ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.925

MSC 2010: 70E17, 37E45

Случай Гесса – Аппельрота и квантование числа вращения*

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе рассмотрен случай Гесса в уравнениях Эйлера – Пуассона, а также его обобщение на пучке скобок Пуассона. Показано, что в этом случае задача сводится к исследованию векторного поля на торе. При этом график зависимости числа вращения от параметров имеет горизонтальные участки (предельные циклы) только при целых значениях числа вращения. Кроме того, указан пример гамильтоновой системы, которая обладает инвариантным подмногообразием (аналогичным случаю Гесса), но на котором зависимость числа вращения от параметров представляет собой канторову лестницу.

Ключевые слова: инвариантное подмногообразие, число вращения, канторова лестница, предельные циклы

*Перевод статьи “The Hess–Appelrot Case and Quantization of the Rotation Number”, опубликованной в журнале *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 180–196.

Получено 02 февраля 2017 года

После доработки 06 марта 2017 года

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-50-00005.

Бизяев Иван Алексеевич

bizaev_90@mail.ru

Мамаев Иван Сергеевич

mamaev@rcd.ru

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Введение

Данная статья является в определенной степени продолжением нашей недавней работы [8], в которой был указан изоморфизм между классическим случаем Гесса¹ в уравнениях Эйлера – Пуассона и частным случаем неголономной задачи Суслова. Мы не будем подробно останавливаться на историческом обзоре исследований, посвященных случаю Гесса (с ним можно ознакомиться, например, в [8]), а сразу перейдем к описанию основных результатов.

В данной работе построена бифуркационная диаграмма для случая Гесса и показано, что неособая поверхность уровня первых интегралов является двумерным тором. Векторное поле на торе в случае Гесса не допускает инвариантную меру с плотностью, гладко зависящей от фазовых переменных. Для таких систем, как правило, график зависимости числа вращения от параметров представляет собой канторову лестницу (см., например, [7]), рациональным значениям которой соответствуют горизонтальные участки, где имеется один или несколько предельных циклов (см. подробнее [18]). Подобная ситуация встречается также в неголономной механике [1, 2]. Однако оказалось, что канторовой лестницы в случае Гесса не существует. Это связано с тем, что в этом случае система на торе с помощью центральной проекции сводится к линейной гамильтоновой системе с периодическими коэффициентами, причем предельные циклы (горизонтальные участки) могут возникать только при целых значениях числа вращения $\nu = n \in \mathbb{Z}$.

Аналогичная система на торе встречается при объяснении эффекта Джозефсона в физике сверхпроводников [11, 12, 14] и динамике связанных осцилляторов [4]. В работах [11, 12, 14] указанное свойство принято называть эффектом *квантования числа вращения*. В некоторых работах (см., например, [4]) при доказательстве используется сведение к вещественному уравнению Риккати [5] с периодическими коэффициентами, для которого отображение Пуанкаре за период является дробно-линейным. Для случая Гесса такое сведение используется в работе [6].

Оказалось, что число вращения в случае Гесса в уравнениях Эйлера – Пуассона не превосходит единицы, поэтому наблюдается только один горизонтальный участок, соответствующий $\nu = 0$. Тем не менее, случай Гесса допускает обобщение, для которого число вращения может быть сколь угодно большим, а предельные циклы по-прежнему встречаются только при целых значениях числа вращения. Различные обобщения случая Гесса обсуждаются также в работе [9].

В заключение приведен пример гамильтоновой системы, которая обладает инвариантным подмногообразием, аналогичным случаю Гесса, но на котором зависимость числа вращения от параметров представляет собой канторову лестницу.

1. Уравнения движения и законы сохранения

Уравнения Эйлера – Пуассона, описывающие движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в системе координат, связанной с телом, представим в векторной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \\ H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{I}^{-1} \mathbf{M}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹В современных работах классический случай Гесса называется системой Гесса – Апфельрота, хотя Г. Апфельрот не обнаружил этот случай из-за ошибок в вычислениях (см. подробнее [8]). В связи с этим мы используем ставшее традиционным название в заголовке статьи, в то время как в тексте придерживаемся классического названия — *случай Гесса*.

где γ — единичный вектор, направленный вдоль поля тяжести, $\mathbf{M}$ — кинетический момент, $\mathbf{I}$ и m — тензор инерции и масса тела соответственно, g — ускорение свободного падения.

Уравнения (1.1), кроме энергии E , допускают интеграл площадей и геометрический интеграл вида

$$F_1 = (\mathbf{M}, \gamma), \quad \gamma^2 = 1.$$

Условия, которым удовлетворяют параметры системы (1.1), в случае Гесса наиболее естественным образом описываются при помощи *гирационного эллипсоида* — поверхности уровня кинетической энергии в пространстве моментов $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$:

$$(\mathbf{M}, \mathbf{I}^{-1} \mathbf{M}) = \text{const}. \quad (1.2)$$

- 1°. Все полуоси эллипсоида (1.2) различны (главные моменты инерции тела не совпадают [20]).
- 2°. Центр масс тела $\mathbf{r}$ лежит на перпендикуляре к круговому сечению гириационного эллипсоида (см. рис. 1) [19].

Рис. 1. Гириационный эллипсоид и расположение центра масс для случая Гесса.

Определим подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что $Ox_3 \parallel \mathbf{r}$, а оси Ox_1 и Ox_2 направим так, чтобы тензор инерции $\mathbf{I}$ тела имел вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ 0 & I_{22} & 0 \\ I_{13} & 0 & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Вследствие того, что в данной системе координат сечение гириационного эллипсоида (1.2) плоскостью $M_3 = 0$ является окружностью, выполнено соотношение $(\mathbf{I}^{-1})_{11} = (\mathbf{I}^{-1})_{22}$, откуда получим условие

$$I_{11} = I_{22} + \frac{I_{13}^2}{I_{33}}. \quad (1.3)$$

Кроме того, в этом случае для твердого тела справедливо следующее неравенство [16, с. 149]:

$$-I_{33} < I_{13} < I_{33}. \quad (1.4)$$

Отметим, что $Ox_1x_2x_3$ не является главной системой координат для твердого тела ($I_{13} \neq 0$). Тем не менее, выбранная система координат позволяет наиболее наглядно указать аналогию между случаями Гесса и Лагранжа, обусловленную наличием циклической переменной.

Предложение 1. В случае Гесса система (1.1) обладает инвариантным многообразием

$$M_3 = 0. \quad (1.5)$$

В работах [13, 15] случай Гесса при малом весе mg рассматривался как возмущение интегрируемого случая Эйлера; при этом обнаружено, что система (1.1) неинтегрируема, а инвариантное подмногообразие (1.5) оказывается парой нерасщепившихся сепаратрис. В книге [10] (см. также [8]) отмечено, что в этом случае многообразие (1.5) разделяет два различных стохастических слоя (см. рис. 2).

Рис. 2. Отображение Пуанкаре из работы [8] в переменных Андуайе $(L/G, l)$ для случая Гесса. Графики построены при одинаковых значениях параметров. Здесь хорошо видны два стохастических слоя, разделенных сдвоенной сепаратрисой Гесса: точки из одного слоя не проникают в другой.

Уменьшим число параметров за счет перехода к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\rightarrow \mu_0 \mathbf{M}, & t &\rightarrow \tau_0 t, \\ \mu_0 &= g^{1/2} m^{1/4} I_{22}^{3/4}, & \tau_0 &= \frac{I_{22}^{1/4}}{g^{1/2} m^{1/4}}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения движения (1.3) на инвариантном соотношении Гесса имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= -a M_1 M_2 - b \gamma_2, & \dot{M}_2 &= a M_1^2 + b \gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -a M_1 \gamma_2 - M_2 \gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= a M_1 \gamma_1 + M_1 \gamma_3, & \dot{\gamma}_3 &= M_2 \gamma_1 - M_1 \gamma_2, \\ a &= \frac{I_{13}}{I_{33}}, & b^2 &= \frac{m r_3^2}{I_{22}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Заметим, что система (1.6) обладает двумя преобразованиями Σ_1 и Σ_2 , сохраняющими форму уравнений:

$$\begin{aligned} \Sigma_1: & \quad M_2 \rightarrow -M_2, \quad \gamma_1 \rightarrow -\gamma_1, \quad a \rightarrow -a, \\ \Sigma_2: & \quad M_1 \rightarrow -M_1, \quad \gamma_1 \rightarrow -\gamma_1, \quad \gamma_3 \rightarrow -\gamma_3, \quad b \rightarrow -b. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.4) получаем следующее:

без ограничения общности в системе (1.6) можно полагать $a \in [0, 1)$ и $b \in [0, \infty)$.

Интегралы энергии, площадей и геометрический представим в виде

$$E = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) - b\gamma_3, \quad F_1 = M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2, \quad \gamma^2 = 1. \quad (1.7)$$

Таким образом, интегральное подмногообразие общего положения системы (1.6) является двумерным и, как будет показано ниже, оно оказывается двумерным тором $\mathbb{T}^2$.

Отметим, что, помимо первых интегралов (1.7), система (1.6) обладает также обобщенным полем симметрии (см. [3])

$$\mathbf{u} = -M_2 \frac{\partial}{\partial M_1} + M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2},$$

которое удовлетворяет уравнению

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = aM_1 \mathbf{u},$$

где $\mathbf{v}$ — векторное поле системы (1.6).

Для системы (1.6) инвариантная мера найдена лишь в следующих частных случаях:

- в отсутствие поля тяжести ($b = 0$) существует инвариантная мера с сингулярной плотностью $\rho = M_2^{-1}$,
- в случае $a = 0$ существует инвариантная мера с постоянной плотностью $\rho = \text{const}$.

Инвариантное подмногообразие (1.5) существует изолированно в фазовом пространстве гамильтоновой системы, в отличие от случая интегрируемых гамильтоновых систем, для которых инвариантные подмногообразия являются поверхностью уровня первых интегралов и образуют семейства (целиком заполняющие некоторые области фазового пространства). Следовательно, невозможно ограничить исходную стандартную инвариантную меру системы (1.1), и это приводит, в частности, к тому, что, как показано ниже, инвариантные торы системы (1.6) могут содержать предельные циклы.

2. Бифуркационная диаграмма

Рассмотрим вопрос об условиях вырождения интегралов (1.7). Для этого заметим, что они в точности совпадают с интегралами волчка Лагранжа при $M_3 = 0$ [10], поэтому для анализа воспользуемся теми же переменными, что и в динамике твердого тела.

На совместном уровне геометрического интеграла $\gamma^2 = 1$ и интеграла площадей $F_1 = p_\psi$ выберем новые переменные:

$$M_1 = p_\psi \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} + p_\theta \cos \varphi, \quad M_2 = p_\psi \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} - p_\theta \sin \varphi, \\ \gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta,$$

где $\varphi \bmod 2\pi$ — угол собственного вращения, а $\theta \in (0, \pi)$ — угол нутации. В результате уравнения движения примут вид

$$\dot{\theta} = p_\theta, \quad \dot{p}_\theta = p_\psi^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - b \sin \theta, \\ \dot{\varphi} = -p_\psi \frac{a \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta}{\sin^2 \theta} - a p_\theta \cos \varphi. \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видим, уравнения для переменных (θ, p_θ) отделяются и совпадают с уравнениями движения сферического маятника [19].

Их единственный интеграл

$$E = \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{p_\psi^2}{2\sin^2 \theta} - b \cos \theta.$$

Условия вырождения при этом запишутся в форме

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = -p_\psi^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} + b \sin \theta = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial p_\theta} = p_\theta = 0.$$

Отсюда получим известный в динамике твердого тела результат.

Предложение 2. Первые интегралы становятся зависимыми, если значения $E = h$, $F_1 = p_\psi$ на плоскости (p_ψ, h) соответствуют

— либо точкам кривых, задаваемых уравнениями

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= \left\{ p_\psi(\theta_c) = \frac{\sqrt{b} \sin^2 \theta_c}{\sqrt{\cos \theta_c}}, \quad h(\theta_c) = \frac{b(1 - 3 \cos^2 \theta_c)}{2 \cos \theta_c} \right\}, \quad \theta_c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \gamma_- &= \left\{ p_\psi(\theta_c) = -\frac{\sqrt{b} \sin^2 \theta_c}{\sqrt{\cos \theta_c}}, \quad h(\theta_c) = \frac{b(1 - 3 \cos^2 \theta_c)}{2 \cos \theta_c} \right\}, \quad \theta_c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

— либо точкам

$$\pi_+ = \{p_\psi = 0, h = b\} \quad \text{и} \quad \pi_- = \{p_\psi = 0, h = -b\}. \quad (2.3)$$

На плоскости значений первых интегралов (p_ψ, h) кривые γ_+ , γ_- и точки π_+ , π_- образуют бифуркационную диаграмму интегрального отображения системы (1.6). Отметим на ней также область возможных значений интегралов (см. рис. 3); теперь эта диаграмма дает полную картину перестроек интегрального многообразия системы.

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма (серым выделена область возможных значений первых интегралов) и точка $(p_\psi^{(a)}, h^{(a)})$.

Если точка (p_ψ, h) лежит на одной из кривых γ_+, γ_- , то инвариантное подмногообразие, задаваемое интегралами (1.7), является окружностью. При этом, согласно (2.1), $\dot{\theta} = 0$, $\dot{p}_\theta = 0$, а эволюция угла φ описывается уравнением

$$\dot{\varphi} = \mp \frac{a\sqrt{b} \sin \theta_c}{\sqrt{\cos \theta_c}} \sin \varphi \mp \sqrt{b \cos \theta_c}, \quad (2.4)$$

где верхний знак соответствует кривой γ_+ , а нижний — кривой γ_- .

Уравнение (2.4) описывает два возможных типа поведения угла φ :

- 1) $|\operatorname{tg} \theta_c| > a$, тогда $\dot{\varphi}$ нигде не меняет знак и угол φ монотонно увеличивается для γ_- и уменьшается для γ_+ ,
- 2) $|\operatorname{tg} \theta_c| < a$, тогда на окружности возникает два положения равновесия, одно из которых неустойчивое, а второе — асимптотически устойчивое.

Смена этих режимов на кривых γ_+, γ_- происходит в точках $(p_\psi^{(a)}, h^{(a)})$ и $(-p_\psi^{(a)}, h^{(a)})$ соответственно, где

$$p_\psi^{(a)} = \frac{b^{1/2}}{a^{1/2}(1+a^2)^{3/4}}, \quad h^{(a)} = \frac{b(1-2a^2)}{2a(1+a^2)^{1/2}}.$$

Так, если $h < h^{(a)}$, то на окружности нет состояний равновесия, в противном случае состояния равновесия существуют.

ЗАМЕЧАНИЕ. Бифуркационная диаграмма не зависит от параметра a , в то время как положение точки $(p_\psi^{(a)}, h^{(a)})$ зависит, причем если $a \rightarrow \infty$, то $h^{(a)} \rightarrow -b$, то есть на всех точках кривых γ_+, γ_- уравнение (2.4) обладает состояниями равновесия.

Можно показать, что для тех значений первых интегралов p_ψ и h , которые удовлетворяют (2.2) или (2.3), система (1.6) не имеет неподвижных точек. Следовательно, для всех возможных значений первых интегралов p_ψ, h , которые не соответствуют точкам, лежащим на кривых γ_+, γ_- , и точкам π_+, π_- , поверхность уровня первых интегралов диффеоморфна двумерному тору $\mathbb{T}^2$.

3. Нулевая константа площадей

Рассмотрим отдельно случай Гесса при нулевом значении интеграла площадей $F_1 = p_\psi = 0$. При этом решение записывается в квадратурах. Уравнения движения (2.1) и интеграл энергии на нулевом значении интеграла площадей имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p_\theta, \quad \dot{p}_\theta = -b \sin \theta, \quad \dot{\varphi} = -ap_\theta \cos \varphi, \\ E &= \frac{1}{2}p_\theta^2 - b \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Система (3.1) обладает инвариантной мерой с плотностью

$$\rho = \frac{1}{\cos \varphi},$$

которая имеет особенность при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, соответствующих ее частным периодическим решениям (3.1).

Рис. 4. Проекция траекторий системы на плоскость (θ, p_θ) .

Уравнения для (θ, p_θ) отделяются, траектории на этой плоскости приведены на рисунке 4. Явная зависимость $\theta(t)$ на фиксированном уровне энергии $E = h$ дается квадратурой

$$\dot{\theta}^2 = 2(h + b \cos \theta).$$

Мы видим, что выделяется два случая:

- 1) $-b < h < b$, при этом все траектории проходят через полюс $\theta = 0$ и достигают точки поворота θ_* , задаваемой уравнением (см. рис. 4)

$$h + b \cos \theta_* = 0,$$

- 2) $b < h$, при этом все траектории проходят через оба полюса сферы Пуассона, $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

В обоих случаях форма траекторий одна и та же, она не зависит от величины h и, согласно (3.1), задается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -a \cos \varphi.$$

Это уравнение имеет явное решение, так что проекции траекторий на сферу Пуассона при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ и $\varphi \neq \frac{3\pi}{2}$ задаются соотношением

$$\frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = C e^{-a\theta}, \quad (3.2)$$

где C — постоянная интегрирования, параметризующая различные траектории.

Поскольку определение угловых координат θ, φ имеет особенность $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, уравнение (3.2) определяет лишь участок траекторий системы между полюсами сферы Пуассона. С другой стороны, при $h = \pm b$ система (1.6) не имеет особенностей в точках $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = \pm 1$, поэтому проекция траектории гладко продолжается через оба полюса, и при этом

угол φ изменяется на величину, равную π , а $\dot{\theta}$ меняет знак. Следовательно, в каждом из полюсов склеиваются два участка траектории, задаваемые уравнением (3.2) с различными константами C_1 и C_2 , так что если $\theta = 0$, то они удовлетворяют соотношению

$$C_1 C_2 = -1, \quad (3.3)$$

а если $\theta = \pi$, то

$$e^{2a\pi} C_1 C_2 = -1. \quad (3.4)$$

Как было сказано выше, при $-b < h < b$ область возможных движений на сфере Пуассона ограничена неравенством $0 < \theta < \theta_*$. В этом случае движение происходит вдоль участка траектории, заданной уравнением (3.2) при некотором $C = C_1$; при достижении точки поворота $\theta = \theta_*$ происходит остановка и точка возвращается вдоль той же траектории, пока не достигнет полюса $\theta = 0$. Согласно (3.3), после прохождения полюса движение продолжается вдоль участка траектории, заданного тем же уравнением (3.2) при $C = -C_1^{-1}$, вплоть до $\theta = \theta_*$, где происходит разворот (см. рис. 5а). Отсюда следует, что движение системы (1.6) является периодическим с периодом

$$T = 4 \int_0^{\theta_*} \frac{d\theta}{\sqrt{2(h + b \cos \theta)}}.$$

Таким образом, инвариантные торы $\mathbb{T}^2$, заданные соотношениями (1.7), в этом случае расслоены на периодические траектории.

Рис. 5. Траектории на сфере Пуассона.

При $b < h$ ситуация иная: во-первых, при каждом $h = \text{const}$ в фазовом пространстве системы (1.6) имеется пара периодических траекторий $\mathcal{C}_h^{(-)}$ и $\mathcal{C}_h^{(+)}$, которые проецируются на сфере Пуассона в выделенную траекторию, состоящую из двух меридианов $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, направления ее обхода различаются для $\mathcal{C}_h^{(-)}$ и $\mathcal{C}_h^{(+)}$. Остальные траектории на торе $\mathbb{T}^2$ асимптотически приближаются к $\mathcal{C}_h^{(+)}$ при $t \rightarrow +\infty$ и к $\mathcal{C}_h^{(-)}$ при $t \rightarrow -\infty$, они проецируются

на сферу Пуассона в участки траекторий (3.2), для которых константа C меняется при прохождении через полюсы согласно правилам (3.3), (3.4) (см. рис. 5а). Если обозначить последовательность констант (3.2) на этих участках $C = C_m$, $m = 0, 1, \dots$, то при $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$C_{2m} = C_0(e^{-2a\pi})^m, \quad C_{2m+1} = C_0^{-1}(e^{2a\pi})^m.$$

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 3. Для системы (1.6) при нулевой постоянной площадей инвариантные торы $\mathbb{T}^2$, заданные соотношениями (1.7),

- 1) при $-b < h < b$ расслоены на периодические траектории,
- 2) при $b < h$ содержат пару периодических решений (циклов) — устойчивое и неустойчивое, все остальные решения стремятся к устойчивому циклу при $t \rightarrow +\infty$ и к неустойчивому при $t \rightarrow -\infty$.

4. Число вращения и предельные циклы

Как было сказано выше (см. раздел 2), если значения первых интегралов не удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3), их совместная поверхность уровня диффеоморфна двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Для анализа потока на этих торах параметризуем их с помощью подходящих угловых координат. Воспользуемся для этого известными переменными Андуайе (G, g, l) , которые на уровне интеграла площадей $F_1 = p_\psi$ задаются следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} M_1 &= G \sin l, \quad M_2 = -G \cos l, \\ \gamma_1 &= \frac{p_\psi}{G} \sin l + \sqrt{1 - \frac{p_\psi^2}{G^2} \sin g \cos l}, \quad \gamma_2 = -\frac{p_\psi}{G} \cos l + \sqrt{1 - \frac{p_\psi^2}{G^2} \sin g \sin l}, \\ \gamma_3 &= -\sqrt{1 - \frac{p_\psi^2}{G^2} \cos g}. \end{aligned}$$

Интеграл энергии E в новых переменных имеет вид

$$E = \frac{G^2}{2} - b \sqrt{1 - \frac{p_\psi^2}{G^2} \cos g}.$$

Зафиксируем уровень энергии $E = h$ и исключим переменную g ; окончательно получим уравнения движения (1.6) в форме

$$\begin{aligned} \dot{G}^2 &= R(G), \quad \dot{l} = aG \sin l + \frac{b}{G^2} p_\psi, \\ R(G) &= b^2 \left(1 - \frac{p_\psi^2}{G^2} \right) - \frac{1}{4} (G^2 - 2h)^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $l \bmod 2\pi$, а $G \in [G_1, G_2]$, где G_1 и G_2 — положительные решения уравнения $R(G) = 0$, которые всегда существуют для p_ψ и h , принадлежащих области возможных движений.

В системе (4.1) отделяется уравнение для G , его решение выражается через эллиптическую функцию Якоби:

$$\begin{aligned} G(t) &= 2\omega\sqrt{c - k^2\operatorname{sn}^2(\omega t, k)}, \\ h &= \omega^2(3c - 1 + k^2), \quad p_\psi^2 = \frac{16c\omega^6}{b^2}(1 - c)(c - k^2), \\ b^2 &= \omega^4\left((c + (1 + k)^2)(c + (1 - k)^2) - 4c^2\right). \end{aligned}$$

Подставив функцию $G(t)$ во второе уравнение (4.1) и исключив параметр ω , за счет замены времени $t \rightarrow \omega^{-1}t$ получим

$$\frac{dl}{dt} = 2\alpha(t) + 2\beta(t)\sin l, \quad (4.2)$$

где функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются периодическими по времени (с периодом T) и в данном случае представляются в форме

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{\sqrt{c(1-c)(c-k^2)}}{2(c-k^2\operatorname{sn}^2(t, k))}, \quad \beta(t) = a\sqrt{c-k^2\operatorname{sn}^2(t, k)}, \\ T &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \quad k \in (0, 1), \quad c \in (k^2, 1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию уравнения (4.2), которое описывает векторное поле на торе $\mathbb{T}^2 = \{(t, l), t \bmod T, l \bmod 2\pi\}$.

Напомним, что для потока на торе существует инвариант — число вращения, которое в данном случае может быть вычислено по формуле

$$\nu = T \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(t)}{2\pi t}.$$

Как известно (см., например, [7]), в общем случае график зависимости числа вращения от параметров представляет собой канторову лестницу: рациональным числам вращения соответствуют горизонтальные участки, при этом на торах имеется один или несколько предельных циклов (см. подробнее [18]). Одним из исключений является случай, когда векторное поле на семействе торов допускает гладко зависящую от параметров инвариантную меру, при этом число вращения ν является гладкой функцией от параметров.

График зависимости числа вращения ν системы (4.2) от c (построенный численно) приведен на рисунке 6. Он состоит из двух участков: на участке $(c_{\min}, c_*)$ число вращения ν гладко зависит от c , а на участке $(c_*, 1)$ имеем горизонтальный участок $\nu \equiv 0$. Таким образом, мы видим, что, хотя в системе (4.2) встречаются торы с предельными циклами, она не является системой общего положения (так как отсутствует канторова лестница). Рассмотрим, в чем состоит объяснение такого поведения числа вращения.

Сначала покажем, что горизонтальному участку соответствует тор с двумя предельными циклами; для этого воспользуемся сечением Пуанкаре, которое определяет отображение окружности на себя:

$$\Theta(l) : S^1 \rightarrow S^1. \quad (4.4)$$

На рисунке 7 приведена первая итерация этого отображения при $c \in (c_*, 1)$. Мы видим, что ее график пересекает диагональ (квадрата), точкам пересечения соответствуют периодические решения (4.2); в данном случае встречаются два предельных цикла.

Рис. 6. График зависимости числа вращения ν от c при фиксированных $a = 0.25$, $k = 0.2$.

Рис. 7. Первая итерация отображения $\Theta(l)$ и диагональ квадрата для значений $a = 0.25$, $k = 0.2$, $c = 0.9$.

Более того, оказывается, что в уравнении (4.2) с произвольными периодическими функциями $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ может встречаться не более двух предельных циклов и при их наличии число вращения принимает только целое значение. Это связано со следующим свойством системы (4.2).

Предложение 4. *Общее решение уравнения (4.2) выражается через решения линейной гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} (\alpha(t)x^2 + 2\beta(t)xy + \alpha(t)y^2), \\ l(t) &= 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} + \pi N_T \right), \quad N_T \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где N_T — количество полных полуоборотов (поворотов на угол π) за период T вокруг начала координат вектора $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$, при повороте против часовой стрелки $N_T > 0$, при повороте по часовой стрелке $N_T < 0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение для половинного угла $\phi = \frac{l}{2}$, которое перепишем в форме

$$\dot{\phi} = \alpha(t)(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + 2\beta(t) \sin \phi \cos \phi.$$

Методом Лиувилля удвоения числа переменных достроим его до гамильтоновой системы:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, \quad \dot{r} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi},$$

$$\mathcal{H} = r(\alpha(t)(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + 2\beta(t) \sin \phi \cos \phi).$$

После канонической замены переменных $(r, \phi) \rightarrow (x, y)$ вида

$$x = \sqrt{2r} \cos \phi, \quad y = \sqrt{2r} \sin \phi$$

получим (4.5). ■

С геометрической точки зрения, решение уравнения (4.2) получается при помощи *центральной проекции* траектории $\mathbf{r}(t)$ линейной системы (4.5) на единичную окружность (с последующим удвоением получившегося угла).

Напомним, что общее решение линейной системы $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ может быть выражено через фундаментальную матрицу $\mathbf{S}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{C},$$

где $\mathbf{C} = (C_1, C_2) = \mathbf{r}(0)$ — некоторый постоянный вектор. Матрица $\mathbf{S}(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & -\beta(t) \\ \beta(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{E},$$

причем вследствие гамильтоновости системы $\det \mathbf{S}(t) \equiv 1$, то есть $\mathbf{S}$ является элементом группы $SL(2)$.

Пусть $t = nT + \Delta t$, $\Delta t \in [0, T)$, тогда вследствие периодичности коэффициентов α, β выполняется соотношение

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(\Delta t)\mathbf{P}^n,$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{S}(T) \in SL(2)$ — постоянная матрица, которая называется матрицей монодромии. При этом первая итерация отображения Пуанкаре (4.4) имеет вид

$$\Theta^{(1)}(l) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{P_{11} \operatorname{tg} \frac{l}{2} + P_{12}}{P_{21} \operatorname{tg} \frac{l}{2} + P_{22}} \right) + 2\pi N_T. \quad (4.6)$$

Всякое линейное преобразование

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{r}}, \quad \det \mathbf{Q} = 1$$

сохраняет каноническую форму гамильтоновой системы (4.5), поэтому фундаментальная матрица $\mathbf{S}(t)$ и матрица монодромии $\mathbf{P}$ определены с точностью до преобразования подобия

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}, \quad \det \mathbf{Q} = 1.$$

Как известно, относительно данных преобразований группа $SL(2)$ разбивается на три непересекающиеся орбиты; в зависимости от принадлежности матрицы монодромии $\mathbf{P}$ этим орбитам, поведение системы (4.2) качественно различается.

- 1) $|\operatorname{Tr} \mathbf{P}| > 2$, и тогда вещественным преобразованием $\mathbf{Q}$ матрица $\mathbf{P}$ приводится к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1,$$

при этом собственным векторам матрицы $\mathbf{P}$ в системе на торе (4.2) соответствует два предельных цикла, один из которых устойчивый, а другой — неустойчивый. Число вращения ν оказывается целым. Оно равно числу полуоборотов, совершаемых собственным вектором матрицы $\mathbf{P}$ за период T .

- 2) $|\operatorname{Tr} \mathbf{P}| = 2$, матрица $\mathbf{P}$ приводится к форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем на торе существует один неустойчивый предельный цикл, а остальные траектории асимптотически стремятся к одной его стороне при $t \rightarrow +\infty$ и к другой его стороне при $t \rightarrow -\infty$. Число вращения также целое и равно числу полуоборотов за период T единственного собственного вектора матрицы $\mathbf{P}$. Этот случай соответствует бифуркации, в которой пара циклов сливается в один, исчезающий затем при уменьшении $|\operatorname{Tr} \mathbf{P}|$.

- 3) $|\operatorname{Tr} \mathbf{P}| < 2$, матрица монодромии приводится к ортогональной

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

следовательно, отображение Пуанкаре $\Theta(l)$ системы (4.2) сопряжено повороту на постоянный угол ϑ ; если ϑ рационально, то все траектории периодические, при иррациональном ϑ — квазипериодические. Число вращения

$$\nu = N_T + \frac{\vartheta}{2\pi},$$

где N_T — количество полных полуоборотов оси абсцисс. Кроме того, вследствие гладкой зависимости от параметров векторного поля линейной системы (4.5), угол ϑ и число вращения ν гладко зависят от параметров; этим и объясняется отсутствие канторовой лестницы на рисунке 6.

Таким образом, справедлива следующая теорема

Теорема 1. Пусть $\mathbf{P}$ — матрица монодромии линейной системы (4.5), соответствующей исходному уравнению (4.2), тогда

- 1) если $|\operatorname{Tr} \mathbf{P}| > 2$, то на торе имеется два предельных цикла, один из которых устойчивый, а второй — неустойчивый,
- 2) если $|\operatorname{Tr} \mathbf{P}| = 2$, то на торе присутствует один неустойчивый предельный цикл,
- 3) если $|\operatorname{Tr} \mathbf{P}| < 2$, то либо все траектории на торе периодические, либо квазипериодические.

Кроме того, численные исследования показывают, что когда в системе (4.2) коэффициенты задаются соотношениями (4.3), число вращения ν не превосходит единицы, поэтому единственный горизонтальный участок существует при $\nu = 0$. Это говорит о том, что ни одна траектория на торе $\mathbb{T}^2$ не совершает полного оборота по углу l за период T .

На рисунке 8 при различных фиксированных значениях a приведено разбиение области возможных значений параметров (c, k) и соответствующее разбиение области возможных значений интегралов (p_ψ, h) на бифуркационной диаграмме на зоны, в которых

- все траектории системы (4.2) периодические либо квазипериодические (светло-серая заливка),
- имеется два предельных цикла и все траектории стремятся от неустойчивого к устойчивому (темно-серая заливка).

Граница между областями соответствует случаю, когда система имеет один предельный цикл, при этом на бифуркационной диаграмме линии границы соединяются в точке $h = b$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых работах для анализа системы (4.2) используют связь с уравнением Риккати

$$\dot{z} = R_2(t)z^2 + R_1(t)z + R_0(t), \quad (4.7)$$

которому удовлетворяет функция $z = \operatorname{tg} \frac{l}{2}$. При этом коэффициенты $R_0(t) = \beta(t)$, $R_1(t) = 2\alpha(t)$, $R_2(t) = \beta(t)$ являются периодическими функциями времени. Отметим, что сведение случая Гесса к интегрированию уравнения Риккати впервые было указано П. А. Некрасовым [17].

Рис. 8. Области с двумя предельными циклами и без них на плоскости параметров (c, k) и на бифуркационной диаграмме в зависимости от a и при фиксированном значении $b = 1$.

5. Обобщение случая Гесса

5.1. Случай Гесса на пучке скобок и квантование числа вращения

Рассмотрим теперь обобщение гамильтоновой системы (1.1) на пучке скобок Пуассона, который определяется соотношениями

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = -x \varepsilon_{ijk} M_k, \quad (5.1)$$

где x — вещественный параметр. Функции Казимира этой скобки имеют вид

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = \gamma^2 + x \mathbf{M}^2.$$

Уравнения движения представим в векторной форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + x \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}. \quad (5.2)$$

Общая форма гамильтониана, квадратичного по $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$, при котором уравнения (5.2) обладают инвариантным многообразием $M_3 = 0$, имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu\gamma_3 + \kappa M_3,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_1, b_3), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_1, c_3).$$

Для различных значений параметра x справедливо:

- при $x = 0$ соотношения (5.1) задают алгебру $e(3)$, а система (5.2) сводится к уравнениям Кирхгофа, описывающим динамику твердого тела в идеальной жидкости,
- при $x = 1$ соотношения (5.1) задают алгебру $so(4)$, а система (5.2) сводится к уравнениям Пуанкаре–Жуковского, описывающим динамику твердого тела с полостями, заполненными жидкостью,
- при $x = -1$ соотношения (5.1) задают алгебру $so(3, 1)$, а система (5.2) описывает движение твердого тела в пространстве Лобачевского.

Для того чтобы на инвариантном многообразии $M_3 = 0$ привести систему к стандартному форм, аналогичной (4.2), воспользуемся обобщением переменных Андуайе, указанным в [10].

Положим $M_3 = 0$ и зафиксируем уровень функций Казимира:

$$F_1 = p_\psi, \quad F_2 = s;$$

определим переменные (G, g, l) следующим образом:

$$M_1 = G \sin l, \quad M_2 = G \cos l,$$

$$\gamma_1 = \frac{p_\psi}{G} \sin l - \delta_x \sin g \cos l, \quad \gamma_2 = \frac{p_\psi}{G} \cos l + \delta_x \sin g \sin l, \quad \gamma_3 = -\delta_x \cos g, \quad (5.3)$$

$$\delta_x = \sqrt{s - xG^2 - \frac{p_\psi^2}{G^2}},$$

где $(l, g) \bmod 2\pi$. Уравнения движения для переменных (G, g) отделяются и имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{G} &= \frac{\partial H}{\partial g}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial H}{\partial G}, \\ H &= \frac{1}{2}(a_{11} - xc_1)G^2 + \frac{1}{2}(c_3 - c_1)\delta_x^2 \cos^2 g + \mu\delta_x \cos g.\end{aligned}\quad (5.4)$$

По найденным решениям $G(t)$ и $g(t)$ системы (5.4) для l уравнение представляется в форме (4.2):

$$\begin{aligned}\dot{l} &= \tilde{\alpha}(t) + \tilde{\beta}(t) \sin l, \\ \tilde{\alpha}(t) &= \delta_x \left(b_1 - b_3 - (c_3 - c_1) \frac{p_\psi}{G^2(t)} \right) \cos g(t) + \frac{\mu s}{G^2(t)} + \kappa, \quad \tilde{\beta}(t) = a_{13}G(t).\end{aligned}\quad (5.5)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию векторного поля на торе $\mathbb{T}^2$, на котором, как следует из предыдущего раздела, возможно не более двух предельных циклов и график числа вращения не может быть канторовой лестницей, а содержит горизонтальные участки, соответствующие лишь целым числам вращения.

Выше было отмечено, что в случае Гесса для уравнений Эйлера – Пуассона число вращения не превосходит единицы. Покажем, что в общем случае число вращения может быть сколь угодно большим и содержать сколь угодно много горизонтальных участков $\nu = n \in \mathbb{Z}$. Для этого будем рассматривать уравнения (5.2) при $x = 0$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + a_{33}M_3^2) + (\kappa + b\gamma_3 + aM_1)M_3.$$

В этом случае уравнение (5.5) представляется в форме

$$\begin{aligned}\dot{l} &= aG \sin l - \kappa_0 \cos(Gt) + \kappa, \\ G &= \text{const}, \quad \kappa_0 = b\sqrt{s - \frac{p_\psi^2}{G^2}}.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Характерная зависимость числа вращения ν от κ уравнения (5.6) приведена на рисунке 9, на котором хорошо заметны горизонтальные участки, соответствующие предельным циклам.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение, аналогичное (5.6), моделирует эффект Джозефсона в физике сверхпроводников, а также возникает в динамике связанных осцилляторов. В связи с этим оно рассмотрено в работах [4, 11, 12, 14], в которых также было показано, что в уравнении (4.2) предельные циклы (языки Арнольда) встречаются только при целых значениях числа вращения.

5.2. Кубическое возмущение и канторова лестница

В заключение рассмотрим гамильтонову систему, которая также обладает инвариантным многообразием $M_3 = 0$, но на нем зависимость числа вращения ν от одного из параметров системы представляет собой канторову лестницу. Положим $x = 0$ и добавим в гамильтониан кубическое по γ , M слагаемое:

$$\begin{aligned}\dot{M} &= M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial M}, \\ H &= \frac{1}{2}(M, M) + (\kappa + aM_1 + \varepsilon\gamma_1\gamma_2)M_3.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Рис. 9. График зависимости числа вращения ν от κ при фиксированных $a = 1$, $\kappa_0 = 1$, $G = 1$.

Воспользуемся переменными (5.3), полагая, что $s = 1$. В результате получим уравнения движения на инвариантном многообразии $M_3 = 0$ в виде

$$\begin{aligned} g &= -Gt, \quad G = \text{const}, \\ \dot{l} &= \kappa + aG \sin l + \frac{\varepsilon}{2} \lambda_1(t) \sin(2l) + \varepsilon \lambda_2(t) \cos(2l), \\ \lambda_1(t) &= 2 \frac{p_\psi^2}{G^2} - 1 + \left(1 - \frac{p_\psi^2}{G^2}\right) \cos^2(Gt), \quad \lambda_2(t) = p_\psi \sin(Gt) \sqrt{1 - \frac{p_\psi^2}{G^2}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

В данном случае в уравнение входит несколько гармоник по переменной l . Характерная зависимость числа вращения ν от κ уравнения (5.8) приведена на рисунке 10.

Рис. 10. (а) График зависимости числа вращения ν от κ при фиксированных $G = 1$, $p_\psi = 0.5$, $\varepsilon = 0.5$, $a = 0.5$. (б) Увеличенный фрагмент графика.

Выражаем благодарность Д. В. Трещеву, обратившему внимание авторов на работы [11, 12, 14].

Компьютерное моделирование проведено с помощью программного комплекса «Компьютерная динамика: Хаос» (<http://lab.ics.org.ru/lab/page/kompyuternaya-dinamika/>).

References

- [1] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: The absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.
- [2] Bizyaev I. A. Nonintegrability and obstructions to the Hamiltonianization of a nonholonomic Chaplygin top, *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 631–634; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2014, vol. 458, no. 4, pp. 398–401.
- [3] Borisov A. V., Mamaev I. S. Symmetries and reduction in nonholonomic mechanics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 553–604.
- [4] Engelbrecht J. R., Mirollo R. Structure of long-term average frequencies for Kuramoto oscillator systems, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, vol. 109, no. 3, 034103, 5 pp.
- [5] Lloyd N. G. The number of periodic solutions of the equation $\dot{z} = z^N + p_1(t)z^{N-1} + \dots + p_N(t)$, *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1973, vol. 27, no. 4, pp. 667–700.
- [6] Lubowiecki P., Żoładek H. The Hess–Appelrot system: 1. Invariant torus and its normal hyperbolicity, *J. Geom. Mech.*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 443–467.
- [7] Arnol'd V. I. Small denominators: 1. Mapping the circle onto itself, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1961, vol. 25, no. 1, pp. 21–86 (Russian).
- [8] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Hess – Appelrot system and its nonholonomic analogs, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 294, pp. 252–275; see also: *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 2016, vol. 294, pp. 268–292.
- [9] Borisov A. V., Mamayev I. S. The Hess case in rigid-body dynamics, *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 227–235; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 256–265.
- [10] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Dynamics of a rigid body: Hamiltonian methods, integrability, chaos*, 2nd ed., Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).
- [11] Bukhshtaber V. M., Karpov O. V., Tertychnyi S. I. The rotation number quantization effect, *Theoret. and Math. Phys.*, 2010, vol. 162, no. 2, pp. 211–221; see also: *Teoret. Mat. Fiz.*, 2010, vol. 162, no. 2, pp. 254–265.
- [12] Glutsyuk A. A., Kleptsyn V. A., Filimonov D. A., Schurov I. V. On the adjacency quantization in an equation modeling the Josephson effect, *Funct. Anal. Appl.*, 2014, vol. 48, no. 4, pp. 272–285; see also: *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 2014, vol. 48, no. 4, pp. 47–64.
- [13] Ziglin S. L. Splitting of separatrices, branching of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a solid body, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1982, no. 1, pp. 283–298; see also: *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1980, vol. 41, pp. 287–303.
- [14] Il'yashenko Yu. S., Ryzhov D. A., Filimonov D. A. Phase lock for equations describing a resistive model of a Josephson junction and their perturbations, *Funct. Anal. Appl.*, 2011, vol. 45, no. 3, pp. 192–203; see also: *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 2011, vol. 45, no. 3, pp. 41–54.
- [15] Kozlov V. V. Splitting of the separatrices in the perturbed Euler–Poincot problem, *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1976, vol. 31, no. 6, pp. 99–104 (Russian).
- [16] Markeev A. P. *Theoretical mechanics*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2007 (Russian).
- [17] Nekrassov P. A. Étude analytique d'un cas du mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe, *Mat. Sb.*, 1896, vol. 18, no. 2, pp. 161–274 (Russian).
- [18] Pliss V. A. *Nonlocal problems of the theory of oscillations*, New York: Acad. Press, 1966.

- [19] Zhukovsky N.E. Hess' loxodromic pendulum, in *Collected Works: Vol. 1*, Moscow: Gostekhizdat, 1937, pp. 332–348 (Russian).
- [20] Chaplygin S.A. Some cases of motion of a rigid body in a fluid: 1, 2, in *Collected Works: Vol. 1*, Moscow: Gostekhizdat, 1948, pp. 136–311 (Russian).

The Hess – Appelrot case and quantization of the rotation number

Ivan A. Bizyaev¹, Alexey V. Borisov², Ivan S. Mamaev³

^{1,2,3}Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
ul. Gubkina 8, Moscow, 119991 Russia

¹bizaev_90@mail.ru, ²borisov@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

This paper is concerned with the Hess case in the Euler–Poisson equations and with its generalization on the pencil of Poisson brackets. It is shown that in this case the problem reduces to investigating the vector field on a torus and that the graph showing the dependence of the rotation number on parameters has horizontal segments (limit cycles) only for integer values of the rotation number. In addition, an example of a Hamiltonian system is given which possesses an invariant submanifold (similar to the Hess case), but on which the dependence of the rotation number on parameters is a Cantor ladder.

MSC 2010: 70E17, 37E45

Keywords: invariant submanifold, rotation number, Cantor ladder, limit cycles

Received February 02, 2017, accepted March 06, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 433–452 (Russian)