Задача Якоби на плоскости

А. А. Килин

Институт компьютерных исследований,
Удмуртский государственный университет
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: aka@rcd.ru

Получено 1 декабря 2008 г.

В данной работе рассмотрена система трех частиц на плоскости взаимодействие между которыми описывается однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$. Приведена конструктивная процедура редукции этой системы до двух степеней свободы. С помощью построения отображения Пуанкаре показана неинтегрируемость полученной системы.

Ключевые слова: Многочастичная система, потенциал, гамильтониан, редукция, интегрируемость

A. A. Kilin

The Jacobi problem on a plane

3-particle systems with a particle-interaction homogeneous potential of degree $\alpha = -2$ is considered. A constructive procedure of reduction of the system by 2 degrees of freedom is performed. The nonintegrability of the systems is shown using the Poincare mapping.

Keywords: multiparticle system, potential, Hamiltonian, reduction, integrability

Mathematical Subject Classifications: 70Hxx, 70G65

Рассмотрим задачу трех тел на плоскости с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} + \sum_{i>j} \frac{a_{ij}}{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}, \quad \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Потенциал рассматриваемой задачи является однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$ и зависит только от взаимных расстояний между телами. Аналогичную задачу на прямой впервые рассматривал еще Якоби [4]. В дальнейшем был сделан ряд обобщений этой задачи, как на случай большего числа частиц, так и на другие виды потенциала [1–3, 6–10]. Отметим, что в отличие от хорошо изученного случая движения на прямой, для задачи на плоскости было показано [5] лишь отсутствие мероморфных интегралов движения для частного случая $m_1 \neq m_2 = m_3 = 1$, $a_{i,j} = 1$. Более полный исторический обзор исследований систем с потенциалами, являющимися однородными функциями степени однородности $\alpha = -2$, общую теорию подобных систем, а также некоторые примеры можно найти в работе [11]. Как было показано в указанной работе, данная система обладает шестью первыми интегралами движения

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{S} = \mathbf{P} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) - 2H \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i, \\ M &= \sum_{i=1}^3 (x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}), \quad J = 2IH - \left(\sum_{i=1}^3 (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) \right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

где $I = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i^2$ — центральный момент инерции системы тел. Докажем следующую теорему о редукции рассматриваемой системы.

Теорема 1. Система (1) допускает редукцию на четыре степени свободы с помощью интегралов (2). Гамильтониан редуцированной системы имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} p_\theta^2 + \frac{1}{2} \frac{(p_\psi + M)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{(p_\psi - M)^2}{\cos^2 \theta} + \frac{\mu_1 a_{12}}{\cos^2 \theta} + \\ &+ \frac{\mu_2 m_1^2 a_{13}}{m_1^2 \sin^2 \theta + \mu_1 \mu_2 \cos^2 \theta + m_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \sin 2\theta \cos \psi} + \\ &+ \frac{\mu_2 m_2^2 a_{23}}{m_2^2 \sin^2 \theta + \mu_1 \mu_2 \cos^2 \theta - m_2 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \sin 2\theta \cos \psi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\psi \in [0, \pi)$, $\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\mu_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Доказательство.

Для доказательства теоремы проведем ряд последовательных преобразований.

1. Редукция по интегралам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ выполняется с помощью классического перехода к барицентрическим координатам (координатам Якоби)

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{R}_i, \quad \text{где} \quad \mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^i m_k \mathbf{r}_k / \sum_{k=1}^i m_k, \quad i = 1..2.$$

2. Редукция по интегралу момента импульса M осуществляется следующим образом: перейдем к полярным координатам $\tilde{\mathbf{r}}_i = (\rho_i \cos \varphi_i, \rho_i \sin \varphi_i)$ и сделаем замену переменных $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \psi = \varphi_1 - \varphi_2$. При этом φ — циклическая переменная, соответствующая интегралу $M = p_\varphi$. Исключая ее получим редуцированную систему.
3. Редукция по интегралу Якоби J проводится с помощью применения теоремы 1 предыдущей статьи [11] к части фазовых переменных $(\rho_1$ и $\rho_2)$. При этом необходимо сделать следующую замену переменных и времени

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{I}{\mu_1}} \cos \theta, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{I}{\mu_2}} \sin \theta, \quad dt = I d\tau.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что в результате проведенных преобразований получим гамильтонову систему с двумя степенями свободы и гамильтонианом (3). ■

Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости полученной двухстепенной системы (3). На рис. 1 приведено соответствующее отображение Пуанкаре. В качестве плоскости сечения выбрана плоскость $\theta = \frac{\pi}{4}$. Как видно из рисунка, даже в случае равных масс $m_i = 1$ и равных констант взаимодействия $a_{ij} = 1$ на нулевом уровне интеграла момента $M = 0$ фазовый портрет содержит хаотический слой. Таким образом, построенное отображение Пуанкаре может служить компьютерным доказательством неинтегрируемости системы (3).

Рис. 1. Отображение Пуанкаре системы (3) при $m_1 = m_2 = m_3 = a_{12} = a_{23} = a_{13} = 1$ на нулевом уровне интеграла момента $M = 0$ и уровне энергии $H = 3.8$. В качестве плоскости сечения выбрана плоскость $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Список литературы

- [1] Calogero, F., Solution of the one-dimensional N -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, *J. Mathematical Phys.*, vol. 12, 1971, pp. 419–436.
- [2] Calogero, F., Exactly solvable one-dimensional many-body problems, *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, vol. 13, pp. 411–416.
- [3] Calogero, F., On a functional equation connected with integrable many-body problems, *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, vol. 16, p. 77–80.

- [4] Jacobi, C. G. J., Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium, *Gesammelte Werke*, Vol. 4, Berlin: Reimer, 1886. S. 531–539.
- [5] Julliard-Tosel, E., Meromorphic Parametric Non-Integrability; the Inverse Square Potential, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2000, vol. 152, pp. 187–205.
- [6] Levi, D., Wojciechowski, S., On the Olshanetsky–Perelomov many-body system in an external field *Phys. Lett.*, 1984, vol. 103A, no. 1–2, pp. 11–14.
- [7] Moser, J., Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, *Advances in Math.*, vol. 16, 1975, pp. 197–220. Пер. на рус. в сб. Ю. Мозер, *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория*, НИЦ «РХД», 1999, с. 36–63.
- [8] Olshanetsky, M. A., Perelomov, A. M., Explicit solution of the Calogero model in the classical case and geodesic flows on symmetric spaces of zero curvature. *Lett. Nuovo Cimento* (2), 1976, vol. 16, no. 11, pp. 333–339.
- [9] Olshanetsky, M. A., Perelomov, A. M., Completely integrable hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras. *Invent. Math.*, 1976, vol. 37, p. 93–109.
- [10] Wojciechowski S., Involutive Set of Integrals for Completely Integrable Many-Body Problems with Pair Interaction, *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, vol. 18, no. 4, pp. 103–107.
- [11] Борисов, А. В., Килин, А. А., Мамаев, И. С. Многочастичные системы. Алгебра интегралов и интегрируемые случаи, *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 1, с. 51–80