривать как модель описания динамики космического аппарата (КА) в окрестности динамически симметричного астероида. В ООКЗЗТ рассматривается движение материальной точки в окрестности твердого тела, чье движение вокруг центра масс является регулярной прецессией и чей гравитационный потенциал есть гравитационный потенциал двух материальных точек, лежащих на оси динамической симметрии. Однако последнее предположение удобно, если астероид является гантелевидным или, по крайней мере, вытянутым вдоль оси динамической симметрии. Если же астероид сжат вдоль этой оси, то, оставаясь в рамках основных предположений ООКЗЗТ, можно, следуя идеям из [1, 3], считать, что гравитационный потенциал астероида аппроксимируется гравитационным потенциалом двух материальных точек, находящихся на мнимом расстоянии.

В [11] устанавливается, что если гравитационный потенциал астероида инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, материальная точка может быть неподвижной в системе отсчета, вращающейся вместе с осью динамической симметрии астероида вокруг оси прецессии только в плоскости, проходящей через центр масс астероида перпендикулярно оси прецессии, или в плоскости, образованной осями прецессии и динамической симметрии. Равновесия первого типа, которые можно назвать треугольными точками либрации (ТТЛ), являются аналогами лагранжевых точек либрации классической ограниченной круговой задачи трех тел (ОКЗЗТ) (см. [2, 4]). Существование и устойчивость ТТЛ для гантелевидного астероида исследована в [8, 9]. Равновесия второго типа, называемые компланарными точками либрации (КТЛ), являются аналогами эйлеровых точек либрации ОКЗЗТ (также см. [2, 4]). Существование и устойчивость КТЛ для гантелевидного астероида исследуется в [10, 12]. Отметим, что материальная точка, помещенная в точку либрации, в рассматриваемом случае подвижна как в инерциальной системе отсчета, так и относительно почти всех точек поверхности астероида, то есть совершает некоторое стационарное движение. (О точках либрации гравитирующих тел см. также [5–7].)

В настоящей работе рассматривается случай, когда гравитационный потенциал астероида может быть представлен суммой гравитационных потенциалов двух материальных точек с равными действительными массами, «лежащих» на оси динамической симметрии и имеющих на этой оси сопряженные чисто мнимые координаты. (Очевидно, сумма таких потенциалов является действительной.) Устанавливается, что для любых значений параметров рассматриваемой системы существует ровно две ТТЛ, отличных от КТЛ, лежащих на оси, перпендикулярной осям динамической симметрии и прецессии. Показывается, что в большинстве случаев множество КТЛ состоит из 5 элементов, из которых можно выделить 2 «внешние», 2 «внутренние» и одну «центральную» КТЛ, совпадающую с центром масс астероида (о разделении КТЛ на «внешние» и «внутренние» см. [12]), однако, существуют такие значения угловой скорости прецессии и угла нутации, когда количество «внутренних» КТЛ становится равным шести (а общее количество КТЛ, соответственно, девяти), а также редкие ситуации, когда количество «внутренних» КТЛ равно четырем (а общее количество КТЛ — семи). Для описания эволюции КТЛ при изменении параметров системы строятся кривые, вдоль которых перемещаются КТЛ при изменении угловой скорости прецессии.

2. Уравнения для вычисления координат точек либрации

Рассмотрим движение материальной точки S , моделирующей КА, с массой m_0 в окрестности твердого тела массы m , моделирующего астероид, с центром масс O и с осью дина-

мической симметрии Oz_1 , совершающего регулярную прецессию вокруг оси Oz . Направим ось Ox перпендикулярно Oz так, чтобы оси Oz_1 , Oz и Ox лежали в одной плоскости и угол между осями Ox и Oz_1 не был тупым. Обозначим через ϑ угол между положительными направлениями осей Oz и Oz_1 (см. рис. 1). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Выберем ось Oy так, чтобы декартова система координат $Oxyz$ была правой. Обозначим через ω угловую скорость прецессии, с которой $Oxyz$ вращается вокруг Oz .

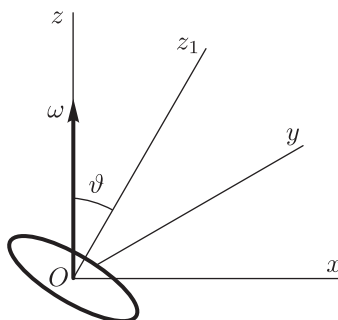


Рис. 1.

Как и в [8], будем считать, что гравитационное поле твердого тела есть композиция гравитационных полей двух материальных точек O_1 и O_2 . Ограничимся случаем, когда масса каждой из этих точек равна половине массы твердого тела. Если твердое тело сжато вдоль оси динамической симметрии, в соответствии с аппроксимациями, описанными в [3], будем считать, что расстояние между O_1 и O_2 мнимое. Считая также, что притягивающие центры O_1 и O_2 должны «принадлежать» оси динамической симметрии, положим в системе координат $Oxyz$: $O_1(i\mathbf{l}(\sin \vartheta)/2, 0, i\mathbf{l}(\cos \vartheta)/2)$ и $O_2(-i\mathbf{l}(\sin \vartheta)/2, 0, -i\mathbf{l}(\cos \vartheta)/2)$, где l — некоторое действительное расстояние, а \mathbf{i} — мнимая единица.

При описании равновесий материальной точки S будем использовать безразмерные координаты ξ , η , ζ , определяемые формулами $x = l\xi$, $y = l\eta$, $z = l\zeta$. В этих переменных кинетическая энергия точки S с точностью до постоянного множителя может быть записана в виде $T = T_2 + T_1 + T_0$, где T_2 — квадратичная форма обобщенных скоростей $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, T_1 — линейная форма этих же скоростей, а $T_0 = (\xi^2 + \eta^2)/2$. Тогда интеграл Якоби рассматриваемой задачи может быть записан в виде

$$T_2 - T_0 + \tilde{\Pi} = h_0, \quad (2.1)$$

где h_0 — константа, а $\tilde{\Pi}$ — безразмерный гравитационный потенциал твердого тела, который можно записать в виде

$$\tilde{\Pi} = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{a + \mathbf{i}b} + \frac{1}{a - \mathbf{i}b} \right) = -\alpha \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad (2.2)$$

где $a \pm \mathbf{i}b$ — безразмерные «расстояния» между S и точками O_1 и O_2 , которые выбираются сопряженными, чтобы обеспечить действительность $\tilde{\Pi}$, а безразмерный параметр α определяется равенством $\alpha = Gm/(\omega^2 l^3)$, в котором G — гауссова константа тяготения. Заметим, что $\alpha > 0$. Примем $a > 0$, так как потенциал (2.2) определяет силы притяжения, а не отталкивания. Величины a и b связаны с ξ , η , ζ формулами

$$a^2 - b^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1/4, \quad 2ab = \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta. \quad (2.3)$$

Из (2.1)) следует, что уравнения для определения положений равновесия точки S во вращающейся системе отсчета $Oxyz$ имеют вид

$$-\xi + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \xi} = 0, \quad -\eta + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.4)$$

Дифференцируя (2.3) по ξ , η , ζ , получим соотношение

$$\begin{pmatrix} \partial a / \partial \xi & \partial a / \partial \eta & \partial a / \partial \zeta \\ \partial b / \partial \xi & \partial b / \partial \eta & \partial b / \partial \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ (\sin \vartheta) / 2 & 0 & (\cos \vartheta) / 2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

с учетом которого (2.4) можно переписать в виде

$$\alpha \left(a(a^2 - 3b^2)\xi + \frac{1}{2}b(3a^2 - b^2) \sin \vartheta \right) - \xi(a^2 + b^2)^3 = 0, \quad (2.6)$$

$$\eta (\alpha a(a^2 - 3b^2) - (a^2 + b^2)^3) = 0, \quad (2.7)$$

$$a(a^2 - 3b^2)\zeta + \frac{1}{2}b(3a^2 - b^2) \cos \vartheta = 0. \quad (2.8)$$

3. Треугольные точки либрации

Изучим сначала положения равновесия, для которых $\eta \neq 0$. В соответствии с [8] будем называть такие равновесия треугольными точками либрации (ТТЛ). Ограничимся общим случаем $0 < \vartheta < \pi/2$. Комбинируя (2.6), (2.7), (2.8), получим

$$a(a^2 - 3b^2)\zeta = 0. \quad (3.1)$$

Заметим, что если $a(a^2 - 3b^2) = 0$, то из (2.7) следует, что $a = b = 0$, что невозможно. Таким образом, $\zeta = 0$. Но тогда из (2.8) следует, что $b(3a^2 - b^2) = 0$. Однако если $b^2 = 3a^2$, то из (2.7) получаем $-8a^3\eta(\alpha + 8a^3) = 0$, что невозможно в силу сделанных предположений. Таким образом, $b = 0$, что означает, что, как и в [8], любая ТТЛ равноудалена от притягивающих центров. Очевидно, что второе из равенств (2.3) при $b = 0$ и $\zeta = 0$ возможно, только если $\xi = 0$. С учетом этого из (2.7) получим, что $\alpha = a^3$. Но тогда из первого из равенств (2.3) следует, что

$$\eta = \pm \sqrt{\alpha^{2/3} + 1/4}. \quad (3.2)$$

Таким образом, в изучаемом варианте ООКЗЗТ в общем случае существуют две и только две ТТЛ, которые лежат на оси Oy в точках с координатами, определяемыми равенством (3.2).

4. Компланарные точки либрации

Рассмотрим теперь положения равновесия, для которых $\eta = 0$. В соответствии с [12] будем называть такие равновесия компланарными точками либрации (КТЛ).



4.1. Предварительные замечания

Для описания множества КТЛ наряду с переменными ξ и ζ в общем случае $0 < \vartheta < \pi/2$ будем использовать также переменные $\kappa = 2\zeta/\cos\vartheta$ и $\chi = 2\xi/\sin\vartheta$, а также переменную γ ($\operatorname{tg}\gamma = \kappa$). Пусть $P(\kappa, \chi) = \tilde{\Pi} - T_0$ на плоскости $\eta = 0$. Заметим, что функция $P(\kappa, \chi)$ не является дифференцируемой в точках отрезка A_1A_2 , с концами в точках $A_1(-\operatorname{ctg}\vartheta, \operatorname{tg}\vartheta)$ и $A_2(\operatorname{ctg}\vartheta, -\operatorname{tg}\vartheta)$, являющимися существенно особыми точками этой функции. (В плоскости переменных ξ, ζ отрезок A_1A_2 перпендикулярен оси динамической симметрии Oz_1). Отметим, тем не менее, что центр масс O является точкой максимума для P , вследствие чего O является «центральной» КТЛ. Пример картины линий уровня функции P изображен на рисунке 2. На этом рисунке можно заметить 4 седловые точки (L_1, L_2, L_3, L_4), которые и являются искомыми КТЛ.

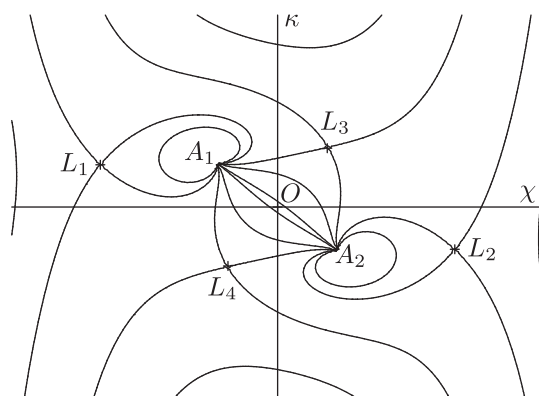


Рис. 2.

Заметим также, что в силу симметрии P относительно O справедливо следующее утверждение: *если точка с координатами $(\xi, 0, \zeta)$ является КТЛ, то и точка с координатами $(-\xi, 0, -\zeta)$ является КТЛ*. Нетрудно показать, что в силу (2.3), (2.6), (2.8) координата ζ может быть нулевой только одновременно с ξ . Таким образом, для определения координат КТЛ достаточно рассмотреть случай $\zeta > 0$ (в этом случае $\kappa > 0$ и $0 < \gamma < \pi/2$).

4.2. Уравнения для определения координат КТЛ

Так как $a \neq 0$ (иначе и $b = 0$ и мы оказываемся в A_1 или в A_2), уравнение (2.8) можно записать как

$$u^3 + 3\kappa u^2 - 3u - \kappa = 0, \quad (4.1)$$

где $u = b/a$. Заменой $u = v\sqrt{1 + \kappa^2} - \kappa$ уравнение (4.1) приводится к виду

$$v^3 - 3v + 2\sin\gamma = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) имеет в рассматриваемой ситуации три различных действительных корня $v_1 = -2\cos(\pi/6 - \gamma/3)$, $v_2 = 2\cos(\pi/6 + \gamma/3)$ и $v_3 = 2\sin(\gamma/3)$. Следовательно, (4.1) также имеет три различных действительных корня, которые можно записать, например, так:

$$u_m = \frac{v_m - \sin\gamma}{\cos\gamma}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

Заметим, что при изменении κ от 0 до $+\infty$ (или γ от 0 до $\pi/2$) корень u_1 убывает от $-\sqrt{3}$ до $-\infty$, корень u_2 — от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}/3$, корень u_3 — от 0 до $-\sqrt{3}/3$.

Записав равенства (2.3) через κ и χ и поделив их друг на друга, после простых преобразований получим

$$\chi^2 - \Phi\chi + \operatorname{ctg}^2 \vartheta (\kappa^2 - \Phi\kappa - 1) - 1 = 0, \quad (4.4)$$

где $\Phi = 1/u - u$. Решая это уравнение относительно χ и последовательно подставляя вместо u выражения u_1 , u_2 и u_3 , определяемые равенствами (4.3), получим шесть равенств, являющихся явными выражениями координаты χ через κ и ϑ :

$$\chi = \chi_{nm}(\kappa, \vartheta) = \frac{1}{2} \left(\Phi_m \pm \sqrt{D_m} \right), \quad (4.5)$$

где

$$D_m = \Phi_m^2 + 4 - 4(\kappa^2 - \kappa\Phi_m - 1) \operatorname{ctg}^2 \vartheta, \quad (4.6)$$

$\Phi_m = 1/u_m - u_m$, $m = 1, 2, 3$, $n = 1$ соответствует знаку «плюс» перед $\sqrt{D_m}$, а $n = 2$ — знаку «минус».

Далее, для определения координаты κ выразим α из (2.6). Заменяем в получившемся выражении b на ua и a на $\sqrt{ab/u}$. Затем, используя (2.3), перейдем к переменным κ и χ . Подставив вместо u выражения u_m , а вместо χ — выражения χ_{mn} ($n = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$), после некоторых преобразований с использованием (2.8) получим шесть равенств вида

$$\alpha = \alpha_{nm}(\kappa, \vartheta) = \frac{\chi_{nm}(1 + u_m^2)^3}{8(\chi_{nm} - \kappa)(1 - 3u_m^2)} \left(\frac{\chi_{nm} \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta}{u_m} \right)^{3/2}, \quad (4.7)$$

позволяющих численно определять координаты κ (или ζ) при фиксированных значениях параметров α и ϑ . Для вычисления координат χ (или ξ) при этом необходимо подставить найденное значение κ в соответствующее уравнение (4.5).

Заметим, что из неравенства $\alpha_{n1} > 0$ в силу (4.7) следует, что $0 < \chi_{n1} < \kappa$. Однако при выполнении этого условия α_{n1} не могут принимать действительные значения. Следовательно, уравнения $\alpha = \alpha_{n1}$ не имеют решений при положительных α . Пример графиков функций α_{12} , α_{22} , α_{13} и α_{23} приведен на рисунке 3.

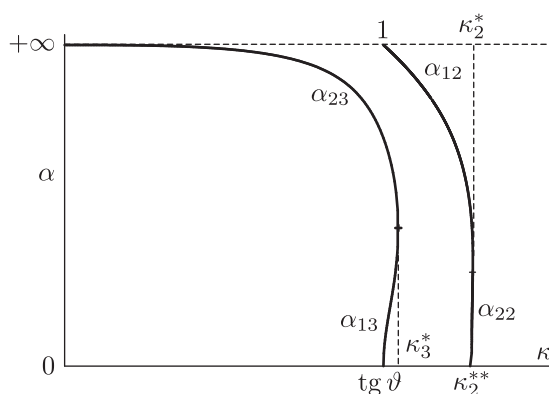


Рис. 3.

4.3. Внутренние КТЛ

Из $\alpha_{n2} > 0$ получаем $0 < \chi_{n2} < \kappa$. Нетрудно показать, что из $\chi_{12} < \kappa$ следует $\kappa > 1$, что возможно только при условии $\chi_{12} > 0$. Отметим также, что при $\kappa \rightarrow 1+0$ функция α_{12} стремится к $+\infty$. Кроме того, из условия $D_2 \geq 0$ следует, что $\kappa \leq \kappa_2^*$, где κ_2^* — единственный корень уравнения $\sin \vartheta = 2\sqrt{\kappa^2 - \kappa\Phi_2 - 1}/(2\kappa - \Phi_2)$ при $\kappa > 1$.

Далее, легко проверить, что α_{22} может быть положительной только при $\kappa_2^{**} < \kappa \leq \kappa_2^*$, где κ_2^{**} — единственное решение уравнения $\kappa^2 - \Phi_2\kappa - 1 = \text{tg}^2 \vartheta$ на промежутке $(1, \kappa_1^*]$.

Численный анализ показывает, что α_{22} является возрастающей функцией переменной κ на промежутке своей знакоположительности при любом допустимом значении ϑ , в то время как α_{12} на промежутке $1 \leq \kappa \leq \kappa_2^*$ является убывающей функцией κ только при $0 < \vartheta \leq 1.5414$, а при $1.5414 < \vartheta < \pi/2$ имеет два экстремума (рис. 5).

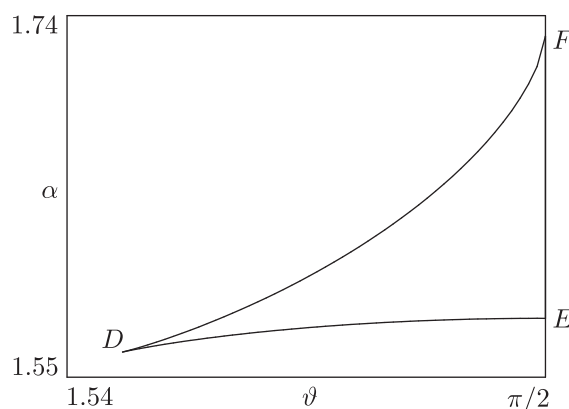


Рис. 4.

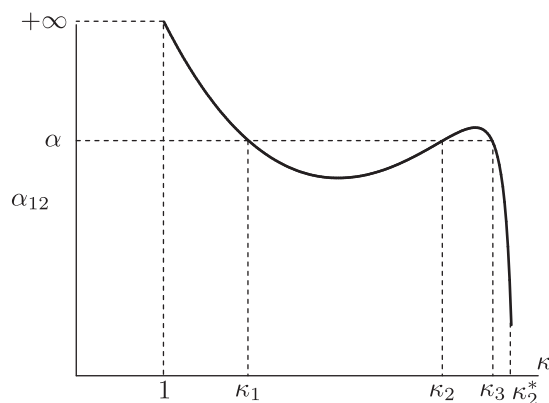


Рис. 5.

Учитывая, что если $\kappa = \kappa_2^*$, то $\alpha_{12} = \alpha_{22}$, можно сделать вывод, что совокупность уравнений $\alpha = \alpha_{n2}$ ($n = 1, 2$) имеет решение при любых положительных α , однако количество решений зависит от значений параметра ϑ . Так, для точек плоскости параметров (ϑ, α) , лежащих внутри криволинейного треугольника DEF с вершинами $D(1.5414, 1.5634)$, $E(\pi/2, 1.5814)$, $F(\pi/2, \sqrt{3})$ (см. рис. 4), эта совокупность имеет три решения (рис. 5), в точках границы этого треугольника, за исключением точки D , — два решения, при всех остальных допустимых значениях параметров — одно решение. В силу симметрии каждое из решений определяет две симметричные относительно центра масс O КТЛ.

Заметим, что при изменении значений параметра α от 0 до $+\infty$ найденные КТЛ перемещаются в плоскости (χ, κ) вдоль кривой C_1C_2 от точки $C_1(0, \kappa_3^*)$ на оси прецессии OZ к точке $C_2(1, 1)$ на оси динамической симметрии Oz_1 или вдоль симметричной относительно O кривой C_3C_4 (см. рис. 6, стрелки на этом рисунке соответствуют росту угловой скорости прецессии ω). Поскольку найденные КТЛ при любых допустимых значениях параметров не покидают некоторую окрестность твердого тела, их можно назвать «внутренними» КТЛ. Количество внутренних КТЛ, таким образом, равно шести для внутренних точек области DEF , четырем — для кривых DE и DF , и двум (L_3 и L_4 на рис. 6) — во всех остальных случаях (включая точку D).

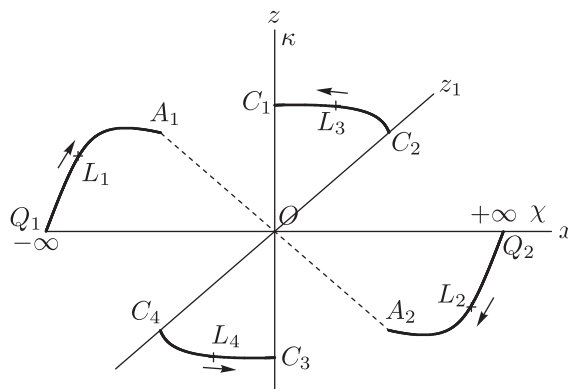


Рис. 6.

4.4. Внешние КТЛ

Нетрудно показать, что для того, чтобы функции α_{n3} принимали действительные положительные значения, необходимо выполнение неравенства $\chi_{n3} < -2\kappa \operatorname{ctg}^2 \vartheta$. Непосредственными выкладками можно убедиться, что при $n = 1$ это неравенство выполняется при $\gamma > \vartheta$ и $D_3 \geq 0$, в то время как при $n = 2$ достаточно неотрицательности D_3 , равносильной в рассматриваемой ситуации неравенству $\kappa \leq \kappa_3^*$, где κ_3^* — единственное решение уравнения $\sin \vartheta = 2\sqrt{\kappa^2 - \kappa\Phi_3 - 1}/(2\kappa - \Phi_3)$ для $\operatorname{tg} \vartheta < \kappa$. Отметим также, что если $\kappa \rightarrow \operatorname{tg} \vartheta + 0$, то $\alpha_{13} \rightarrow 0+0$, в то время как если $\kappa \rightarrow 0+0$, то $\alpha_{23} \rightarrow +\infty$. Численный анализ показывает, что при любом допустимом ϑ функция α_{13} является возрастающей на промежутке $(\operatorname{tg}(\vartheta), \kappa_3^*]$, а функция α_{23} — убывающей на промежутке $(0, \kappa_3^*]$. Учитывая вышесказанное и тот факт, что если $\kappa = \kappa_3^*$, то $\alpha_{13} = \alpha_{23}$, можно сделать вывод, что совокупность уравнений $\alpha = \alpha_{n3}$, ($n = 1, 2$) имеет ровно одно решение при любых положительных α и всех допустимых ϑ . В силу симметрии это решение определяет две симметричные относительно центра масс O КТЛ L_1 и L_2 . Заметим, что одна из этих КТЛ при изменении параметра α от $+\infty$ до 0 перемещается вдоль кривой A_1Q_1 от «фиктивного притягивающего центра» A_1 в бесконечность, а вторая — вдоль симметричной относительно O кривой A_2Q_2 (см. рис. 6), при этом если $\chi \rightarrow \pm\infty$, то $\kappa \rightarrow 0$, что позволяет назвать найденные положения равновесия «внешними» КТЛ.

В заключение приведем пример расположения КТЛ в плоскости (ξ, ζ) в случае, когда их число максимально (рис. 7, построенный для $\vartheta = 89^\circ 23'$ и $\alpha = 1.01$). На этом рисунке, как и выше, L_1 и L_2 — внешние КТЛ, а шесть внутренних КТЛ обозначены как L_3, L_4, L_5, L_6, L_7 и L_8 .



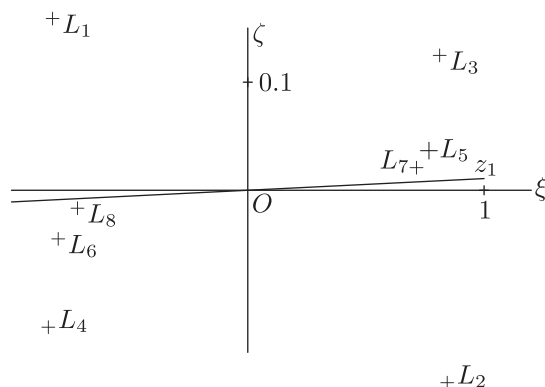


Рис. 7.

Выводы

В настоящей работе изучаются положения равновесия материальной точки бесконечно малой массы во вращающейся системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии твердого тела, чей гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух равных точечных масс, находящихся на мнимом расстоянии. (Таковую задачу можно рассматривать как вариант Обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел, предложенной в [8].) Устанавливается, что, в зависимости от значений параметров рассматриваемой задачи, количество таких положений равновесия может быть равно 7, 9 или 11. Два из таких равновесий, лежащих на оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно осям прецессии и динамической симметрии, являющихся аналогами лагранжевых точек либрации классической ограниченной круговой задачи трех тел, могут быть названы треугольными точками либрации (ТТЛ). Остальные равновесия оказываются лежащими в плоскости, образованной осями прецессии и динамической симметрии и могут быть названы компланарными точками либрации (КТЛ). Установлено, что одна из КТЛ совпадает с центром масс твердого тела. Две другие КТЛ, которые можно назвать «внешними», с ростом угловой скорости прецессии перемещаются из бесконечности к твердому телу. Остальные равновесия, которые можно назвать «внутренними КТЛ», лежат в пределах острых углов, образованных осями прецессии и динамической симметрии. В большинстве случаев существует две внутренние КТЛ, однако при достаточно больших углах нутации могут существовать две, четыре или шесть внутренних КТЛ, причем существование четырех внутренних КТЛ возможно только в некоторых редких случаях.

Список литературы

- [1] Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // *Астрономический журнал*, 1963, т. 40, № 2, с. 363–375.
- [2] Szebehely V. *Theory of orbits: The restricted problem of three bodies*. New York–London: Acad. Press, 1967. 312 pp.
- [3] Демин В. Г. *Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения*. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2010. 420 с.
- [4] Маркеев А. П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*. М.: Наука, 1978. 312 с.

- [5] Косенко И. И. О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида // ПММ, 1981, т. 45, № 1, с. 26–33.
- [6] Косенко И. И. Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде: Геометрия области устойчивости // Космические исследования, 1981, т. 19, № 2, с. 200–209.
- [7] Vasilkova O. O. Three-dimensional periodic motion in the vicinity of the equilibrium points of an asteroid // Astron. Astrophys., 2005, vol. 430, no. 2, pp. 713–723.
- [8] Белецкий В. В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // Космические исследования, 2007, т. 45, № 6, с. 435–442.
- [9] Белецкий В. В., Родников А. В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Космические исследования, 2008, т. 46, № 1, с. 42–50.
- [10] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // Journal of Vibroengineering, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 550–556.
- [11] Родников А. В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 295–311.
- [12] Белецкий В. В., Родников А. В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 569–576.

Libration Points of the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies in the case of imaginary distance between attracting centers

Vladimir V. Beletsky¹, Alexander V. Rodnikov²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences
Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047, Russia

²Bauman Moscow State Technical University
2-nd Baumanskaya st. 5, Moscow, 105005, Russia

¹beletsky@keldysh.ru, ²springer@inbox.ru

A particle steady motions in vicinity of dynamically symmetric precessing rigid body are studied in assumption that the body gravitational field is modeled as gravitational field of two centers being on imaginary distance. Such particle motion equations are a variant of motion equations of the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies (GRCP3B). The number of Coplanar Libration Points, i.e. the particle equilibria in the plane passing through the body axis of dynamical symmetry and through the axis of precession are established. (This number is odd and can be equal to 5, 7 or 9). CLPs evolution are studied at changing values of the considered system parameters. Moreover, two Triangular Libration Points, i.e. the particle equilibria in the axis crossing the body mass center orthogonally to axes of precession and dynamical symmetry are found.

MSC 2010: 70K20, 70K42

Keywords: problem of three bodies, libration points, steady motions, asteroid, regular precession

Received August 22, 2012, accepted October 18, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 5, pp. 931–940 (Russian)

