ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70K05

Моделирование автоколебаний управляемого физического маятника с учетом зависимости момента трения от нормальной реакции в шарнире

О. Э. Васюкова, Л. А. Климина

В данной работе рассмотрена математическая модель управляемого физического маятника в предположении, что момент трения в шарнире имеет сухую и вязкую компоненты, при этом момент сухого трения зависит от величины нормальной реакции в шарнире. Управляющий момент в шарнире маятника выбран в виде функции, зависящей только от знака угловой скорости маятника. При помощи метода Понтрягина поиска периодических решений систем, близких к гамильтоновым, построен такой программный закон колебаний управляемого маятника, что тестовые режимы движения являются установившимися и орбитально устойчивыми. Тестовые режимы движения предлагается использовать для идентификации коэффициентов сухого и вязкого трения в шарнире. Построены бифуркационные диаграммы, описывающие зависимость амплитуд автоколебаний от коэффициента управляющего момента. Предложенный подход к идентификации параметров модели трения по амплитудам установившихся движений не требует наличия информации о траектории движения в каждый момент времени. Проведено численное моделирование движения системы, иллюстрирующее диапазон значений параметров системы, для которого предложенный в работе метод идентификации можно считать достаточно точным.

Ключевые слова: идентификация трения, система с малым параметром, установившиеся движения, управление, бифуркационные диаграммы

Получено 12 июля 2017 года
После доработки 09 октября 2017 года

Васюкова Ольга Эдуардовна
vasyukovaola@yandex.ru
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

Климина Любовь Александровна
klimina@imec.msu.ru
НИИ механики МГУ
119192, Россия, г. Москва, Мичуринский пр., д. 1

1. Введение

Как известно, точность позиционирования является одной из наиболее существенных характеристик робота-манипулятора. Трение в шарнирах робота может вносить коррективы в программное движение, поэтому идентификация трения в шарнире манипулятора является актуальной задачей.

Широкий обзор моделей трения и методов компенсации трения в различных механизмах представлен в работе [1]. Перечислим некоторые из имеющихся на данный момент методов идентификации трения в шарнире. Один из наиболее распространенных методов следующий: момент трения получают из уравнений движения системы, в предположении, что известна исчерпывающая информация об экспериментальной траектории движения звена (угол, угловая скорость и угловое ускорение как функции времени), известны инерционно-массовые характеристики системы, а управляющий момент, поданный на двигатель, известен как функция времени. В [6] можно увидеть применение такого метода, а также анализ экстремальной зависимости трения от угловой скорости. В [7] представлен подход к идентификации трения в различных типах шарниров, в том числе и цилиндрическом, основанный на применении законов изменения энергии; метод отличается от предложенного в [6] тем, что не предполагает использование точной информации о массе звеньев и моментов инерции звеньев манипулятора. Недостаток данных методов в том, что необходимо иметь сведения об угловой скорости и угловом ускорении звена в каждый момент времени. В [5] рассматривается еще один подход, цель которого состоит в том, чтобы получить набор пар «скорость – момент трения». При этом не используется информация о моменте инерции звена манипулятора: вместо этого измеряется угловая скорость звена робота предположительно в тот момент, когда угловое ускорение равно нулю, поэтому естественным недостатком данного подхода является то, что требуется крайне высокая точность измерений и данные об ускорении.

В данной работе предложен метод идентификации параметров модели трения в шарнире робота-манипулятора, имеющий ряд отличий и преимуществ по отношению к перечисленным выше методам. Для идентификации трения используются данные только о величинах, которые легко измерять (не требуется знать зависимость угла, угловой скорости, углового ускорения от времени, нужны только средние значения). Подобный подход применен в [2], где данные об амплитудах установившихся колебаний используются для решения задачи идентификации коэффициента демпфирования.

В настоящей работе в качестве тестовых режимов движения используются установившиеся, орбитально устойчивые режимы, что улучшает повторяемость экспериментов. На тестовых движениях мотор все время находится в активном режиме, что существенно, так как диссипативные силы в шарнире могут быть различны в зависимости от того, включен ли мотор. Предлагаемый подход позволяет идентифицировать параметры в режиме активного мотора.

Стратегия идентификации трения в шарнире маятника, предложенная в данной работе, основана на построении закона управления, реализующего колебания с постоянной амплитудой, и дальнейшем анализе свойств установившихся движений. Построение закона управления осуществляется с помощью применения метода Понтрягина поиска периодических движений систем, близких к гамильтоновым системам [9]. При построении математической модели предполагается, что модель трения в шарнире звена имеет сухую и вязкую компоненты и что момент сухого трения зависит от величины нормальной реакции в шарнире. Более простой случай, когда момент сухого трения не зависит от нормальной реакции в шарнире, рассмотрен в работе [10].

2. Постановка задачи

Рассмотрим одно из вращательных звеньев робота-манипулятора, такое, что ось вращения звена горизонтальна. Это звено будем моделировать как физический маятник, закрепленный в цилиндрическом шарнире O (рис. 1). Центр масс маятника расположен в точке P .

Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ между вертикалью и прямой OP . Будем считать, что в шарнире приложен управляющий момент $U(\varphi')$, зависящий от угловой скорости φ' маятника. На маятник также действует момент трения в шарнире $F(\varphi, \varphi')$.

Уравнение движения данной системы имеет вид

$$(J + mr^2)\varphi'' + gmr \sin \varphi = U(\varphi') + F(\varphi, \varphi'), \quad (2.1)$$

где m — масса маятника, r — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, J — момент инерции маятника относительно главной центральной оси инерции. Будем считать, что момент $F(\varphi, \varphi')$ трения в шарнире имеет сухую и вязкую компоненты:

$$F(\varphi, \varphi') = -b_1 N(\varphi, \varphi') \operatorname{sign} \varphi' - c_1 \varphi' = -b_1 m |g \cos \varphi + r \varphi'^2| \operatorname{sign} \varphi' - c_1 \varphi',$$

где b_1, c_1 — некоторые положительные константы, $N(\varphi, \varphi')$ — модуль силы нормальной реакции в шарнире.

Введем безразмерное время $\tau = \sqrt{g/rt}$. Производные переменной φ по τ обозначим $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$. Выберем управляющий момент в системе следующего вида:

$$U(\varphi') = U_1(\dot{\varphi}) = c_0 k \sqrt{g/r} \operatorname{sign} \dot{\varphi},$$

где k — неотрицательная безразмерная константа, $c_0 = 1$ и имеет размерность $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Аналогичный вид управляющего момента используется применительно к задачам управления маятниковыми системами (например, в работах [3, 4]).

Отметим, что на практике управление такого вида может быть реализовано не только как активное, но и как пассивное (например, при помощи механизма переключения передач). Таким образом, для реализации управления данного вида не обязательно использование электронных датчиков и контроллеров.

Запишем уравнение (2.1) в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = -a \sin \varphi + \mu((k - b|\cos \varphi + \omega^2|) \operatorname{sign} \omega - c\omega), \end{cases} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{mr^2}{J + mr^2}, \quad 0 < a < 1, \\ c &= \frac{c_1}{c_0}, \quad b = \frac{b_1 m \sqrt{gr}}{c_0}, \\ \mu &= \frac{c_0 \sqrt{r/g}}{J + mr^2}. \end{aligned}$$

Рис. 1. Схема маятника.

Далее безразмерный параметр μ будем предполагать малым ($\mu \ll 1$).

Будем рассматривать следующую задачу: за счет управления вида $U_1(\dot{\varphi})$ реализовать в системе (2.2) траектории, периодические по φ , орбитально устойчивые. Такие траектории отвечают установившимся движениям маятника и могут быть использованы для идентификации параметров модели трения, как будет показано далее.

3. Применение теоремы Понтрягина

При поиске периодических траекторий системы (2.2) применим метод Понтрягина для кусочно-спшитых систем, близких к гамильтоновым [9]. При $\mu = 0$ получим порождающую гамильтонову систему:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = -a \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.1)$$

Гамильтониан системы (3.1) равен $H(\varphi, \omega) = \omega^2/2 - a \cos \varphi$. Траектория системы (3.1), соответствующая уровню энергии h , имеет вид

$$\omega = \pm \sqrt{2h + 2a \cos \varphi}. \quad (3.2)$$

Заметим, что интервал $h \in (-a, a)$ отвечает колебаниям маятника, а интервал $h \in (a, +\infty)$ — вращательным движениям.

Порождающая функция Пуанкаре–Понтрягина имеет вид

$$I(h) = 2k\varphi_0(h) - \int_{-\varphi_0(h)}^{\varphi_0(h)} (b|\cos \varphi + 2h + 2a \cos \varphi| + c\sqrt{2h + 2a \cos \varphi}) d\varphi, \quad h \in (-a, a),$$

$$I(h) = 2\pi k - \int_{-\pi}^{\pi} (b|\cos \varphi + 2h + 2a \cos \varphi| + c\sqrt{2h + 2a \cos \varphi}) d\varphi, \quad h \in (a, +\infty),$$

где $\varphi_0(h) = A_0$ — амплитуда колебаний математического маятника, соответствующих решению системы (3.1) при значении h интеграла энергии:

$$A_0 = \arccos\left(-\frac{h}{a}\right). \quad (3.3)$$

Согласно теореме Понтрягина [9], существование орбитально устойчивой периодической траектории системы (2.2) в окрестности траектории (3.2) при некотором $h = h_*$ при достаточно малых значениях μ обеспечивается условиями

$$I(h_*) = 0, \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{dI}{dh} \right|_{h=h_*} < 0. \quad (3.5)$$

Покажем, что путем выбора коэффициента k в законе управления можно реализовать в системе (2.2) различные периодические траектории, в том числе и орбитально устойчивую траекторию $\dot{\varphi}(\varphi)$, близкую к траектории вида (3.2) системы (3.1) (при достаточно малых значениях μ).

4. Построение бифуркационной диаграммы периодических траекторий

При малых μ построим бифуркационную диаграмму периодических траекторий системы (2.2) в зависимости от коэффициента управления k , при этом периодическую траекторию будем характеризовать величиной h_* значения уровня энергии на порождающей траектории консервативной системы.

Для реализации конструктивной процедуры построения бифуркационной диаграммы периодических траекторий применим метод, описанный в работе [11]. Обозначим через $k = K(h)$ функцию, определяющую значение коэффициента управления, при котором для данного h выполнено условие (3.4). Например, для задачи об управляемом маятнике при упрощающем предположении, что момент сухого трения не зависит от величины нормальной реакции в шарнире, на основе анализа функции $K(h)$ можно показать, что для произвольного $h_* \in (-a, a)$ найдется коэффициент управления, при котором в системе (2.2) возникнет притягивающее периодическое решение, отвечающее $h = h_*$ [10].

Функция $K(h)$ в нашей задаче имеет следующий вид:

$$K(h) = \frac{\int_{-\arccos(-h/a)}^{\arccos(-h/a)} (b|\cos \varphi + 2h + 2a \cos \varphi| + c\sqrt{2h + 2a \cos \varphi}) d\varphi}{2 \arccos(-h/a)}, \quad h \in (-a; a),$$

$$K(h) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (b|\cos \varphi + 2h + 2a \cos \varphi| + c\sqrt{2h + 2a \cos \varphi}) d\varphi}{2\pi}, \quad h \in (a, +\infty). \quad (4.1)$$

Несложно показать, что

$$\left. \frac{dI}{dh} \right|_{h=h_*} < 0 \Leftrightarrow \left. \frac{dK}{dh} \right|_{h=h_*} > 0.$$

Значит, условие (3.5) равносильно тому, что функция $K(h)$ возрастает при $h = h_*$.

Заметим, что на интервале $h \in (a, +\infty)$ функция $K(h)$ всегда возрастающая, независимо от значений параметров системы a , b и c . Это означает, что для произвольного $h \in (a, +\infty)$ при $k = K(h)$ в системе (2.2) при достаточно малых значениях μ существует орбитально устойчивая 2π -периодическая по φ траектория, близкая к траектории вида (3.2), соответствующей данному h . Такие траектории отвечают установившимся вращениям маятника.

Также несложно показать, что при произвольных положительных a , b и c имеем $K(0) < K(a)$, следовательно (в силу непрерывности функции $K(h)$), при $h \in (0, a)$ существует некоторый интервал, такой, что на нем $dK/dh > 0$. При соответствующих $K(h)$ у системы (2.2) при малых μ существует притягивающий цикл, отвечающий установившимся качаниям маятника.

Опишем еще некоторые свойства зависимости между коэффициентом k и значением h_* , которые были получены при численном исследовании формул (4.1) для различных значений параметров a , b и c . Было выявлено три типа качественного вида бифуркационной диаграммы $h_*(k)$, которые представлены на рисунках 2–4. Данные графики построены при фиксированных значениях параметров a и c , а именно, $a = 0.2$, $c = 0.1$, и при различных

значениях параметра b ($b = 0.05$, $b = 0.5$, $b = 4$). Таким образом, при данных параметрах a и c переход от одного типа диаграммы к другому осуществляется при изменении параметра b — коэффициента сухого трения в шарнире.

Рассмотрим первый тип бифуркационной кривой (рис. 2), описывающей периодические траектории системы (2.2) при $\mu \rightarrow 0$. При $k < k_{10}$ нижнее положение равновесия маятника остается устойчивым, колебательных или вращательных установившихся движений нет. При $k > k_{10}$ нижнее положение маятника неустойчиво. При $k \in (k_{10}, k_{11})$ при достаточно малом μ существует притягивающее периодическое решение системы (2.2), для которого $h_* \in (-a, h_{11})$, что отвечает наличию установившихся колебаний маятника. При $k \in (k_{12}, k_{11})$ помимо этого существует неустойчивое периодическое решение системы (2.2), для которого $h_* \in (h_{11}, a)$. При $k > k_{12}$ существует притягивающее периодическое решение, для которого $h_* > a$, что означает установившиеся вращения маятника. Напомним, что $h = a$ отвечает сепаратрисе порождающей системы. При значениях коэффициента управления в диапазоне $k \in (k_{12}, k_{11})$ существует несколько периодических режимов движения системы. Соответственно, в поведении механической системы наблюдается гистерезис в зависимости от направления изменения значений коэффициента k управления.

Рис. 2. $h_*(k)$ при $a = 0.2$, $b = 0.05$, $c = 0.1$.

Для второго типа бифуркационной кривой (рис. 3) при $k < k_{20}$ нижнее положение маятника устойчиво, при $k > k_{20}$ оно неустойчиво. При $k \in (k_{20}, k_{21})$ существует притягивающее периодическое решение системы (2.2), для которого $h_* \in (-a, h_{21})$, что отвечает наличию установившихся колебаний маятника. При $k \in (k_{22}, k_{21})$ существует неустойчивое периодическое решение системы (2.2), для которого $h_* \in (h_{21}, h_{22})$. При $k \in (k_{22}, k_p)$ существует притягивающее периодическое решение системы (2.2), для которого $h_* \in (h_{22}, h_p)$, что отвечает наличию установившихся колебаний маятника. При $k > k_{23}$ притягивающее периодическое решение существует тоже, для него $h_* > a$, что означает устойчивые вращения маятника. Также возможно наличие некоторого небольшого интервала $k \in (k_{23}, k_p)$, на котором существует неустойчивое периодическое решение системы (2.2), отвечающее $h_* \in (h_p, a)$.

Рис. 3. $h_*(k)$ при $a = 0.2$, $b = 0.5$, $c = 0.1$.

Рис. 4. $h_*(k)$ при $a = 0.2$, $b = 4$, $c = 0.1$.

При численном моделировании было замечено, что при увеличении коэффициента b (при фиксированных a и c) данный интервал убывания функции $h_*(k)$ сужается, а потом совсем исчезает, после чего $k_p = k_{23}$, $h_p = h_{23}$. При дальнейшем увеличении коэффициента b мы получим третий тип бифуркационной диаграммы (рис. 4).

Для третьего типа бифуркационной кривой при $k \in (k_{31}, k_{30})$ существует неустойчивое периодическое решение системы (2.2), для которого $h_* \in (-a, h_{31})$, при этих k нижнее положение равновесия маятника остается устойчивым. При $k \in (k_{31}, k_{32})$ помимо этого существует притягивающее периодическое решение системы (2.2), для которого $h_* \in (h_{31}, a)$, что означает наличие установившихся колебаний маятника. При $k > k_{32}$ притягивающее периодическое решение существует тоже, для него $h_* > a$, что означает устойчивые вращения маятника. При $k > k_{30}$ нижнее положение равновесия маятника неустойчиво.

Отсутствие гладкости полученных кривых при $h_* = a$ связано с тем, что значение $h_* = a$ отвечает сепаратрисе порождающей системы (3.1), и в окрестности сепаратрисы в данной задаче происходит разрыв производной функции Пуанкаре–Понтрягина по переменной h .

На основе проведенного анализа можно, в частности, сделать вывод, что для некоторых $h \in (-a, a)$ при $k = K(h)$ в системе (2.2) при достаточно малых значениях μ существует орбитально устойчивый предельный цикл, близкий к траектории вида (3.2), соответствующей данному h . Причем амплитуда A этого цикла при $\mu \rightarrow 0$ стремится к значению A_0 , определяемому формулой (3.3).

Отметим, что если сухое трение в шарнире предположить постоянной величиной, в данной задаче возникают только притягивающие колебательные режимы, неустойчивых колебательных режимов нет [9]. Таким образом, именно зависимость сухого трения от нормальной реакции «отвечает» за формирование неустойчивых колебательных режимов.

5. Стратегия идентификации трения

Будем предполагать, что значение параметра a , определяемое инерционными характеристиками маятника, известно. Для системы (2.2) на практике мы можем варьировать коэффициент управления k . Проводить идентификацию коэффициентов b и c модели трения в шарнире маятника будем по характеристикам установившихся тестовых режимов движения.

Согласно построенным выше бифуркационным диаграммам, при некоторых параметрах системы a , b и c при малых μ существует диапазон значений k , при которых у маятника наблюдается устойчивый автоколебательный режим. Для реального маятника будем искать этот диапазон экспериментально. При его обнаружении запишем значения A_i^* амплитуды установившихся колебаний, отвечающие некоторому набору значений k_i^* из указанного диапазона. На плоскости $\{k, A\}$ отметим полученные точки (k_i^*, A_i^*) .

Помимо этого, на плоскости $\{k, A\}$ можем построить параметрически заданную кривую $\{k = K(h), \hat{A} = A_0(h)\}$, $h \in (-a, a)$, при фиксированных параметрах модели трения b , c . Обозначим эту кривую $\hat{A}(k)$. Данная кривая описывает для системы (2.2) зависимость амплитуды притягивающего цикла от параметра k при $\mu \rightarrow 0$.

Для идентификации коэффициентов трения b и c требуется оценить, при каких значениях этих параметров кривая $\hat{A}(k)$ наилучшим образом приближает экспериментальную зависимость $A_i^*(k_i^*)$. Проведем данную оценку. Запишем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений:

$$y = Wx,$$

где $x = (b, c)^T$ — искомый двумерный вектор, y — известный n -мерный вектор, $y_i = k_i^*$, $1 \leq i \leq n$, W — матрица размерности $n \times 2$ с элементами

$$W_{i1} = \frac{\int_{-A_i^*}^{A_i^*} |\cos \varphi - 2a \cos A_i^* + 2a \cos \varphi| d\varphi}{2A_i^*}, \quad W_{i2} = \frac{\int_{-A_i^*}^{A_i^*} \sqrt{a} \sqrt{-2 \cos A_i^* + 2 \cos \varphi} d\varphi}{2A_i^*},$$

$$1 \leq i \leq n.$$

Для поиска значения x воспользуемся методом наименьших квадратов [8], согласно которому получим

$$x = (W^T W)^{-1} W^T y.$$

Таким образом, мы провели идентификацию параметров b и c исходной системы, которые являются компонентами найденного вектора x .

6. Численное моделирование

Рассмотрим случай, для которых выше построены бифуркационные диаграммы: $a = 0.2$, $c = 0.1$, $b_1 = 0.05$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 4$. Итак, из соответствующей теории мы получили зависимость $A(k)$ на периодических траекториях при $\mu \rightarrow 0$. Теперь путем численного интегрирования уравнений движения (2.2) с известными параметрами a , b , c для некоторого набора $\{k_i\}$ определим соответствующие значения амплитуд $\{A_i(k_i)\}$ автоколебаний при следующих конечных значениях μ : $\mu = 0.01$ и $\mu = 1$.

При $\mu = 1$ помимо этого проведем численное построение неустойчивых траекторий системы (2.2) путем ее интегрирования в обратном времени для тех же трех наборов параметров a , b , c . Аналогично случаю, описанному выше, запишем наборы значений (k_i, A_i) . Приведем точки (k_i, A_i) , полученные при конечных значениях μ , на одной плоскости с теоретической кривой $A(k)$, соответствующей случаю $\mu \rightarrow 0$ (рис. 5–7). Точки (k_i, A_i) иллюстрируются следующим образом: $\mu = 0.01$ — квадратик, $\mu = 1$ — кружок. Точки, отвечающие неустойчивым циклам при $\mu = 1$, отмечены на графиках ромбами.

Было установлено, что относительное отклонение полученных точек от кривой $A(k)$ не превышает 2%. Этот эмпирический факт косвенно подтверждает возможность использования полученных теоретических кривых $A(k)$ для оценки амплитуды автоколебаний при $\mu \in (0, 1]$. Отметим, что значения параметра μ порядка единицы интересны потому, что для реальных систем естественно ожидать такие значения. Например, при размерных параметрах системы $r = 0.4$ м, $m = 1$ кг, $g = 9.8$ м/с², $J = 0.05$ кг·м² будем иметь $\mu = 0.96$.

7. Заключение

В данной работе предложен метод идентификации параметров модели трения в шарнире робота-манипулятора по амплитудам установившихся движений. В качестве модели звена робота рассматривается физический маятник. В соответствующей системе дифференциальных уравнений момент трения в шарнире зависит от величины нормальной реакции. В системе предполагается наличие малого параметра, который отвечает за инерционные свойства маятника.

Рис. 5. $A(k)$ и точки (k_i, A_i) при различных значениях μ . Случай $a = 0.2$, $c = 0.1$, $b = 0.05$.

Рис. 6. $A(k)$ и точки (k_i, A_i) при различных значениях μ . Случай $a = 0.2$, $c = 0.1$, $b = 0.5$.

При помощи метода Понтрягина поиска периодических движений систем, близких к гамильтоновым, построены бифуркационные диаграммы установившихся движений исследуемой системы. Предложен метод идентификации коэффициентов сухого и вязкого трения на основе информации о характеристиках установившихся автоколебаний маятника. Проведено численное моделирование движения системы, иллюстрирующее диапазон значений параметров системы, для которого предложенный в работе метод идентификации трения в шарнире можно считать достаточно точным.

Главной особенностью предложенного в работе подхода к идентификации параметров модели трения является то, что данный метод не требует наличия информации о траектории

Рис. 7. $A(k)$ и точки (k_i, A_i) при различных значениях μ . Случай $a = 0.2$, $c = 0.1$, $b = 4$.

движения в каждый момент времени. Тот факт, что для идентификации трения в шарнире маятника не требуется знать зависимость угла, угловой скорости, углового ускорения от времени, а нужны только средние значения этих величин, которые легко измерять, является очень важным для практической реализации данного метода. Второй существенной особенностью метода является использование для идентификации установившихся режимов движения, что улучшает повторяемость экспериментов.

References

- [1] Armstrong-Hélouvry B., Dupont P., De Wit C.C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction, *Automatica*, 1994, vol. 30, no. 7, pp. 1083–1138.
- [2] Amabili M. Nonlinear damping in large-amplitude vibrations: modelling and experiments, *Nonlinear Dynam.*, 2017, pp. 1–14.
- [3] Beznos A. V., Grishin A. A., Lensky A. V., Okhotsimsky D. E., Formal'sky A. M. A flywheel use-based control for a pendulum with a fixed suspension point, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2004, vol. 43, no. 1, pp. 22–33; see also: *Izv. Akad. Nauk. Teor. i Sist. Upravlen.*, 2004, no. 1, pp. 27–38.
- [4] Formalskii A. M. *Stabilization and motion control of unstable objects*, De Gruyter Stud. Math. Phys., vol. 33, Berlin: de Gruyter, 2015.
- [5] Iwatani M., Kikuuwe R. An identification procedure for rate-dependency of friction in robotic joints with limited motion ranges, *Mechatronics*, 2016, vol. 36, pp. 36–44.
- [6] Kermani M. R., Patel R. V., Moallem M. Friction identification and compensation in robotic manipulators, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2007, vol. 56, no. 6, pp. 2346–2353.
- [7] Vakil M., Fotouhi R., Nikiforuk P. N. Energy-based approach for friction identification of robotic joints, *Mechatronics*, 2011, vol. 21, no. 3, pp. 614–624.
- [8] Aleksandrov V. V., Lemak S. S., Parusnikov N. A. *Lectures on the mechanics of controlled systems*, Moscow: Max Press, 2012 (Russian).

- [9] Bautin N. N., Leontovich E. A. *Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane*, Moscow: Nauka, 1990 (Russian).
- [10] Vasiukova O. E. On the possibility of identification of friction coefficients in a hinge of a physical pendulum via analysis of amplitudes of steady oscillations, *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2018 (in press).
- [11] Klimina L. A., Lokshin B. Ya. On a constructive method of search for rotary and oscillatory modes in autonomous dynamical systems, *Nelin. Dinam.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 25–40 (Russian).

Modelling of self-oscillations of a controlled pendulum with respect to a friction torque depending on a normal reaction in a joint

Olga E. Vasiukova¹, Liubov A. Klimina²

¹Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory 1, Moscow, 119991, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
Michurinsky prosp. 1, Moscow, 119192, Russia

¹vasyukovaola@yandex.ru, ²klimina@imec.msu.ru

The paper presents a mathematical model of a controlled pendulum under the assumption that friction in a joint is a sum of Coulomb and viscous friction. Moreover, it is taken into account that the Coulomb friction torque depends on the value of normal reaction force in a joint. The control torque is chosen as a function that depends only on the sign of the angular speed of the pendulum. Via the Pontryagin approach for near-Hamiltonian systems, the program law is constructed for test self-oscillations. Test self-oscillations are to be used for identification of friction coefficients. Bifurcation diagrams are constructed that describe the dependence between amplitudes of self-oscillations and values of the control torque. The proposed approach to the identification of parameters of the friction requires information about amplitudes of test self-oscillations but does not require information about the trajectory of motion as a function of time. Numerical simulation of the motion of the system is carried out. The range of parameter values is described for which the method proposed in the paper is quite accurate.

MSC 2010: 70K05

Keywords: identification of friction, small parameter, steady motions, controlled dynamic system, bifurcation diagrams

Received July 12, 2017, accepted October 09, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 33–44 (Russian)