



УДК: 531.36:521.1

MSC 2010: 70K20, 70K42

# Треугольные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров

А. В. Родников

Изучаются равновесия материальной точки относительно осей прецессии и динамической симметрии твердого тела, гравитационное поле которого может быть представлено как поле тяготения двух комплексно-сопряженных точечных масс, находящихся на минимуме расстоянии. Устанавливается, что в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии, может быть не более двух таких положений равновесия. В соответствии с терминологией Обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел эти равновесия названы треугольными точками либрации (ТТЛ). Координаты ТТЛ определяются аналитически, прослеживается их эволюция при изменении значений параметров системы. Доказывается неустойчивость ТТЛ.

Ключевые слова: задача трех тел, точки либрации, относительное равновесие, твердое тело, астероид

## 1. Введение

Известно, что основным фактором, влияющим на движение космической станции в непосредственной близости от поверхности астероида, является гравитация этого астероида. (Конечно, даже на поверхности малой планеты сила гравитации Солнца оказывается многократно большей, чем сила гравитации самого астероида, однако при изучении относительного движения необходимо принимать в расчет неинерциальность системы отсчета, связанной с центром масс малой планеты.) Поэтому простейшей моделью, в рамках которой можно описывать такое движение, является механическая система, состоящая из массивного гравитирующего твердого тела с неподвижным центром масс и материальной точки

---

Получено 17 января 2014 года

После доработки 13 марта 2014 года

---

Родников Александр Владимирович  
[springer@inbox.ru](mailto:springer@inbox.ru)

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
105005, Россия, г. Москва, 2-ая Бауманская, д. 5



«нулевой» массы, движущейся под влиянием гравитационного поля этого твердого тела, но не оказывающей влияния на его движение. Для удержания космической станции около поверхности астероида можно либо «привязать» ее одним или двумя тросами к поверхности малой планеты (см. [7, 13, 15, 16]), либо поместить эту станцию в одну из точек либрации гравитирующего астероида (см., например, [5, 6, 8] о точках либрации гравитирующих тел).

Если твердое тело, моделирующее астероид, является динамически симметричным, то его движение вокруг центра масс оказывается регулярной прецессией. Если, кроме того, предположить, что гравитационный потенциал астероида может быть аппроксимирован гравитационным потенциалом двух центров, то уравнения движения материальной точки, моделирующей космическую станцию, в системе отсчета, связанной с осями прецессии и динамической симметрии, совпадут с уравнениями движения обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел (ООКЗТ), впервые сформулированной в [10]. Точки либрации для различных вариантов ООКЗТ изучались в [10–12, 14, 17, 18]. В частности, в [18] рассматривалась ситуация, когда твердое тело сжато вдоль оси динамической симметрии и, в соответствии с аппроксимациями из [1, 3], его гравитационный потенциал можно рассматривать как композицию потенциалов двух центров с комплексно-сопряженными массами, «лежащих» на оси динамической симметрии, но имеющих вдоль этой оси чисто мнимые координаты. Изучались равновесия материальной точки, моделирующей космическую станцию в плоскости, образованной осями прецессии и динамической симметрии. Однако, как было доказано в [13], для прецессирующего твердого тела, чей гравитационный потенциал инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, относительные равновесия возможны также в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела, перпендикулярно оси прецессии. Эти равновесия являются аналогами лагранжевых точек либрации классической ограниченной круговой задачи трех тел [2, 4] и, в соответствии с терминологией ООКЗТ, могут быть названы треугольными точками либрации (ТТЛ).

В настоящей работе для варианта ООКЗТ, рассмотренного в [18], устанавливается, что, как и в других ранее рассматривавшихся вариантах этой задачи, может существовать не более двух ТТЛ. Координаты ТТЛ определяются аналитически. Прослеживается эволюция ТТЛ при изменении значений параметров рассматриваемой системы. В частности, устанавливается, что в случае ненулевой мнимой части масс притягивающих центров ТТЛ существуют только начиная с некоторого минимального значения угловой скорости прецессии, в то же время с ростом абсолютной величины мнимой части масс притягивающих центров ТТЛ перемещаются от оси, перпендикулярной осям прецессии и динамической симметрии, к проекции оси динамической симметрии на рассматриваемую плоскость, при некотором значении этой абсолютной величины сливаются на этой оси, превращаясь в одну из внешних компланарных точек либрации, рассмотренных в [18], и в дальнейшем исчезают. Анализ уравнений движения, линеаризованных в окрестности ТТЛ, показывает, что при существовании двух ТТЛ хотя бы один корень характеристического уравнения является действительным положительным, из чего следует неустойчивость ТТЛ.

Настоящая работа дополняет [18] и обобщает некоторые результаты, полученные в [17].

## 2. Потенциал и условия равновесия

Как и в [18], будем считать, что потенциал прецессирующего динамически симметричного твердого тела, моделирующего астероид, является композицией гравитационных потенциалов двух притягивающих центров с комплексно-сопряженными массами и в без-

размерной форме может быть записан как

$$\tilde{\Pi} = -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{1 - i\nu}{a - ib} + \frac{1 + i\nu}{a + ib} \right) = -\alpha \frac{a + \nu b}{a^2 + b^2}, \quad (2.1)$$

где  $\nu$  — безразмерный параметр, характеризующий неравномерность сжатия твердого тела вдоль оси динамической симметрии (очевидно, что в силу произвольности выбора направления этой оси, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $\nu \geq 0$ ),  $a \pm ib$  — безразмерные расстояния от материальной точки, моделирующей космическую станцию, до притягивающих центров (естественно считать, что  $a > 0$ , так как рассматриваются силы притяжения, а не отталкивания),  $\alpha = Gm/(\omega^2 l^3) > 0$  — безразмерный параметр, характеризующий угловую скорость  $\omega$  прецессии,  $G$  — гравитационная постоянная,  $l$  — абсолютная величина расстояния между притягивающими центрами, «лежащими» на оси динамической симметрии, но имеющими на этой оси чисто мнимые координаты,  $m$  — масса твердого тела.

Пусть  $Oxyz$  — правая декартова прямоугольная система координат с началом в центре  $O$  масс твердого тела, вращающаяся вокруг оси прецессии с угловой скоростью  $\omega$ , такая, что ось  $Oz$  совпадает с осью прецессии, оси  $Ox$ ,  $Oz$  и ось динамической симметрии  $Oz_1$  лежат в одной плоскости, причем положительный луч оси  $Oz_1$  принадлежит прямому углу, образованному положительными лучами осей  $Ox$  и  $Oz$ . Будем рассматривать только общий случай, когда угол нутации  $\vartheta$  между положительными лучами осей  $Oz$  и  $Oz_1$  — острый. Для безразмерных координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  ( $\xi = x/l$ ,  $\eta = y/l$ ,  $z = \zeta/l$ ) материальной точки, моделирующей космическую станцию, справедливы равенства

$$a^2 - b^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1/4, \quad 2ab = \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta. \quad (2.2)$$

Заметим, что потенциал (2.1) не определен в случае  $a = b = 0$ , то есть, как следует из (2.2), на окружности  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1/4$  плоскости  $\xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta = 0$ . Так как в окрестности каждой из точек этой окружности гравитационная сила, определяемая (2.1), может быть как угодно велика, каждая из точек может быть названа «фиктивным притягивающим центром». Заметим также, что если  $\nu \neq 0$ , то все точки круга  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < 1/4$  плоскости  $\xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta = 0$  (то есть точки, для которых  $a = 0$ , но  $b \neq 0$ ) являются точками разрыва потенциала (2.1). В рамках рассматриваемой модели для частицы, помещенной в каждую из таких точек разрыва, можно определить линию действия (обязательно пересекающую  $Oz_1$ ) и величину гравитационной силы, действующей со стороны твердого тела, но не ее направление. Очевидно, что для того чтобы частица находилась в равновесии в  $Oxyz$ , необходимо (но не достаточно), чтобы линия действия гравитационной силы пересекала также ось  $Oz$ . Следовательно, точки разрыва, для которых  $\eta \neq 0$  и  $\zeta \neq 0$ , не являются положениями равновесия во вращающейся системе координат  $Oxyz$ . Нетрудно также проверить, что при  $\nu \neq 0$  точка  $O$  не может быть положением равновесия, так как сила гравитации в этой точке не равна нулю.

Кинетическую энергию материальной точки, представляющей космическую станцию, в безразмерной форме можно записать как

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad T_2 = 1/2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2), \quad T_1 = -\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}, \quad T_0 = 1/2(\xi^2 + \eta^2), \quad (2.3)$$

где точкой обозначена производная по безразмерному времени  $\tau = \omega t$ . Пусть  $J_0 = \tilde{\Pi} - T_0$ . Тогда условия равновесия материальной точки во вращающейся системе координат  $Oxyz$  можно записать как

$$\partial J_0 / \partial \xi = 0, \quad \partial J_0 / \partial \eta = 0, \quad \partial J_0 / \partial \zeta = 0. \quad (2.4)$$

Если  $a \neq 0$ , то, с учетом (2.1) и (2.2), условия (2.4) можно переписать в виде

$$\alpha \left( B\xi - \frac{1}{2}A \sin \vartheta \right) = (a^2 + b^2)^3 \xi, \quad (2.5)$$

$$\eta (\alpha B - (a^2 + b^2)^3) = 0, \quad (2.6)$$

$$B\xi - \frac{1}{2}A \cos \vartheta = 0, \quad (2.7)$$

где  $A = b^3 - 3\nu ab^2 - 3a^2b + \nu a^3$  и  $B = a^3 + 3\nu ba^2 - 3b^2a - \nu b^3$ .

### 3. Редукция на плоскость, перпендикулярную оси прецессии

Пусть, в отличие от случая, рассмотренного в [18],  $\eta \neq 0$ . Тогда из (2.6) следует, что  $B = (a^2 + b^2)^3/\alpha$ . Подставив это равенство в (2.5), получим  $A = 0$ . Тогда из (2.7) следует, что если  $a \neq 0$ , то  $\zeta = 0$ . Из этого и вышесказанного следует, что положения равновесия в  $Oxyz$  материальной точки, моделирующей космическую станцию, отличные от лежащих в плоскости  $\eta = 0$ , образованной осями прецессии и динамической симметрии, возможны только в плоскости  $\zeta = 0$ , проходящей через центр масс твердого тела  $O$  перпендикулярно оси прецессии, то есть в ТТЛ. (Аналогичный результат доказан в [13] для более общей ситуации.)

Очевидно, ТТЛ можно рассматривать как стационарные точки функции  $J_0$ , ограниченной на плоскость  $\zeta = 0$  при  $\eta \neq 0$ . Анализируя линии уровня  $J_0 = \text{const}$  на плоскости  $O\xi\eta$ , можно выделить две ситуации. В случае, изображенном на рисунке 1, седловые точки  $L_1$  и  $L_2$ , симметричные относительно оси  $O\xi$ , являются искомыми ТТЛ, тогда как в случае, изображенном на рисунке 2, ТТЛ не существуют. Отметим также, что стационарные точки  $N_1$  и  $N_2$  на этих рисунках, лежащие на прямой  $O\xi$ , вообще не являются положениями равновесия, так как в этих точках не выполняется условие (2.5). Точка  $N_3$  на рисунке 2 может в отдельных случаях оказаться одной из внешних компланарных точек либрации, рассмотренных в [18].

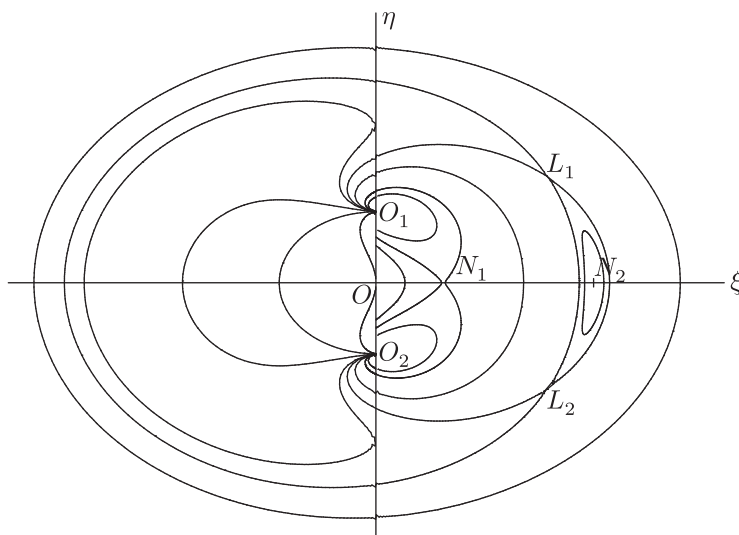


Рис. 1

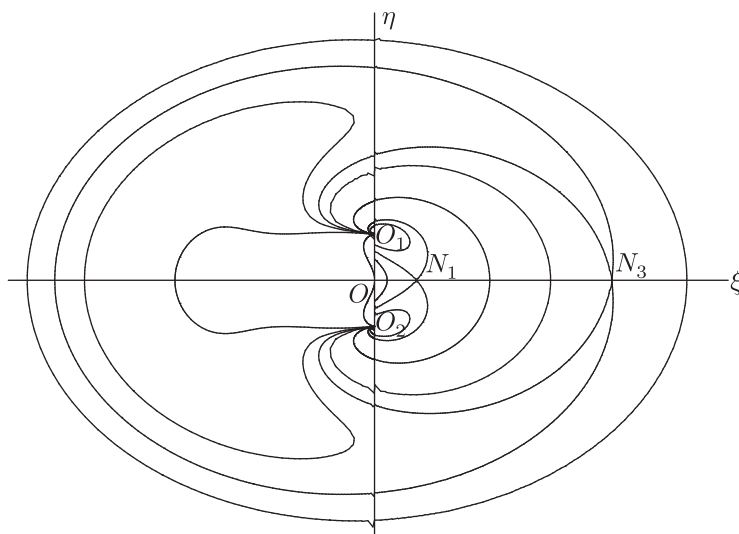


Рис. 2

Заметим, что в плоскости  $\zeta = 0$  величина  $a$  может быть нулевой только на отрезке оси  $O\eta$  с концами в точках, для которых  $\eta = \pm 1/2$ . Однако концы этого отрезка являются «фиктивными притягивающими центрами», тогда как в его внутренних точках линия действия гравитационной силы не параллельна оси  $Oy$ . Следовательно, для всех ТТЛ справедливо неравенство  $a > 0$ , и условия равновесия (2.5), (2.6), (2.7) в плоскости  $O\xi\eta$  после простых преобразований упрощаются до равенств

$$u^3 - 3\nu u^2 - 3u + \nu = 0, \tag{3.1}$$

$$\alpha = \frac{a^3(1 + u^2)^3}{(1 + \nu^2)(1 - 3u^2)}, \tag{3.2}$$

где  $u = b/a$ .

#### 4. Координаты треугольных точек либрации

Заменой  $u = \operatorname{tg}(\psi)$ ,  $\nu = \operatorname{tg}(3\delta)$  (всегда можно считать, что  $0 \leq \delta < \pi/6$ ) уравнение (3.1) преобразуется к виду  $\operatorname{tg}(3\psi - 3\delta) = 0$ , из чего следует, что корни этого кубического относительно  $u$  уравнения могут быть записаны как  $u_1 = \operatorname{tg}(\delta - \pi/3)$ ,  $u_2 = \operatorname{tg} \delta$ ,  $u_3 = \operatorname{tg}(\delta + \pi/3)$ . Однако только при  $u = u_2$  правая часть (3.2) оказывается положительной. Следовательно,  $u = \operatorname{tg} \delta$  в каждой из ТТЛ. В этом случае из (3.2) после некоторых преобразований получим

$$a = \alpha^{1/3} \cos \delta / \cos^{1/3}(3\delta), \quad b = a \operatorname{tg} \delta = \alpha^{1/3} \sin \delta / \cos^{1/3}(3\delta). \tag{4.1}$$

Тогда, так как в рассматриваемой ситуации  $\zeta = 0$ , из второго из равенств (2.2) следует, что

$$\xi = \frac{\alpha^{2/3} \sin(2\delta)}{\sin \vartheta \cos^{2/3}(3\delta)}. \tag{4.2}$$

Далее, подставляя (4.1) и (4.2) в первое из равенств (2.2), получим

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^{2/3} \cos(2\delta)}{\cos^{2/3}(3\delta)} - \frac{\alpha^{4/3} \sin^2(2\delta)}{\cos^{4/3}(3\delta) \sin^2 \vartheta}}. \quad (4.3)$$

Таким образом, координаты ТТЛ определяются формулами (4.2), (4.3), причем могут существовать не более двух ТТЛ.

## 5. Условия существования треугольных точек либрации

Очевидно, условием существования КТЛ является неотрицательность подкоренного выражения в правой части (4.3), причем положительность этого выражения означает существование двух ТТЛ, симметричных относительно  $Ox$ . Если же это выражение равно нулю, то в плоскости  $Oxy$  существует только одна точка либрации. Эта точка либрации также может быть названа ТТЛ, являясь одновременно, как нетрудно показать, одной из внешних компланарных точек либрации, рассмотренных в [18]. С учетом положительности  $\alpha$  условие существования ТТЛ можно переписать в виде

$$\alpha \leq f(\delta, \vartheta) = \frac{\cos 3\delta \sin^3 \vartheta}{2\sqrt{2} \sin^{3/2} 2\delta} \left( \operatorname{ctg} 2\delta + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\delta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}} \right)^{3/2}. \quad (5.1)$$

Равенство  $\alpha = f(\delta, \vartheta)$  определяет в области допустимых значений параметров  $(\delta, \vartheta, \alpha)$  некоторую поверхность. Сечением этой поверхности плоскостью  $\vartheta = \text{const}$  является некоторая кривая, соединяющая точку  $A$ , для которой  $\delta = 0$  и  $\alpha = \infty$ , с точкой  $B$ , для которой  $\delta = \pi/6$  и  $\alpha = 0$  (сплошная кривая  $ADB$  на рис. 3). Для точек, лежащих ниже  $ADB$ , существуют две ТТЛ; для точек, лежащих на  $ADB$ , в плоскости  $\zeta = 0$  существует только одна точка либрации, совпадающая с одной из внешних компланарных точек либрации; для точек, лежащих выше  $ADB$ , ТТЛ не существуют. Нетрудно показать, что  $f(\delta, \vartheta) < f(\delta, \pi/2) = (\operatorname{ctg}^3 \delta - 3 \operatorname{ctg} \delta)/8$ . Следовательно, если  $\alpha \geq (\operatorname{ctg}^3 \delta - 3 \operatorname{ctg} \delta)/8$ , то есть для точек, лежащих выше пунктирной кривой  $ACB$  на рисунке 3, ТТЛ не существуют при любых допустимых значениях  $\vartheta$ . Если же  $\delta = 0$ , то при любых допустимых  $\alpha$  и  $\vartheta$  существуют две ТТЛ (факт, ранее установленный в [17]).

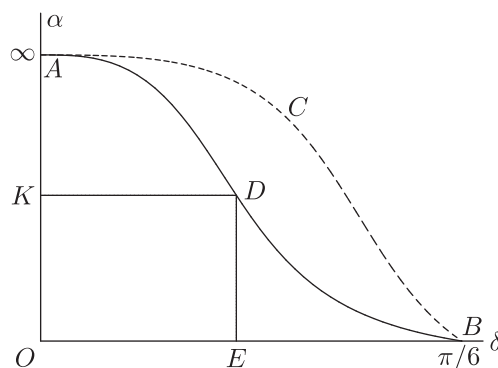


Рис. 3

### 6. Эволюция треугольных точек либрации

Характер эволюции ТТЛ при изменении того или иного параметра рассматриваемой системы изображен на рисунке 4.

Как следует из (5.1), при фиксированных значениях  $\delta$  и  $\vartheta$  ТТЛ существуют, только если  $0 < \alpha < \alpha_{\max}$  (отрезок  $ED$  на рис. 3), где  $\alpha_{\max} = f(\delta, \vartheta)$ . (Заметим, что если  $\vartheta \rightarrow 0$ , то и  $\alpha_{\max} \rightarrow 0$ .) При изменении  $\alpha$  от 0 до  $\alpha_{\max}$  (то есть при уменьшении угловой скорости прецессии от бесконечности до некоторого минимального допустимого значения) ТТЛ перемещаются в плоскости  $O\xi\eta$  по дугам окружности с центром в точке  $O_1((\text{ctg } 2\delta \sin \vartheta)/2, 0)$  из точек  $E_1(0, 1/2)$  и  $E_2(0, -1/2)$ , чтобы при  $\alpha = \alpha_{\max}$  слиться в точке  $D(\xi_D, 0)$ , где

$$\xi_D = \frac{1}{2} \left( \text{ctg } 2\delta \sin \vartheta + \sqrt{\text{ctg}^2 2\delta \sin^2 \vartheta + 1} \right). \tag{6.1}$$

Аналогично, при фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\vartheta$  ТТЛ существуют, только если  $0 \leq \delta < \delta_{\max}$  (отрезок  $KD$  на рис. 3), где  $\delta_{\max}$  определяется из уравнения  $\alpha = f(\delta_{\max}, \vartheta)$ . (Заметим, что если  $\vartheta \rightarrow 0$ , то и  $\delta_{\max} \rightarrow 0$ .) При этом при изменении  $\delta$  от 0 до  $\delta_{\max}$  ТТЛ перемещаются вдоль некоторой кривой в плоскости  $O\xi\eta$  из точек  $K_1(0, \sqrt{\alpha^{2/3} + 1/4})$  и  $K_2(0, -\sqrt{\alpha^{2/3} + 1/4})$ , чтобы при  $\alpha = \alpha_{\max}$  слиться в точке  $D$  на оси  $O\xi$ , для которой в этом случае  $\delta = \delta_{\max}$ .

Кроме того, при фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\delta$  ТТЛ существуют, только если  $\vartheta_{\min} < \vartheta < \pi/2$ , где

$$\vartheta_{\min} = \arcsin \left( \frac{2\alpha^{2/3} \sin 2\delta}{\cos^{1/3} 3\delta \sqrt{4\alpha^{2/3} \cos 2\delta + \cos^{2/3} 3\delta}} \right). \tag{6.2}$$

При изменении  $\vartheta$  от  $\vartheta_{\min}$  до  $\pi/2$  ТТЛ перемещаются в плоскости  $O\xi\eta$  по дугам окружности с центром в точке  $O$  из точки  $D$  на оси  $Ox$ , для которой в данном случае

$$\xi_D = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^{2/3} \cos 2\delta}{\cos^{2/3} 3\delta}}, \tag{6.3}$$

в точки  $M_1(\xi_1, \eta_1)$  и  $M_2(\xi_1, -\eta_1)$ , где

$$\xi_1 = \frac{\alpha^{2/3} \sin 2\delta}{\cos^{2/3} 3\delta}, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 \text{ctg } 2\delta - \xi_1^2}. \tag{6.4}$$

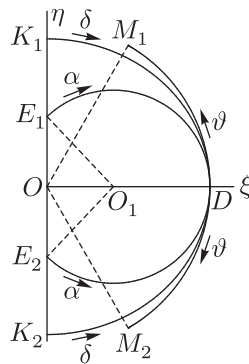


Рис. 4



## 7. Неустойчивость треугольных точек либрации

Характеристическое уравнение для уравнений движения, линеаризованных в окрестности любой точки либрации, может быть записано в виде

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0 = 0, \quad (7.1)$$

где  $A_0$  — определитель системы линеаризованных уравнений движения, определяемый равенством

$$A_0 = P_{\xi\xi}P_{\eta\eta}P_{\zeta\zeta} + 2P_{\xi\eta}P_{\eta\zeta}P_{\zeta\xi} - P_{\xi\xi}^2P_{\eta\eta} - P_{\xi\eta}^2P_{\zeta\zeta} - P_{\eta\zeta}^2P_{\xi\xi} + P_{\xi\xi}^2 + P_{\eta\zeta}^2 + P_{\zeta\zeta}^2 + P_{\zeta\zeta}, \quad (7.2)$$

в котором частные производные

$$P_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}}{\partial\beta\partial\gamma}, \quad \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad \gamma \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (7.3)$$

вычисляются в точке либрации. (При выводе (7.1) и (7.3) учтено, что  $\Delta\tilde{\Pi} = P_{\xi\xi} + P_{\eta\eta} + P_{\zeta\zeta} = 0$ .) Используя для частных производных величин  $a$  и  $b$  по переменным  $\xi, \eta, \zeta$  выражения, аналогичные выведенным в [17], условие  $\zeta = 0$ , зависимость  $b = ua$  и формулы (2.2), (3.1), (3.2), после ряда преобразований равенство (7.2) можно записать как

$$A_0 = -\frac{9}{4} \frac{\sin^2 \vartheta}{a^4(1+u^2)^2} \eta^2, \quad (7.4)$$

то есть если ТТЛ не лежит на оси  $O\xi$  (если  $\eta \neq 0$ ), то  $A_0 < 0$ . В этом случае уравнение  $x^3 + 2x^2 + A_2x + A_0 = 0$  обязательно имеет положительный действительный корень. Но тогда и уравнение (7.1) обязательно имеет положительный действительный корень. Следовательно, если существуют две ТТЛ, обе они неустойчивы.

## Выводы

В настоящей работе, дополняющей [18], изучаются положения равновесия материальной точки пренебрежимо малой массы относительно осей прецессии и динамической симметрии твердого тела, чей гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух комплексно-сопряженных точечных масс, находящихся на мнимом расстоянии. Установлено, что в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно его оси прецессии, существует не более двух таких положений равновесия, названных в соответствии с терминологией обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел треугольными точками либрации (ТТЛ). Координаты ТТЛ определены аналитически. Выведены условия существования ТТЛ. Прослежена эволюция ТТЛ при изменении значений параметров системы. Доказано, что в случае существования двух ТТЛ обе они неустойчивы.

## Благодарности

Автор благодарен В. В. Белецкому, А. А. Бурову, Ю. Ф. Голубеву, И. И. Косенко и С. Я. Степанову за полезные советы и комментарии по ходу работы.



## Список литературы

- [1] Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Дёмин В. Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // *Астрономический журнал*, 1963, т. 40, № 2, с. 363–375.
- [2] Szebehely V. *Theory of orbits: The restricted problem of three bodies*. New York: Acad. Press, 1967. 668 pp.
- [3] Дёмин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. 420 с.
- [4] Маркеев А. П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*. Москва: Наука, 1978. 312 с.
- [5] Косенко И. И. О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида // *ПММ*, 1981, т. 45, № 1, с. 26–33.
- [6] Косенко И. И. Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде: Геометрия области устойчивости // *Космические исследования*, 1981, т. 19, № 2, с. 200–209.
- [7] Lanoix E. L.-M., Misra A. K. Near-Earth asteroid missions using tether sling shot assist // *J. Spacecraft Rockets*, 2000, vol. 37, no. 4, pp. 475–480.
- [8] Vasilkova O. O. Three-dimensional periodic motion in the vicinity of the equilibrium points of an asteroid // *Astronom. Astrophys.*, 2005, vol. 430, no. 2, pp. 713–723.
- [9] Родников А. В. О положениях равновесия груза на тросе, закрепленном на гантелевидной космической станции, движущейся по круговой геоцентрической орбите // *Космические исследования*, 2006, т. 44, № 1, с. 62–72.
- [10] Белецкий В. В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космические исследования*, 2007, т. 45, № 5, с. 435–442.
- [11] Белецкий В. В., Родников А. В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Космические исследования*, 2008, т. 46, № 1, с. 42–50.
- [12] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // *J. Vibroeng.*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 550–556.
- [13] Родников А. В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 2, с. 295–311.
- [14] Белецкий В. В., Родников А. В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 569–576.
- [15] Misra A. K. Dynamics of a tether attached to an asteroid // 7th Internat. Workshop and Advanced School «Spaceflight Dynamics and Control», [www.aerospace.ubi.pt/workshop2012/Abstract\\_Misra.pdf](http://www.aerospace.ubi.pt/workshop2012/Abstract_Misra.pdf) (2012).
- [16] Родников А. В. О компланарных равновесиях космической станции на тросе, закрепленном на прецессирующем астероиде // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 2, с. 309–322.
- [17] Белецкий В. В., Родников А. В. Точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 5, с. 931–940.
- [18] Родников А. В. Компланарные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 4, с. 697–710.

### **Triangular Libration Points of the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies for conjugate complex masses of attracting centers**

Alexander V. Rodnikov

Bauman Moscow State Technical University  
2nd Baumanskaya st. 5, Moscow, 105005, Russia  
[springer@inbox.ru](mailto:springer@inbox.ru)

We study a particle equilibria with respect to axes of precession and of dynamical symmetry of a rigid body in assumption that the body gravitational field is composed of gravitational fields



of two conjugate complex masses being on imaginary distance. We establish that there are not more than two of these equilibria in the plane passing the body mass center orthogonally to the precession axis. Using terminology of the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies, we call these equilibria the Triangular Libration Points (TLP). We find TLPs' coordinates analytically and we trace their evolution at changing values of the system parameters. We also prove that TLPs are instable.

MSC 2010: 70K20, 70K42

Keywords: problem of three bodies, libration points, relative equilibrium, rigid body, asteroid

Received January 17, 2014, accepted March 13, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 213–222 (Russian)

