ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 537.86/.87:530.182

MSC 2010: 37M20

**Бифуркационный механизм
формирования развитой мультистабильности
в осцилляторе ван дер Поля
с запаздывающей обратной связью**

М. И. Балакин, Н. М. Рыскин

Изучен бифуркационный механизм формирования мультистабильности в генераторе с запаздывающей обратной связью. Установлено, что развитая мультистабильность формируется в результате двух основных типов бифуркаций: суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа и субкритической бифуркации Неймарка – Сакера. При вариации управляющих параметров неподвижная точка в фазовом пространстве многократно претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова – Хопфа, что ведет к увеличению числа седловых циклов. Устойчивость они приобретают после ряда субкритических бифуркаций Неймарка – Сакера. Проведено исследование динамики системы в широком диапазоне значений управляющих параметров.

Ключевые слова: запаздывание, бифуркации, мультистабильность

Получено 18 марта 2017 года
После доработки 10 апреля 2017 года

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-37-00104 мол. а.

Балакин Максим Игоревич
balakinmaxim@gmail.com

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Рыскин Никита Михайлович
ryskinm@gmail.com

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

1. Введение

Генератор ван дер Поля с запаздывающей обратной связью является одной из базовых моделей нелинейной динамики [1], демонстрирующей колебательные режимы и бифуркационные переходы, характерные для автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью различной природы (например, генераторов СВЧ-диапазона [2–4], лазеров [5–8], медико-биологических [9, 10] и других систем).

Изучение особенностей динамики различных модификаций осциллятора ван дер Поля с запаздывающей обратной связью привлекало и привлекает внимание многих исследователей (см., например, [11–18]). Уже давно и подробно исследовано поведение системы в окрестности порога самовозбуждения автоколебаний, выявлено разбиение пространства параметров системы на отдельные зоны генерации, внутри которых возникают автоколебания на различных частотах, исследовано влияние вариации управляющих параметров на характеристики возбуждаемых колебаний. Отмечено, что имеются области, в которых сосуществует множество аттракторов. Однако при этом остается открытым вопрос, каким образом протекает процесс формирования мультстабильных состояний, какие бифуркации наблюдаются для состояния равновесия и предельных циклов. Также представляется интересным исследовать динамику системы при больших значениях параметра надкритичности, вдали от точки рождения предельного цикла. В данной работе будет проведен двухпараметрический анализ динамики рассматриваемой системы в широком диапазоне значений управляющих параметров и выявлен бифуркационный механизм формирования мультстабильности. Бифуркационный анализ проводился с помощью пакета DDE-BIFTOOL [19].

2. Исследуемая система

Существуют различные радиофизические системы, которые можно описать уравнением ван дер Поля с запаздыванием. В качестве примера рассмотрим схему RC-генератора с мостом Вина и линией задержки в кольце обратной связи (рис. 1). Генератор состоит из последовательно включенных усилителя, моста Вина и линии задержки.

Рис. 1. Схема RC-генератора с мостом Вина и линией задержки: 1 — усилитель, 2 — фильтр, 3 — линия задержки.

Напряжения на входе и на выходе усилителя $u_{in}(t)$, $u_{out}(t)$ и напряжение на фильтре $u_f(t)$ связаны следующими соотношениями:

$$u_{in}(t) = u_f(t - T_d), \quad u_{out} = f(u_{in}(t)), \quad u_{out} = u_{R_1} + u_{C_1} + u_f.$$

Здесь T_d — время задержки, $f(U)$ — нелинейная характеристика усилителя. Используя законы Кирхгофа, запишем:

$$u_{out} = R_1 C_2 \frac{du_f}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_f + C_1 \int \left(C_2 \frac{du_f}{dt} + \frac{1}{R_2} u_f \right) dt + u_f. \quad (2.1)$$

Учитывая, что $u_{out} = f(u_f(t - T_d))$, перепишем уравнение (2.1) в виде

$$f(u_f(t - T_d)) = R_1 C_2 \frac{du_f}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_f + C_1 \int \left(C_2 \frac{du_f}{dt} + \frac{1}{R_2} u_f \right) dt + u_f. \quad (2.2)$$

Дифференцируя (2.2) по времени, получим уравнение второго порядка относительно u_f :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_f(t)}{dt^2} + \left[\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right] \frac{du_f(t)}{dt} + \\ + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} u_f(t) - \frac{df(u_f(t - T_d))}{du_f(t - T_d)} \frac{du_f(t - T_d)}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим симметричный мост Вина, когда $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$, и предположим, что для усилителя зависимость выходного напряжения от входного можно аппроксимировать функцией

$$f(u_{in}) \approx k_1 u_{in} - k_2 u_{in}^3.$$

В этом случае уравнение генератора примет вид

$$\frac{d^2 u_f(t)}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_f(t)}{dt} - (k_1 - 3k_2 u_f^2(t - T_d)) \frac{du_f(t - T_d)}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} u_f(t) = 0. \quad (2.4)$$

Переходя к новым безразмерным переменным

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \tau_d = \omega_0 T_d, \quad x = \sqrt{\frac{3k_2}{\omega_0}} u_f, \quad \varepsilon = \frac{k_1}{\omega_0},$$

получим уравнение

$$\ddot{x}(\tau) + \lambda \dot{x}(\tau) + x(\tau) = [\varepsilon - x^2(\tau - \tau_d)] \dot{x}(\tau - \tau_d), \quad (2.5)$$

где $x(\tau)$ — динамическая переменная, τ_d — время запаздывания, λ — параметр диссипации, ε — параметр возбуждения. Здесь и далее точки над переменными обозначают дифференцирование по времени. В данном конкретном случае $\lambda = 3$, однако для большей общности сохраним его в уравнении (2.5) как независимый параметр. Отметим, что аналогичное уравнение было впервые получено в работе [20], где рассматривался триодный генератор и считалось, что запаздывание обусловлено конечным временем пролета электронов между электродами триода.

Без задержки в цепи обратной связи ($\tau_d = 0$) данное уравнение переходит в классическое уравнение ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (2.6)$$

где управляющий параметр $\mu = \varepsilon - \lambda$ объединяет параметр подкачки ε и параметр диссипации λ .

3. Устойчивость и бифуркации состояния равновесия системы. Условия возбуждения автоколебаний и их зависимость от времени запаздывания

Перейдем к анализу динамики рассматриваемой модели. Обсудим влияние запаздывания на возбуждение и устойчивость колебаний. Уравнение (2.5) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= y(\tau), \\ \dot{y}(\tau) &= -\lambda y(\tau) + [\varepsilon - x^2(\tau - \tau_d)]y(\tau - \tau_d) - x(\tau).\end{aligned}$$

Для исследования условий устойчивости состояния равновесия линеаризуем систему (3.1) в окрестности неподвижной точки O , расположенной в начале координат ($x = 0$, $y = 0$). Уравнения эволюции малых возмущений $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} &= \tilde{y}(\tau), \\ \frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} &= -\lambda\tilde{y}(\tau) + \varepsilon\tilde{y}(\tau - \tau_d) - \tilde{x}(\tau).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Отыскивая решения системы (2.6) в виде

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\tau) &= a_1 e^{\rho\tau}, \\ \tilde{y}(\tau) &= a_2 e^{\rho\tau},\end{aligned}\tag{3.2}$$

получим характеристическое уравнение

$$\rho^2 + [\lambda - \varepsilon e^{-\rho\tau_d}]\rho + 1 = 0.\tag{3.3}$$

Для определения условий самовозбуждения автоколебаний в системах с запаздыванием широко используется предложенный Ю. И. Неймарком метод D -разбиения [21]. Для возбуждения автоколебаний необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3.3) имело комплексные корни, лежащие в правой полуплоскости. Поэтому для определения границ областей возбуждения в пространстве параметров системы рассмотрим чисто мнимые корни характеристического уравнения $\rho = i\omega$. В результате уравнение (3.3) принимает вид

$$-\omega^2 + [\lambda - \varepsilon e^{-i\omega\tau_d}]i\omega + 1 = 0.\tag{3.4}$$

Разделив в (3.4) вещественную и мнимую части, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \lambda^2 + \frac{(1 - \omega^2)^2}{\omega^2}, \\ \tau_d &= \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \omega^2}{\lambda\omega} \right) + \frac{k\pi}{\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{3.5}$$

которая определяет в пространстве параметров границы областей возбуждения автоколебаний.

В случае $\tau_d = 0$ существует единственная область возбуждения автоколебаний ($k = 0$) с частотой $\omega = 1$, граница которой определяется соотношением $\varepsilon = \lambda$. При введении задержки ($\tau_d > 0$) из уравнений (3.5) следует, что возбуждение автоколебаний на частоте $\omega \simeq 1$ происходит при $\varepsilon = \lambda$ для $\tau_d = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В этих бифуркационных точках происходит мягкое рождение устойчивых предельных циклов с одинаковыми периодами $T \simeq 2\pi$.

Фиксируя коэффициент диссипации $\lambda = 3$ и меняя в уравнениях (3.5) значения ω от $-\infty$ до $+\infty$, получим семейство линий, отвечающих различным k , при пересечении которых неподвижная точка O претерпевает бифуркации.

На рисунке 2 на плоскости параметров (ε, τ_d) построены линии бифуркационных значений для $k = 0, 2, 4, \dots, 16$, которые обозначены $l_{ah}^1, l_{ah}^2, \dots, l_{ah}^8$. Следует отметить, что линии, построенные методом D -разбиения, полностью совпадают с бифуркационными линиями, полученными численно с помощью пакета библиотек DDE-BIFTOOL [19]. Каждая из бифуркационных линий l_{ah}^i имеет точку минимума, которой опирается на прямую $\varepsilon = \lambda$. Граница мягкого возбуждения автоколебаний состоит из кривых ab, bc, cd, de и т. д., принадлежащих бифуркационным линиям $l_{ah}^1, l_{ah}^2, l_{ah}^3, l_{ah}^4$ и т. д. На этих кривых действительные части старшей пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения переходят через нуль от отрицательных значений к положительным. Состояние равновесия из устойчивого фокуса превращается в седло-фокус, и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, который отвечает квазигармоническим автоколебаниям и радиус которого растет пропорционально корню из надкритичности. Происходит суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа. У каждой бифуркационной линии $l_{ah}^1, l_{ah}^2, l_{ah}^3, \dots$ родившийся предельный цикл обозначим соответствующим индексом: $C_1, C_2, C_3, \dots$. Период автоколебаний T вблизи порога возбуждения, между точками $\tau_d = 0, \pi, 2\pi, \dots$, существенным образом зависит от времени задержки в кольце обратной связи.

На рисунке 3 представлен график зависимости T от τ_d . Период определялся по мнимой части собственных значений неподвижной точки вдоль бифуркационных линий, вычисленных с помощью комплекса программ DDE-BIFTOOL [19], и проверялся с помощью непосредственного численного интегрирования системы (3.1). Наиболее сильная зависимость T

Рис. 2. Линии бифуркационных значений неподвижной точки на плоскости управляющих параметров (ε, τ_d) при фиксированном значении коэффициента диссипации $\lambda = 3$. Цифрами обозначено количество предельных циклов в фазовом пространстве системы.

Рис. 3. Зависимость периода автоколебаний вблизи порога возбуждения от времени запаздывания.

от τ_d наблюдается на участке ab . Период увеличивается примерно в 3 раза — от $T \simeq 6,28$ до $T \simeq 19,4$. С увеличением времени задержки при переходе через точку b период автоколебаний резко уменьшается до значения $T \simeq 2,64$, после чего на участке bc плавно нарастает до $T \simeq 9,13$. Из рисунка видно, что с ростом времени задержки на каждом из участков границы мягкого возбуждения автоколебаний происходит плавное увеличение периода и его резкое уменьшение при переходе через крайние точки отрезков $(b, c, d, e, \dots)$. По мере увеличения τ_d разность между максимальным и минимальным значениями уменьшается, минимальные и максимальные значения приближаются к $T = 2\pi$.

В отличие от осциллятора ван дер Поля, где неподвижная точка претерпевает только одну бифуркацию рождения цикла, в генераторе с запаздывающей обратной связью может наблюдаться целая серия бифуркаций Андронова–Хопфа, что ведет к появлению в фазовом пространстве большого числа предельных циклов. Первая бифуркация неподвижной точки O с потерей ее устойчивости приводит к рождению устойчивого предельного цикла, к возбуждению автоколебаний. Далее, став седловой, неподвижная точка O при вариации управляющих параметров многократно порождает седловые предельные циклы, что иллюстрирует рисунок 2. Многие из них при дальнейшем изменении параметров могут стать устойчивыми, что ведет к формированию развитой мультистабильности. Детальные исследования бифуркационного механизма формирования мультистабильности представлены ниже.

4. Бифуркационный механизм формирования мультистабильности

Перейдем к рассмотрению механизма формирования мультистабильности. На рисунке 4 на плоскости управляющих параметров (ε, τ_d) построены линии бифуркационных значений l_{ah}^i , $i = 1, 2, 3, 4$, для неподвижной точки O . Кроме того, на рисунке построены линии l_{ns}^i , ограничивающие области устойчивости предельных циклов C_i . Области устойчивости имеют клинообразную форму и сходятся к точкам b, c, d, e . Для того чтобы выяснить, как появляются устойчивые предельные циклы, проследим за бифуркациями неподвижной точки O и предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 в зависимости от τ_d при $\varepsilon = 3,5$, вдоль

Рис. 4. Линии бифуркационных значений неподвижной точки O и предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 на плоскости управляющих параметров (ε, τ_d) при $\lambda = 3$.

пунктирной линии AB на рисунке 4. Бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 5. В интервале значений параметров между линиями b_1^1 и b_1^2 в фазовом пространстве имеется устойчивая неподвижная точка O . С уменьшением τ_d при пересечении b_1^1 действительные части старшей пары собственных значений переходят через нуль из отрицательной области в положительную, точка O становится седловой, а в ее окрестности рождается устойчивый предельный цикл C_1 , то есть происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. При дальнейшем уменьшении τ_d до нуля никаких бифуркаций не происходит.

С ростом τ_d при пересечении b_1^2 точка O претерпевает еще одну суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, в ее окрестности рождается устойчивый предельный цикл C_2 . Неустойчивое многообразие точки O является двумерным. При пересечении линии b_1^3 происходит еще одна бифуркация Андронова–Хопфа, неустойчивое многообразие точки O становится четырехмерным, а в ее окрестности рождается седловой цикл C_3 с двумерным неустойчивым многообразием. При пересечении b_1^4 в фазовом пространстве появляется еще один седловой цикл (C_4) с четырехмерным неустойчивым многообразием, и так далее. Структура фазового пространства существенно усложняется, в окрестности неподвижной точки рождаются новые и новые седловые предельные циклы.

При движении по плоскости управляющих параметров каждый из этих циклов в результате определенных бифуркаций может стать устойчивым. Например, когда время задержки превышает бифуркационное значение b_3^1 , седловой цикл C_3 рождается с двумерным неустойчивым многообразием. При $\tau_d > b_3^2$ он претерпевает субкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера и становится устойчивым. Седловой цикл C_4 за точкой b_1^4 имеет четырехмерное неустойчивое многообразие. С увеличением параметра τ_d он приобретает устойчивость в результате последовательности двух субкритических бифуркаций Неймар-

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма для неподвижной точки O и предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 в зависимости от параметра τ_d .

ка – Сакера. Выше точки b_2^4 он превращается в седловой цикл с двумерным неустойчивым многообразием и при пересечении точки b_3^4 становится устойчивым.

Рождение устойчивых сосуществующих предельных циклов в фазовом пространстве системы происходит и при уменьшении времени задержки τ_d в цепи обратной связи. На плоскости управляющих параметров (рис. 4) со стороны больших задержек рождение C_2 из неподвижной точки происходит на правой ветви линии суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа l_{ah}^2 . По мере уменьшения τ_d этот цикл становится устойчивым при пересечении бифуркационной линии l_{ns}^2 . Однако, прежде чем стать устойчивым, при движении по параметрам между линиями l_{ah}^2 и l_{ns}^2 он претерпевает целый каскад бифуркаций. Они представлены точками на диаграмме рисунка 5. При b_6^2 из неподвижной точки рождается седловой предельный цикл с восьмимерным неустойчивым многообразием. За точкой b_5^2 после субкритической бифуркации Неймарка – Сакера он превращается в седловой цикл с шестимерным неустойчивым многообразием, затем с четырехмерным и с двумерным в результате таких же бифуркаций в точках b_4^2 и b_3^2 . Цикл C_2 становится устойчивым только после четвертой бифуркации в точке b_2^2 . Цикл C_3 , который также рождается из точки P , приобретает устойчивость через последовательность из восьми субкритических бифуркаций Неймарка – Сакера, а цикл C_4 — через последовательность из двенадцати бифуркаций.

На основе проведенного бифуркационного анализа неподвижной точки, устойчивых и седловых предельных циклов можно представить структуру пространства параметров мультистабильной системы в виде, изображенном на рисунке 6. Характерные режимы системы, наблюдаемые при вариации значений управляющих параметров и при различных начальных условиях, можно разделить на отдельные семейства, которые лежат на отдельных листах L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 и т. д. Снизу они ограничены отрезками линий суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа (ab, bc, cd, de, ef и т. д.), при пересечении которых из неподвижной точки рождаются устойчивые предельные циклы C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и т. д. Правые и левые стороны листов ограничены линиями субкритических бифуркаций Неймарка – Сакера l_{ns}^i ($i = 1, 2, 3, \dots$). На рисунке верхние линии листов имеют условный характер

Рис. 6. Структура пространства параметров исследуемой мультистабильной системы.

и, поскольку имеет смысл рассматривать поведение генератора при $\tau_d \geq 0$, левая граница первого листа L_1 ограничена осью ординат. Из рисунка видно, что в точки $(b, c, d, e, f, \dots)$ отрезков, образующих границу возбуждения автоколебаний, сходятся линии субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера, причем в точке b сходятся правая граница (l^1_{ns}) листа L_1 и левая граница (l^2_{ns}) листа L_2 , в точке c — правая граница (l^2_{ns}) листа L_2 и левая граница (l^3_{ns}) листа L_3 , в точке d — правая граница (l^3_{ns}) листа L_3 и левая граница (l^4_{ns}) листа L_4 и т. д. В областях перекрытия листов наблюдается мультистабильность, то есть в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы различных семейств. Число сосуществующих аттракторов увеличивается с ростом времени задержки τ_d и параметра возбуждения ε . При одних и тех же значениях параметров, в зависимости от выбора начальных условий, могут наблюдаться периодические, квазипериодические и хаотические режимы.

5. Карта режимов. Эволюция мультистабильных состояний

Рассмотрим поведение системы на отдельных листах пространства параметров более детально. Из ранее полученных результатов видно, что отдельные листы пространства параметров системы перекрываются и в перекрытиях образуются мультистабильные состояния. При этом формирование мультистабильности происходит с участием устойчивых предельных циклов и других аттракторов, возникающих на их основе.

В качестве примера рассмотрим би- и тристабильные состояния, формирующиеся на основе первых четырех листов. На рисунке 7 представлена карта динамических режимов. Вблизи линии потери устойчивости в фазовом пространстве системы возможно сосуществование только устойчивых предельных циклов (области C_1C_2 , C_2C_3 , C_3C_4), причем возможно выделить область плоскости параметров, в которой сосуществуют три устойчивых предельных цикла ($C_1C_2C_3$). С ростом ε в системе происходит рождение квазипериодиче-

Рис. 7. Карта динамических режимов пространства параметров $\varepsilon - \tau_d$. $C_{1,2,3,4}$ — устойчивые предельные циклы, $T_{2,3,4}$ — устойчивые торы. Зеленым^a выделены области резонансов на торе.

Рис. 8. (a) Проекция фазовых портретов сосуществующих устойчивых предельных циклов на плоскость (x, y) при $\tau_d = 12$, $\varepsilon = 4$: 1 — C_2 , 2 — C_3 , 3 — C_3 . (b) Фазовые портреты сосуществующих устойчивого предельного цикла и тора при $\tau_d = 7$, $\varepsilon = 6$: 1 — T_2 , 2 — C_3 .

ских аттракторов (T_i). Рисунок 8a иллюстрирует сосуществование трех устойчивых циклов, а рисунок 8b — цикла и тора. В областях T_2T_3 , T_3T_4 на рисунке 7 сосуществуют два двумерных тора.

Рост параметра подкачки приводит к разрушению торов и образованию хаотических аттракторов. На рисунке 9 приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма. На ней видно рождение тора ($\varepsilon = 5.5$), области резонансов (например, в окрестности $\varepsilon = 5.66$), а также рождение хаотического аттрактора ($\varepsilon = 6.2$). Хаотические аттракторы, возникающие внутри различных листов, в отдельных областях плоскости параметров сосуществуют, а с увеличением ε могут сливаться, что приводит к формированию развитого, или многомодового, хаоса [22–24]. Известно, что подобные режимы являются гиперхаотическими, поскольку имеют более одного положительного показателя Ляпунова [25, 26].

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1702001/>

Рис. 9. Бифуркационная диаграмма динамических режимов второго листа двухпараметрической бифуркационной диаграммы ($\tau_d = 8$).

Рис. 10. Бифуркационная структура пространства параметров системы. Показаны границы 50 листов диаграммы.

Таким образом, мультистабильные состояния в системе формируются на основе различных комбинаций динамических режимов — периодических, квазипериодических и хаотических.

Выше были подробно рассмотрены первые четыре листа бифуркационной диаграммы, характерные бифуркационные переходы и колебательные режимы, возникающие внутри этих листов. Увеличение запаздывания ведет к формированию новых листов бифуркационной диаграммы и, следовательно, к увеличению числа мультистабильных состояний. Например, на рисунке 10 показаны границы 50 листов диаграммы. Видно, что в области больших τ_d структура пространства параметров существенно образом усложнилась. В этой области уже при незначительном превышении параметром ε порога неустойчивости неподвижной точки O в фазовом пространстве имеется большое количество сосуществующих устойчивых предельных циклов, то есть в системе формируется развитая мультистабильность (гипермультистабильность), которая исследовалась ранее в ряде работ (см., например, [27, 28]). Однако характерные бифуркационные механизмы, в результате которых предельные циклы приобретают устойчивость и формируется мультистабильность, качественно не изменяются и соответствуют описанным в разделе 4.

6. Заключение

В данной работе для осциллятора ван дер Поля с запаздывающей обратной связью проведено исследование механизма формирования мультистабильности. Анализ устойчивости неподвижной точки методом D -разбиений показал, что она многократно претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, в результате чего в фазовом пространстве появляется множество предельных циклов. Соответственно, на плоскости параметров (ε, τ) существует множество зон возбуждения автоколебаний. При переходе из одной зоны возбуждения в другую происходит скачкообразное изменение периода колебаний.

С помощью пакета DDE-BIFTOOL выявлен бифуркационный механизм формирования развитой мультистабильности. Установлено, что после первой бифуркации рождается устойчивый предельный цикл, а после каждой последующей — седловой предельный цикл с двумерным, четырехмерным, шестимерным, восьмимерным и т. д. неустойчивыми многообразиями. Устойчивость они приобретают, соответственно, после одной, двух, четырех, шести и т. д. субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера. Границы бассейнов притяжения сосуществующих устойчивых предельных циклов формируются семейством вложенных седловых двумерных торов, окружающих устойчивые предельные циклы.

Проведено численное моделирование сложной динамики системы в широком диапазоне значений управляющих параметров, которое показало, что мультистабильность может быть обусловлена сосуществованием не только периодических режимов, но также квазипериодических и хаотических. Также показано, что рост параметра подкачки приводит к слиянию различных аттракторов и формированию развитого, или многомодового, хаоса.

Представляется, что изученный механизм формирования мультистабильности носит достаточно универсальный характер и должен наблюдаться в широком классе систем с запаздыванием. Выяснение этого вопроса будет являться предметом дальнейших исследований.

Авторы выражают глубокую благодарность В. В. Астахову за плодотворные обсуждения полученных результатов и ценные советы.

References

- [1] Neimark Ju. I., Landa P. S. Stochastic and chaotic oscillations. Dordrecht: Springer, 1992.
- [2] Ryskin N. M., Titov V. N., Han S. T., So J. K., Jang K. H., Kang Y. B., Park G. S. Nonstationary behavior in a delayed feedback traveling wave tube folded waveguide oscillator, *Phys. Plasmas*, 2004, vol. 11, no. 3, pp. 1194–1202.
- [3] Titov V. N., Volkov D. V., Yakovlev A. V., Ryskin N. M. Reflex klystron as an example of a self-oscillating delayed feedback system, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 18, no. 6, pp. 138–158 (Russian).
- [4] Emelyanov V. V., Girevoy R. A., Yakovlev A. V., Ryskin N. M. Time-domain particle-in-cell modeling of delayed feedback klystron oscillators, *IEEE Trans. on Electron Devices*, 2014, vol. 61, no. 6, pp. 1842–1847.
- [5] Grigor'eva E. V., Kashchenko S. A., Loiko N. A., Samson A. M. Multistability and chaos in a negative-feedback laser, *Sov. J. Quantum Electron.*, 1990, vol. 20 no. 8, pp. 938–943; see also: *Kvantovaya Elektronika*, 1990, vol. 17, no. 8, pp. 1023–1028.
- [6] Grigor'eva E. V., Kashchenko S. A., Loiko N. A., Samson A. M. Nonlinear dynamics in a laser with a negative delayed feedback, *Phys. D*, 1992, vol. 59, no. 4, pp. 297–319.

- [7] Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1993, vol. 3, no. 6, pp. 1515–1528.
- [8] Grigorieva E. V., Kashchenko I. S., Kashchenko S. A. Multistability in a laser model with large delay, *Model. Anal. Inform. Sist.*, 2010, vol. 17, no. 2, pp. 17–27 (Russian).
- [9] Mackey M. C., Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems, *Science*, 1977, vol. 197, pp. 287–289.
- [10] Rznichenko G. Yu. *The mathematical models in biophysics and ecology*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2003 (Russian).
- [11] Rubanik V. P. *Oscillations of quasilinear time-delay systems*, Moscow: Nauka, 1969 (Russian).
- [12] Baranov S. V., Kuznetsov S. P., Ponomarenko V. I. Chaos in the phase dynamics of Q-switched van der Pol oscillator with additional delayed feedback loop, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 11–23 (Russian).
- [13] Song Y. Hopf bifurcation and spatio-temporal patterns in delay-coupled van der Pol oscillators, *Nonlinear Dynam.*, 2011, vol. 63, nos. 1–2, pp. 223–237.
- [14] Erneux Th., Grasman J. Limit-cycle oscillators subject to a delayed feedback, *Phys. Rev. E* (3), 2008, vol. 78, no. 2, 026209, 8 pp.
- [15] Gaudreault M., Drolet F., Viñals J. Bifurcation threshold of the delayed van der Pol oscillator under stochastic modulation, *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 5, 056214, 7 pp.
- [16] Sah S., Belhaq M. Effect of vertical high-frequency parametric excitation on self-excited motion in a delayed van der Pol oscillator, *Chaos Solitons Fractals*, 2006, vol. 37, no. 5, pp. 1489–1496.
- [17] Janson N. B., Balanov A. G., Schöll E. Delayed feedback as a means of control of noise-induced motion, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 1, 010601, 4 pp.
- [18] Maccari A. The response of a parametrically excited van der Pol oscillator to a time delay state feedback, *Nonlinear Dynam.*, 2001, vol. 26, no. 2, pp. 105–119.
- [19] Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL, *ACM Trans. Math. Software*, 2002, vol. 28, no. 1, pp. 1–21.
- [20] Gorelik G. S. To the theory of lagging feedback, *Zh. Tekh. Fiz.*, 1939, vol. 9, no. 5, pp. 450–454 (Russian).
- [21] Neimark Ju. I. D-subdivision and spaces of quasi-polynomials, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1949, vol. 13, no. 4, pp. 349–380 (Russian).
- [22] Kats V. A. Appearance of chaos and its evolution in a distributed oscillator with delay (experiment), *Radiophys. Quantum El.*, 1985, vol. 28, no. 2, pp. 107–119; see also: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika*, 1985, vol. 28, no. 2, pp. 161–176.
- [23] Kats V. A., Kuznetsov S. P. Transition to multimode chaos in a simple model of an oscillator with delay, *Sov. Tech. Phys. Lett.*, 1987, vol. 13, pp. 302–307; see also: *Pisma Zh. Tekh. Fiz.*, 1987, vol. 13, no. 12, pp. 727–733.
- [24] Ryskin N. M., Shigaev A. M. Complex dynamics of a simple distributed self-oscillatory model system with delay, *Tech. Phys.*, 2002, vol. 47, no. 7, pp. 795–802; see also: *Zh. Tekh. Fiz.*, 2002, vol. 72, no. 7, pp. 1–8.
- [25] Farmer J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system, *Phys. D*, 1981/82, vol. 4, no. 3, pp. 366–393.
- [26] Balyakin A. A., Ryskin N. M. Peculiarities of calculation of the Lyapunov exponents set in distributed self-oscillated systems with delayed feedback, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinam.*, 2007, vol. 15, no. 6, pp. 3–21 (Russian).
- [27] Kashchenko I. S. Local dynamics of equations with large delay, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 12, pp. 2172–2181; see also: *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2008, vol. 48, no. 12, pp. 2141–2150.
- [28] Glazkov D. V., Kashchenko S. A. Local dynamics of DDE with large delay in the vicinity of the self-similar cycle, *Model. Anal. Inform. Sist.*, 2010, vol. 17, no. 3, pp. 38–47 (Russian).

Bifurcational mechanism of formation of developed multistability in a van der Pol oscillator with time-delayed feedbackMaksim I. Balakin¹, Nikita M. Ryskin²¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
ul. Politechnicheskaya 77, Saratov, 410054, Russia²National Research Saratov State University
ul. Astrakhanskaya 83, Saratov, 410012, Russia¹balakinmaxim@gmail.com, ²ryskinm@gmail.com

The mechanism of formation of multistability in a van der Pol generator with time-delayed feedback is studied. It is found that the developed multistability is formed through a sequence of two types of bifurcations: supercritical Andronov – Hopf bifurcation and subcritical Neimark – Sacker bifurcation. With variation of the control parameters, the fixed point repeatedly undergoes supercritical Andronov – Hopf bifurcation, which leads to an increase in the number of saddle cycles. The limit cycles acquire stability after a number of subcritical Neimark – Sacker bifurcations. The dynamics of the system is studied in a wide range of control parameters values.

MSC 2010: 37M20

Keywords: time delay, bifurcations, multistability

Received March 18, 2017, accepted April 10, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 151–164 (Russian)