Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 73–100.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.253, 532.5
MSC 2010: 76U05

Фигуры равновесия неоднородной самогравитирующей жидкости

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Работа посвящена исследованию фигур равновесия самогравитирующей идеальной жидкости со стратификацией плотности и стационарным полем скоростей. При этом, как и в классической постановке, предполагается, что фигура или ее слои равномерно вращаются вокруг неподвижной оси, фиксированной в пространстве.

Показано, что эллипсоид вращения (сфероид) с конфокальной стратификацией, в которой каждый слой вращается с собственной постоянной угловой скоростью, будет находиться в равновесии. Получены выражения для гравитационного потенциала, изменения угловой скорости и давления, из которых сделан вывод, что угловая скорость на внешней поверхности совпадает со значением угловой скорости сфероида Маклорена. Отметим, что найденное решение обобщает ранее известное для кусочно-постоянного распределения плотности. Для сравнения приведено также решение для гомотетической стратификации плотности, полученное ранее Чаплыгиным.

Получено 12 декабря 2013 года
После доработки 24 января 2014 года

Работа Борисова А. В. выполнена в рамках государственного задания УдГУ «Регулярная и хаотическая динамика». Работа Мамаева И. С. поддержана грантом РФФИ 14-01-00395-а.

Бизяев Иван Алексеевич
bizaev_90@mail.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Россия, г. Москва, Каширское ш., д. 31

В заключение рассмотрен однородный сфероид в пространстве постоянной положительной кривизны. Показано, что в этом случае сфероид не может вращаться как твердое тело, так как распределение угловой скорости частиц жидкости зависит от расстояния до оси симметрии.

Ключевые слова: самогравитирующая жидкость, конфокальная стратификация, гомотетическая стратификация, пространство постоянной кривизны

Содержание

Введение 74

1. Уравнения движения и осесимметричные равновесные формы 76

1.1. Уравнения движения в криволинейных координатах 76

1.2. Стационарные осесимметричные течения 77

2. Неоднородные фигуры с изоденситным распределением угловой скорости слоев 79

2.1. Общие уравнения для монотонного и кусочно-постоянного распределения плотности 79

2.2. Семейство конфокальных сфероидов 80

2.3. Однородный сфероид Маклорена 83

2.4. Сфероид с кусочно-постоянным распределением плотности 84

2.5. Сфероид с непрерывным распределением плотности 86

3. Задача Чаплыгина: сфероид с гомотетическим распределением плотности 87

4. Фигуры равновесия в S^3 90

4.1. Стационарные осесимметричные решения в S^3 92

4.2. Однородный сфероид в S^3 93

5. Дискуссия 96

Введение

Данная работа посвящена точным решениям в задаче об (осесимметричных) фигурах равновесия самогравитирующей идеальной жидкости со *стратификацией* плотности. Прежде всего кратко напомним известные результаты в этом направлении.

Для *однородной* жидкости хорошо известны эллипсоидальные фигуры равновесия, для которых вся масса *равномерно вращается как твердое тело* вокруг неподвижной оси:

сфероид Маклорена (1742),

эллипсоид Якоби (1834).

Кроме того, в случае однородной жидкости существуют также *фигуры равновесия с внутренними течениями*:

эллипсоид Дедекинда (1861),

эллипсоиды Римана (1861).

Замечание. Открытие эллипсоидов Дедекинда и Римана стало возможным благодаря работе Дирихле [22], где были получены уравнения динамики жидкого однородного самогравитирующего эллипсоида (для данной системы все вышеуказанные фигуры равновесия являются неподвижными точками). Современный обзор динамических аспектов, связанных с жидкими и газообразными самогравитирующими эллипсоидами, с подробной бибилиографией дан в работе [4]. Отметим также случаи интегрируемости, найденные недавно в родственной задаче о газовых эллипсоидах [27].

Хотя исследованиям несимметричных фигур равновесия было посвящено огромное количество работ в XIX и XX века (см., например, литературу к работам [4, 14]), наиболее значимым с точки зрения приложений к теории фигур планет остается сфероид Маклорена. Однако хорошо известно, что для всех планет Солнечной системы реальное сжатие отличается от сжатия соответствующего сфероида Маклорена, полученного по характеристикам планеты.[1] Традиционно это расхождение связывают со стратификацией плотности планеты, что приводит к необходимости исследования неоднородных фигур равновесия.

Для стратифицированной массы жидкости, вращающейся как твердое тело с малой угловой скоростью ω, в работе А. Клеро[2] [6] было получено уравнение сфероида, который в первом порядке по ω^2 является фигурой равновесия. Впоследствии исследования таких фигур были продолжены в работах Лапласа, Лежандра и Ляпунова. Ляпунов получил окончательное решение этой проблемы в форме рядов по малому параметру ω^2 и показал их сходимость.

С другой стороны, в ряде работ (М. Ами [28], В. Вольтерра [39] и П. Пицетти [13, гл. 12]) было показано, что для стратифицированной жидкой массы, вращающейся как твердое тело, фигуры равновесия в классе эллипсоидов не существует.

Теорема. *Пусть тело образовано самогравитирующей идеальной стратифицированной жидкостью. При этом предполагается, что*

— *свободная поверхность жидкости — эллипсоид (может быть как трехосный, так и сфероид),*

— *распределение плотности $\rho(\boldsymbol{r})$ таково, что поверхности уровня $\rho(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const}$ являются эллипсоидами, соосными с внешней поверхностью.*

Тогда данная конфигурация жидкой массы не может задавать фигуру равновесия, вращающуюся как твердое тело вокруг одной из главных осей.

М. Ами доказал эту теорему для случая конечного числа эллипсоидальных слоев постоянной плотности, В. Вольтерра обобщил этот результат на случай непрерывного распределения плотности для гомотетической стратификации эллипсоидов, П. Пицетти дал наиболее простое и строгое доказательство в общем случае как для непрерывного распределения плотности, так и для кусочно-постоянного. Любопытно, что до сих пор появляются работы (см., например, [30]), авторы которых «открывают» новые «решения», противоречащие данной теореме. Такого сорта работы показывают, что еще не достигнуто полное понимание всех проблем, связанных с фигурами равновесия небесных тел со стратифицированной плотностью. Отметим, что в работе [38] А. Вероне также пытается доказать эту теорему для случая непрерывного распределения плотности, но делает ошибки.

[1] Соответствующие расчеты несложно выполнить по формулам раздела 2.3 и доступным в интернете астрономическим данным.

[2] А. Клеро участвовал в первых экспедициях, подтвердивших предположение И. Ньютона о том, что Земля сжата с полюсов.

Если допустить возможность, что угловая скорость частиц жидкости не является постоянной для всей жидкой массы, то возможны фигуры равновесия для произвольной осесимметричной формы поверхности и стратификации плотности [13, гл. 9]. Так, в работе[3] [15] С. А. Чаплыгин явно указал сфероидальную фигуру равновесия с неоднородным распределением угловых скоростей для случая гомотетической стратификации плотности. При этом оказывается, что поверхности равной плотности $\rho(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const}$ не совпадают с поверхностями равной угловой скорости $\omega(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const}$. С. А. Чаплыгин пытался использовать полученное решение для объяснения зависимости от широты угловой скорости вращения поверхностных слоев Солнца.

В работе [34] найдено явное решение другого вида, для которого фигура равновесия представляет собой сфероид, состоящий из двух масс жидкостей разной плотности $\rho_1 \neq \rho_2$, разделенных сфероидальной границей, софокусной с внешней поверхностью, при этом каждый из слоев вращается с постоянной угловой скоростью так, что $\omega_1 \neq \omega_2$. Обобщение этого решения на случай произвольного конечного числа «софокусных слоев» получено в [24].

В настоящей работе мы получаем обобщение этого решения на случай произвольной конфокальной стратификации плотности (как непрерывной, так и кусочно-постоянной). Мы также приводим для сравнения решение Чаплыгина для гомотетической стратификации. Кроме того, мы показываем, что в случае пространства постоянной кривизны однородный (криволинейный) сфероид является фигурой равновесия только при условии неоднородного распределения угловых скоростей частиц жидкости $\omega(\boldsymbol{r}) \neq \mathrm{const}$; решение в этом случае можно представить в форме ряда по кривизне пространства.

1. Уравнения движения и осесимметричные равновесные формы

1.1. Уравнения движения в криволинейных координатах

В данном случае для решения конкретных задач удобно использовать специальные криволинейные (неортогональные) координаты, которые обозначим $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Итак, прежде всего представим уравнения, описывающие данную систему, в подходящей форме.

Пусть элемент жидкости имеет в данный момент времени t координаты $\boldsymbol{q}$, тогда скорости изменения его координат при движении обозначим $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$. При этом скорости будут зависеть как от координат $\boldsymbol{q}$ выбранного элемента, так и от времени t: $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\boldsymbol{q}, t)$. Полная производная любой функции f от $\boldsymbol{q}$ и t вычисляется по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathbf{G} = \|g_{ij}\|$ метрический тензор, отвечающий данным координатам. В случае ортогональных координат $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2)$, где h_i — координаты Ламе.

Как известно [9], уравнения движения жидкости в потенциальном поле могут быть представлены в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_i}, \tag{1.2}$$

[3]Эта работа не была опубликована при жизни С. А. Чаплыгина, она впервые появилась в его посмертном собрании сочинений, подготовленным Л. Н. Сретенским.

где ρ, p — плотность и давление, U — удельный потенциал внешних сил, T — удельная кинетическая энергия жидкости, вычисляемая по формуле

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

Уравнения непрерывности, записанные в данных обозначениях, принимают вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{g}\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho g\dot{q}_i) = 0, \quad g = \sqrt{\det \mathbf{G}}. \tag{1.3}$$

В случае самогравитирующей жидкости гравитационный потенциал $U(\boldsymbol{q}, t)$ находится из уравнения

$$\Delta U = 4\pi G\rho(\boldsymbol{q}, t), \tag{1.4}$$

где G — гравитационная постоянная, а лапласиан задается известным соотношением

$$\Delta = \frac{1}{g}\sum \frac{\partial}{\partial q_i}\left(gg^{ij}\,\frac{\partial}{\partial q_j}\right), \quad \|g^{ij}\| = \mathbf{G}^{-1},$$

при этом предполагается, что снаружи от жидкого тела плотность обращается в нуль, $\rho = 0$.

В случае отсутствия внешних воздействий на свободной границе ∂B массы жидкости давление обращается в нуль,

$$p\big|_{\partial B} = 0,$$

а гравитационный потенциал и его производная по нормали являются непрерывными,

$$U_{\text{in}}\big|_{\partial B} = U_{\text{out}}\big|_{\partial B}, \quad \left.\frac{\partial U_{\text{in}}}{\partial n}\right|_{\partial B} = \left.\frac{\partial U_{\text{out}}}{\partial n}\right|_{\partial B}, \tag{1.5}$$

где индексы in, out обозначают величины внутри и вне тела соответственно.

1.2. Стационарные осесимметричные течения

Для исследования возможных фигур равновесия в данной ситуации выберем криволинейные координаты $\boldsymbol{q} = (r, \mu, \varphi)$, которые связаны с декартовыми следующим образом:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = Z(r, \mu).$$

Здесь функция $Z(r, \mu)$ выбирается таким образом, чтобы при одном из значений $\mu = \mu_0$ получалась свободная поверхность жидкой массы, ее конкретный вид будет определяться соответствующей постановкой задачи. Метрический тензор задается соотношением

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + Z_r^2 & Z_rZ_\mu & 0 \\ Z_rZ_\mu & Z_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g = \sqrt{\det \mathbf{G}} = rZ_\mu,$$

где $Z_r = \dfrac{\partial Z}{\partial r}$, $Z_\mu = \dfrac{\partial Z}{\partial \mu}$.

Замечание. П. Пицетти [13] пользуется обычными цилиндрическими координатами (то есть полагает $\mu = z$), при этом уравнение свободной поверхности имеет вид $F(x, z) = 0$. С практической точки зрения, при поиске конкретных фигур равновесия стратифицированной жидкости этот подход неудобен.

Будем искать *стационарное решение* уравнений (1.2), для которого распределение скоростей имеет вид

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\mu} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(r, \mu), \tag{1.6}$$

а функции U, p, ρ не зависят от φ. Тогда, подставляя (1.6) в (1.2) и (1.4), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = r\omega^2, \quad \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mu} = 0, \\
\Delta_{r\mu} U = 4\pi G \rho(r, \mu), \\
\Delta_{r\mu} = \frac{1}{rZ_\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(rZ_\mu \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{Z_\mu}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1+Z_r^2}{Z_\mu}\frac{\partial}{\partial \mu}\right) - \frac{1}{rZ_\mu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rZ_r\frac{\partial}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(rZ_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right), \\
p(r, \mu)\big|_{\mu=\mu_0} = 0.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

При этом уравнение непрерывности (1.3) выполняется тождественно.

Зададим функцию $Z(r, \mu)$, определяющую криволинейные координаты, таким образом, чтобы все координатные поверхности $\mu = \mathrm{const}$ являлись компактными, и определим некоторое значение $\mu = \mu_0$, которое соответствует границе жидкости и задает распределение плотности $\rho(r, \mu)$. Тогда, согласно (1.7), после решения уравнения для потенциала всегда можно подобрать распределение давления и квадрата угловой скорости, которые будут удовлетворять первой паре уравнений:

$$p(r, \mu) = \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \rho \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu,$$

$$\omega^2(r, \mu) = \frac{1}{r\rho}\left(\rho_0 \frac{\partial U}{\partial r}(r, \mu_0) + \int\limits_{\mu_0}^{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial \rho}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) d\mu\right), \quad \rho_0 = \rho(r, \mu_0).$$

Возможным препятствием существованию такого рода фигур равновесия является то, что $\omega^2(r, \mu)$, определяемая из этих уравнений, может оказаться отрицательной. Более содержательной задача о фигурах равновесия остается, когда мы накладываем некоторые ограничения на распределение угловой скорости.

Так, в работах Л. Лихтенштейна и Р. Вавра, см. [11], указаны достаточные условия, когда тело заведомо обладает плоскостью симметрии.

Теорема. *Пусть для неоднородного самогравитирующего жидкого тела выполнено следующее:*

1. *жидкость находится в состоянии относительного равновесия, при котором все частицы вращаются вокруг неподвижной оси Oz и их угловая скорость зависит лишь от расстояния до оси вращения: $\omega = \omega(r^2)$,*
2. *плотность является кусочно-непрерывной функцией,*
3. *тело состоит из конечного числа ограниченных областей, границы которых имеют топологический тип сферы или тора;*

тогда тело обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной оси Oz.

Очевидно также, что при этом центр масс лежит на пересечении плоскости симметрии с осью вращения Oz.

2. Неоднородные фигуры с изоденситным распределением угловой скорости слоев

2.1. Общие уравнения для монотонного и кусочно-постоянного распределения плотности

Рассмотрим теперь случай, когда поверхности уровня стратификации плотности ρ совпадают с поверхностями уровня угловой скорости ω (то есть жидкости равной плотности движутся с одинаковой угловой скоростью); выбирая их как координатные линии $\mu = \mathrm{const}$, это условие представим в форме

$$\rho = \rho(\mu), \quad \omega = \omega(\mu). \tag{2.1}$$

Исключая из первой пары уравнений системы (1.7) давление (умножая их на ρ и дифференцируя первое по μ, а второе — по r, а затем вычитая одно из другого), получим соотношение

$$\rho'(\mu)\,\frac{\partial U(r,\mu)}{\partial r} = r\big(\rho(\mu)\omega^2(\mu)\big)', \tag{2.2}$$

где штрих обозначает производную по μ.

1. Рассмотрим сначала случай, когда плотность *всюду внутри тела непостоянна*:

$$\rho'(\mu) \neq 0.$$

Тогда согласно (2.2) потенциал U внутри тела представляется в форме

$$U(r,\mu) = \frac{1}{2}u(\mu)r^2 + v(\mu), \tag{2.3}$$

причем из первой пары уравнений (1.7) неизвестные $p(r,\mu)$ и $\omega(\mu)$ получим в форме

$$\begin{gathered} p = -\frac{1}{2}P(\mu)r^2 - Q(\mu), \quad \omega^2(\mu) = u(\mu) - \frac{P(\mu)}{\rho(\mu)}, \\ P(\mu) = \int\limits_{\mu_0}^{\mu} u'(\xi)\rho(\xi)\,d\xi, \quad Q(\mu) = \int\limits_{\mu_0}^{\mu} v'(\xi)\rho(\xi)\,d\xi. \end{gathered} \tag{2.4}$$

При этом заведомо выполнены соотношения

$$p(r,\mu)\Big|_{\mu=\mu_0} = 0, \quad \frac{d\omega^2}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0} = 0.$$

Таким образом, отсюда следует, что фигура равновесия жидкости со стратификацией плотности и угловой скорости вида (2.1) существует тогда и только тогда, когда существуют функции $Z(r,\mu)$ и $u(\mu)$, $v(\mu)$, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_{r,\mu}\left(\frac{1}{2}u(\mu)r^2 + v(\mu)\right) = 4\pi G\rho(\mu), \tag{2.5}$$

причем внутри жидкой массы потенциал имеет вид (2.3).

2. Рассмотрим теперь ситуацию, когда *в некотором слое плотность принимает постоянное значение*:

$$\rho(\mu) = \rho_0 = \mathrm{const}, \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2).$$

Тогда, согласно (2.2), заключаем, что угловая скорость всего слоя также постоянна:

$$\omega(\mu) = \omega_0 = \mathrm{const}, \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2).$$

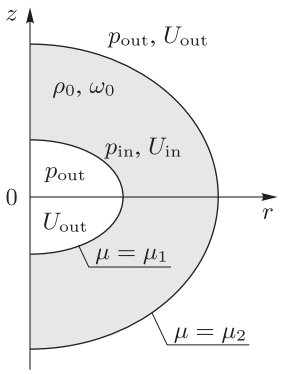

Рис. 1.

Учитывая это, проинтегрируем первую пару уравнений (1.7) и получим для функции $U + \dfrac{p}{\rho_0}$ в слое соотношение

$$U + \frac{p}{\rho_0} = \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 + \Phi_0, \quad \Phi_0 = \text{const}. \tag{2.6}$$

При этом во всех точках на границах слоя $\mu = \mu_i$, $i = 1, 2$ (см. рис. 1) давление внутри и снаружи должно совпадать:

$$p_{\text{in}}(r, \mu)\Big|_{\mu=\mu_i} = p_{\text{out}}(r, \mu)\Big|_{\mu=\mu_i}. \tag{2.7}$$

Потенциал в слое также удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta_{r\mu} U_{\text{in}}(r, \mu) = 4\pi G \rho_0,$$

а на границах выполняются условия (1.5).

2.2. Семейство конфокальных сфероидов

Рассмотрим частный случай, при котором искомое решение существует. Покажем, что в случае конфокальной стратификации плотности сфероида гравитационный потенциал записывается в виде (2.3).

Выберем параметризацию конфокальной стратификации в $\mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\frac{x^2 + y^2}{d^2(1 + \mu^2)} + \frac{z^2}{d^2\mu^2} = 1, \quad \mu \in [0, +\infty),$$

где d — фокальное расстояние меридионального сечения (см. рис. 2). Таким образом, параметр μ определяет отношение малой полуоси сфероида к фокальному расстоянию, а эксцентриситет e выражается по формуле

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \tag{2.8}$$

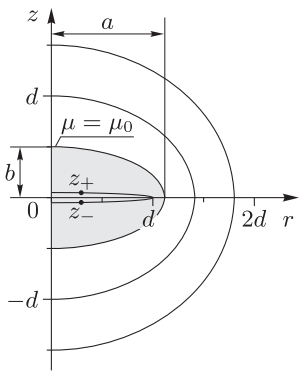

Рис. 2. Меридиональные сечения поверхностей $\mu = \text{const}$.

Выражая z, находим

$$Z(r, \mu) = \pm\sqrt{d^2\mu^2 - r^2\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1}}. \tag{2.9}$$

Если граница сфероида, заполненного жидкостью, имеет полуоси a, b (см. рис. 2), то фокальное расстояние d и координата границы μ_0 определяются соотношениями

$$d = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \mu_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{2.10}$$

Замечание. Можно показать, что для вытянутой сфероидальной стратификации $\left(\text{то есть для } \dfrac{r^2}{d^2\mu^2} + \dfrac{z^2}{d^2(\mu^2 + 1)} = 1\right)$ данное решение приводит к отрицательному квадрату угловой скорости вращения слоев ($\omega^2(\mu) < 0$), поэтому его мы рассматривать не будем.

Предложение 1. *Потенциал поля тяжести для сфероида с конфокальной стратификацией имеет вид*

$$U = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{r^2\widetilde{u}(\mu)}{1+\mu^2} + d^2\widetilde{v}(\mu)\right),\ k = 4\pi G. \tag{2.11}$$

Для внутренних точек:

$$\begin{gathered}\tilde{u}^{\text{in}} = I_0(\mu)((1+3\mu^2)\operatorname{arcctg}(\mu) - 3\mu) - I_1(\mu)(1+3\mu^2),\\ \tilde{v}^{\text{in}} = -I_0(\mu)((1+\mu^2)\operatorname{arcctg}(\mu) - \mu) + I_1(\mu)(1+\mu^2) + 2I_2(\mu),\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$I_0(\mu) = \int\limits_0^\mu \rho(\xi)(1+3\xi^2)\,d\xi, \quad I_1(\mu) = \int\limits_{\mu_0}^\mu \rho(\xi)((1+3\xi^2)\operatorname{arcctg}(\xi) - 3\xi)\,d\xi, \quad I_2(\mu) = \int\limits_{\mu_0}^\mu \xi\rho(\xi)\,d\xi.$$

Для внешних точек:

$$\tilde{u}^{\text{out}} = I_0(\mu_0)((1+3\mu^2)\operatorname{arcctg}(\mu) - 3\mu),\ \tilde{v}^{\text{out}} = I_0(\mu_0)(\mu - (1+\mu^2)\operatorname{arcctg}(\mu)). \tag{2.13}$$

Доказательство. Будем искать потенциал в форме (2.11). Тогда уравнение (2.5) приводит к двум линейным уравнениям для функций $\widetilde{u}(\mu)$, $\widetilde{v}(\mu)$:

$$\frac{d}{d\mu}\left((1+\mu^2)\frac{d\widetilde{u}}{d\mu}\right) - 6\widetilde{u} + 4\rho(\mu) = 0, \frac{d}{d\mu}\left((1+\mu^2)\frac{d\widetilde{v}}{d\mu}\right) + 2\widetilde{u} - 2(1+\mu^2)\rho(\mu) = 0. \tag{2.14}$$

Как хорошо известно, решение (2.14) представляется в виде суперпозиции

$$\widetilde{u}(\mu) = \widetilde{u}_0(\mu) + \widetilde{u}_p(\mu), \quad \widetilde{v}(\mu) = \widetilde{v}_0(\mu) + \widetilde{v}_p(\mu), \tag{2.15}$$

где $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{v}_0$ — общее решение однородной системы (при условии $\rho(\mu) = 0$), а $\widetilde{u}_p$, $\widetilde{v}_p$ — частное решение неоднородной системы. В данном случае можно выбрать

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_0(\mu) = A_1(1+3\mu^2) + A_2\left((1+3\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu - 3\mu\right),\\ \widetilde{v}_0(\mu) = -A_1\mu^2 + A_2\left((1-\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu + \mu\right) + A_3\operatorname{arcctg}\mu + A_4.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Используя разновидность метода вариации постоянных, частное решение можно представить в виде однократных интегралов:

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_p(\mu) = \Big((1+3\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu - 3\mu\Big)\int\limits_{\mu_s}^\mu (1+3\xi^2)\rho(\xi)\,d\xi - (1+3\mu^2)\int\limits_{\mu_s}^\mu \Big((1+3\xi^2)\operatorname{arcctg}\xi - 3\xi\Big)\rho(\xi)\,d\xi,\\ \widetilde{v}_p(\mu) = \int\limits_{\mu_s}^\mu (\operatorname{arcctg}\xi)S(\xi)\,d\xi - \operatorname{arcctg}\mu\int\limits_{\mu_s}^\mu S(\xi)\,d\xi,\\ 2S(\mu) = (\mu^2+1)\rho(\mu) - \widetilde{u}_p(\mu).\end{gathered} \tag{2.17}$$

В общем случае нижний предел μ_s в соотношениях (2.17) можно выбирать произвольной постоянной для каждого из интегралов.

Условия, которым должен удовлетворять потенциал, имеют следующий вид:

1. Вдали от сфероида потенциал должен стремиться к нулю:

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\widetilde{u}^{\text{out}}(\mu)}{1+\mu^2} = 0, \quad \lim_{\mu\to\infty}\widetilde{v}^{\text{out}}(\mu) = 0. \tag{2.18}$$

2. На границе сфероида $\mu = \mu_0$ потенциал должен быть гладкой функцией:

$$\begin{gathered}\widetilde{u}^{\mathrm{in}}(\mu_0) = \widetilde{u}^{\mathrm{out}}(\mu_0), \quad \widetilde{v}^{\mathrm{in}}(\mu_0) = \widetilde{v}^{\mathrm{out}}(\mu_0),\\ \widetilde{u}'^{\mathrm{in}}(\mu_0) = \widetilde{u}'^{\mathrm{out}}(\mu_0), \quad \widetilde{v}'^{\mathrm{in}}(\mu_0) = \widetilde{v}'^{\mathrm{out}}(\mu_0).\end{gathered} \tag{2.19}$$

3. При $\mu \to 0$ на разрезе $z = 0$, $r \in (0, d)$ потенциал должен быть гладкой функцией, то есть значения его производных должны совпадать в точках z_+ и z_- при $\mu \to 0$ (см. рис. 1), отсюда получим условие

$$\widetilde{u}'_{\mathrm{in}}\Big|_{\mu=0} = 0, \quad \widetilde{v}'_{\mathrm{in}}\Big|_{\mu=0} = 0. \tag{2.20}$$

Удовлетворим первому условию (2.18). Для этого разложим потенциал снаружи в ряд по степеням $\dfrac{1}{\mu}$:

$$\frac{\widetilde{u}^{\mathrm{out}}(\mu)}{1+\mu^2} = 3A_1^{\mathrm{out}} + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad \widetilde{v}^{\mathrm{out}} = -A_1^{\mathrm{out}}\mu^2 + A_4^{\mathrm{out}} + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Отсюда следует $A_1^{\mathrm{out}} = A_4^{\mathrm{out}} = 0$.

Далее удовлетворим условию (2.19). Для этого, чтобы упростить систему (2.18), выберем частное решение таким образом, чтобы на поверхности оно обращалось в нуль. Как легко видеть, этого можно достич, выбрав $\mu_s = \mu_0$, кроме того, в этом случае уравнения (2.19) удовлетворяются, если положить $A_1^{\mathrm{in}} = A_4^{\mathrm{in}} = 0$, $A_2^{\mathrm{out}} = A_2^{\mathrm{in}}$, $A_3^{\mathrm{out}} = A_3^{\mathrm{in}}$.

Из уравнений (2.20) найдем две оставшиеся константы A_2^{in}, A_3^{in}:

$$A_2^{\mathrm{in}} = \int\limits_0^{\mu_0} (1+3\xi^2)\rho(\xi)\,d\xi, \quad A_3^{\mathrm{in}} = -2\int\limits_0^{\mu_0} S(\xi)\,d\xi.$$

Теперь, чтобы получить соотношения (2.12), осталось упростить выражение для A_3^{in}:

$$A_3^{\mathrm{in}} = -2\int\limits_0^{\mu_0} (1+\mu^2)\rho(\mu)\,d\mu + 2\int\limits_0^{\mu_0} \widetilde{u}_p(\mu)\,d\mu,$$

$$2\widetilde{u}_p(\mu) = 2\left(\psi_1(\mu)\int\limits_{\mu_0}^{\mu} \psi_2(\xi)\rho(\xi)\,d\xi - \psi_2(\mu)\int\limits_{\mu_0}^{\mu} \psi_1(\xi)\rho(\xi)\,d\xi\right),$$

$$\psi_1(\mu) = (1+3\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu - 3\mu, \quad \psi_2(\mu) = 1+3\mu^2.$$

Второй интеграл в выражении для A_3^{in} возьмем по частям, для этого определим первообразные:

$$\begin{gathered}\Psi_1(\mu) = \mu\big((1+\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu - \mu\big), \quad \Psi_1'(\mu) = \psi_1(\mu),\\ \Psi_2(\mu) = \mu(\mu+1), \quad \Psi_2'(\mu) = \psi_2(\mu);\end{gathered}$$

при этом находим

$$\int\limits_0^{\mu_0} 2\widetilde{u}_p(\mu)\,d\mu = \int\limits_0^{\mu_0} \big(\psi_1(\mu)\Psi_2(\mu) - \psi_2(\mu)\Psi_1(\mu)\big)\rho(\mu)\,d\mu = -2\int\limits_0^{\mu_0} \mu^2\rho(\mu)\,d\mu.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$A_2^{\mathrm{in}} = -2\int\limits_0^{\mu_0} (1+3\xi^2)\rho(\xi)\,d\xi.$$

Записывая решение (2.17) с учетом найденных констант интегрирования, а затем взяв повторные интегралы в $\widetilde{v}_p(\mu)$ по частям аналогично тому, как это было сделано выше, и приводя подобные слагаемые, получаем выражения (2.12) и (2.13). ■

Замечание. Если сделать замену переменной $\mu = ix$ в уравнениях (2.14), они примут форму неоднородных уравнений Лежандра при $n = 2$ и $n = 1$.

Как следствие такого представления потенциала получим известную теорему Маклорена [14] в случае сфероида.

Теорема 1. *Гравитационный потенциал, создаваемый неоднородным сфероидом с конфокальной стратификацией и плотностью $\rho(\mu)$, во внешней точке совпадает с потенциалом однородного сфероида с плотностью*

$$\langle\rho\rangle = \frac{1}{\mu_0(1+\mu_0^2)}\int\limits_0^{\mu_0}(1+3\xi^2)\rho(\xi)\,d\xi.$$

Согласно предложению 1, семейство конфокальных сфероидов удовлетворяет условию (2.3), а следовательно, поверхности уровня угловой скорости также являются конфокальными сфероидами. После интегрирования $P(\mu)$ по частям конечное выражение для угловой скорости слоев можно представить в форме

$$\begin{gathered}\frac{\omega(\mu)^2}{2\pi G} = I_0(\mu_0)\frac{\rho(\mu_0)}{\rho(\mu)}\frac{(1+3\mu_0^2)\operatorname{arcctg}(\mu_0)-3\mu_0}{1+\mu_0^2} - \\ -\frac{2}{\rho(\mu)}\int\limits_\mu^{\mu_0}\rho'(\xi)\frac{I_0(\xi)((1+3\xi^2)\operatorname{arcctg}(\xi)-3\xi)-I_1(\xi)(1+3\xi^2)}{1+\xi^2}\,d\xi.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Из этого соотношения, полагая $\mu = \mu_0$, получим следующий результат:

Теорема 2. *При произвольной конфокальной стратификации угловая скорость на внешней поверхности неоднородного сфероида совпадает с значением угловой скорости сфероида Маклорена плотности $\langle\rho\rangle$:*

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi G\langle\rho\rangle} = \mu_0((1+3\mu_0^2)\operatorname{arcctg}(\mu_0)-3\mu_0), \tag{2.22}$$

где $\langle\rho\rangle$ — средняя плотность сфероида.

2.3. Однородный сфероид Маклорена

Пусть плотность постоянна всюду внутри некоторого сфероида:

$$\rho(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu_0 < \mu, \\ \rho_0, & 0 < \mu \leqslant \mu_0, \end{cases}$$

где μ_0 определяется соотношениями (2.10). В этом случае из предложения 1 находим гравитационный потенциал. Внутри сфероида он представляется в форме

$$U = 2\pi G\left(\frac{1}{2}\frac{r^2\widetilde{u}^{\mathrm{in}}(\mu)}{1+\mu^2} + d^2\widetilde{v}^{\mathrm{in}}(\mu)\right),$$
$$u^{\mathrm{in}}(\mu) = \rho_0\big(\mu_0(1+3\mu^2)((1+\mu_0^2)\operatorname{arcctg}\mu_0-\mu_0)-2\mu^2\big),$$
$$v^{\mathrm{in}}(\mu) = \rho_0(1+\mu_0^2)\big(\mu^2-\mu_0(1+\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu_0\big).$$

Далее из соотношения (2.21) с учетом связи (2.8) между μ_0 и эксцентриситетом получаем известное выражение для угловой скорости сфероида Маклорена:

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi G\rho_0} = \mu_0\Big((1+3\mu_0^2)\operatorname{arcctg}\mu_0 - 3\mu_0\Big) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\Big((3-2e^2)\arcsin e - 3e\sqrt{1-e^2}\Big).$$

Используя (2.4), находим давление для сфероида Маклорена:

$$\frac{p}{2\pi G\rho_0^2} = \frac{(\mu_0^2-\mu^2)(1-\mu_0\operatorname{arcctg}\mu_0)}{1+\mu^2}(d^2(1+\mu^2)(1+\mu_0^2)-r^2). \tag{2.23}$$

Можно показать, что поверхности уровня (2.23) суть гомотетические сфероиды. Используем для этого соотношение, определяющее гомотетическую стратификацию, которое в нашем случае примет вид

$$\frac{r^2}{d^2(1+\mu_0^2)} + \frac{z^2}{d^2\mu_0^2} = m,$$

и (2.9), находим:

$$r = \frac{d^2(1+\mu_0^2)(1+\mu^2)(m\mu_0^2-\mu^2)}{\mu^2-\mu_0^2}.$$

Далее, подставляя r в (2.23), получим:

$$\frac{p}{2\pi G\rho_0^2} = d^2\mu_0^2(1+\mu_0^2)(1-\mu_0\operatorname{arcctg}\mu_0)(1-m).$$

2.4. Сфероид с кусочно-постоянным распределением плотности

Рассмотрим теперь сфероид с кусочно-постоянной плотностью, то есть состоящий из последовательности сложенных однородных слоев с различными плотностями. Внешний слой будем нумеровать, как и ранее, индексом 0, а последний внутренний слой индексом n. Таким образом, получаем сфероид состоящий из $n+1$ слоев:

$$\rho(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu_0 < \mu, \\ \rho_0, & \mu_1 < \mu < \mu_0, \\ \rho_1, & \mu_2 < \mu < \mu_1, \\ \dots, & \dots, \\ \rho_n, & 0 < \mu < \mu_n. \end{cases}$$

Случай двух слоев различной плотности (в наших обозначениях $n=1$) рассмотрен в работе [34], в работе [24] указано его обобщение на произвольное число слоев. Любопытно, что почти все выкладки, приводимые ниже, содержатся в работе М. Ами [28], хотя, как мы уже упоминали во введении, он использовал их не для поиска новых фигур равновесия, а для доказательства отсутствия неоднородных фигур равновесия с твердотельным вращением.

Согласно (2.6), давление внутри k-го слоя задается соотношением

$$\frac{p^{(k)}}{\rho_i} = \pi G r^2\left(\frac{\omega_k^2}{2\pi G} - \frac{\widetilde{u}_{\text{in}}(\mu)}{1+\mu^2}\right) + 2\pi G d^2\widetilde{v}_{\text{in}}(\mu) + \Phi_k, \quad k = 0,1,\dots,n,$$

где $\mu_k < \mu < \mu_{k+1}$.

Далее, учитывая, что давление на внешней границе равно нулю и на границе раздела слоев потенциал и давление изменяется непрерывно, получим следующие соотношения для неизвестных угловых скоростей:

$$\frac{\Delta_0\omega_0^2}{2\pi G} = \Delta_0\frac{\widetilde{u}_{\rm in}(\mu_0)}{1+\mu_0^2},$$

$$\ldots,$$

$$\frac{\rho_n\omega_n^2}{2\pi G} = \frac{\rho_{n-1}\omega_{n-1}^2}{2\pi G} + \Delta_n\frac{\widetilde{u}_{\rm in}(\mu_n)}{1+\mu_n^2},$$

$$\Delta_0 = \rho_0,\ \Delta_1 = \rho_1 - \rho_0,\ \ldots\ ,\Delta_n = \rho_n - \rho_{n-1}.$$

Отсюда находим угловую скорость для k-го слоя в форме

$$\frac{\rho_k\omega_k^2}{2\pi G} = \sum_{i=0}^{k}\Delta_i\frac{\widetilde{u}_{\rm in}(\mu_i)}{1+\mu_i^2}.$$

Выражение для $\widetilde{u}_{\rm in}(\mu_i)$ получим из (2.12):

$$\widetilde{u}_{\rm in}(\mu_i) = I_0(\mu_i)((1+3\mu_i^2)\operatorname{arcctg}\mu_i - 3\mu_i) - I_1(\mu_i)(1+3\mu_i^2).$$

Для того чтобы вычислить $I_0(\mu_i)$ и $I_1(\mu_i)$, используем функцию Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

и представим плотность рассматриваемого сфероида в форме

$$\rho(\mu) = \sum_{i=0}^{n}\Delta_i\theta(\mu_i - \mu).$$

Отсюда, выполнив интегрирование, находим:

$$I_0(\mu_i) = \sum_{j=i+1}^{n}\Delta_j\mu_j(1+\mu_j^2),$$

$$I_1(\mu_i) = \sum_{i=0}^{j}\Delta_j\left(\frac{2\mu_i^2}{1+3\mu_i^2} - \mu_j((1+\mu_j^2)\operatorname{arcctg}\mu_j - \mu_j)\right).$$

В итоге получаем выражение для угловой скорости k-го слоя в виде

$$\frac{\rho_k\omega_k^2}{2\pi G} = \sum_{i=0}^{k}\Delta_i\left(\frac{1+3\mu_i^2}{1+\mu_i^2}\sum_{j=0}^{i}\Delta_j\left(\mu_j((1+\mu_j^2)\operatorname{arcctg}\mu_j - \mu_j) - \frac{2\mu_i^2}{1+3\mu_i^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(1+3\mu_i^2)\operatorname{arcctg}\mu_i - 3\mu_i}{1+\mu_i^2}\sum_{j=i+1}^{n}\Delta_j\mu_j(1+\mu_j^2)\right). \tag{2.24}$$

2.5. Сфероид с непрерывным распределением плотности

Для того чтобы проследить зависимость угловой скорости слоев в зависимости от изменения плотности, рассмотрим неоднородный сфероид с различными функциями распределения плотности следующего вида:

$$\rho(\mu) = \rho_n^{(0)}(1 - \alpha_n \mu^n), \ n = 2, 4, 6, \tag{2.25}$$

где $\rho_n^{(0)}$ и α_n — некоторые постоянные (причем $\rho_n^{(0)}$ имеет смысл плотности в центре сфероида). Их значения будем определять исходя из того, что заданы средняя плотность тела $\langle\rho\rangle = \dfrac{\int \rho dV}{\int dV}$ и отношение плотности на поверхности к средней плотности тела $\varepsilon = \dfrac{\langle\rho\rangle}{\rho(\mu_0)}$:

$$\alpha = \frac{(1+n)(3+n)(1+\mu_0^2)(1-\varepsilon)\mu_0^{-n}}{(3+n)(1-\varepsilon(1+n)(1+\mu_0^2)) + 3(1+n)\mu_0^2},$$

$$\rho_0 = \langle\rho\rangle \frac{(3+n)(\varepsilon(1+n)(1+\mu_0^2) - 1) - 3(1+n)\mu_0^2}{n\varepsilon((1+n)\mu_0^2 + 3 + n)}.$$

В качестве примера возьмем значения эксцентриситета e_0 и величины ε, совпадающие с данными Земли [40]:

$$e_0 = 0.08181, \quad \varepsilon = 2.5.$$

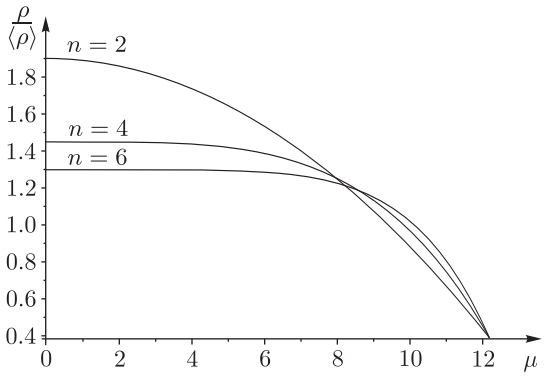

Рис. 3. График зависимости отношения $\dfrac{\rho}{\langle\rho\rangle}$ от слоя μ.

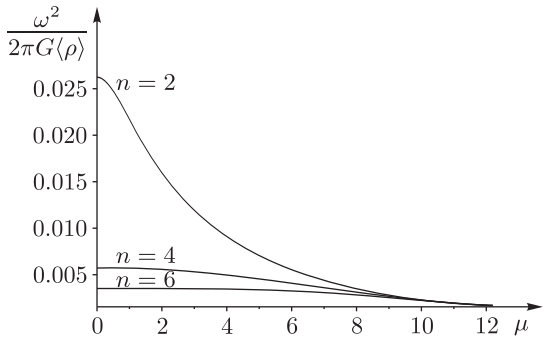

Рис. 4. График зависимости угловой скорости от слоя μ.

На рисунке 3 представлены зависимости $\dfrac{\rho}{\langle\rho\rangle}$ от координаты слоя μ для сфероида с распределением плотности, описываемым выражением (2.25). Как видим, сильнее всего плотность возрастает в центре сфероида при $n = 2$; далее, по мере увеличения n, плотность уменьшается.

Для того чтобы найти угловую скорость, подставляем рассматриваемые распределения плотности (2.25) в выражение (2.7) и получаем зависимость угловой скорости от слоя. График этой зависимости представлен на рисунке 4. (Из-за громоздкости мы здесь не приводим явные формулы для $\omega(\mu)$.)

Для угловой скорости при распределении плотности (2.25) из графика можно сделать следующий вывод: *угловая скорость возрастает по мере приближения к центру сфероида,*

и возрастает она тем сильнее, чем большее значение принимает плотность в центре сфероида (*при* $n = 2$).

Далее найдем численное значение зависимости периода обращения каждого слоя. Если взять среднюю плотность, совпадающую со средней плотностью Земли $\langle\rho\rangle = 5.51$ г/см^3, то получим зависимости $T(\mu)$, представленные на рисунке 5.

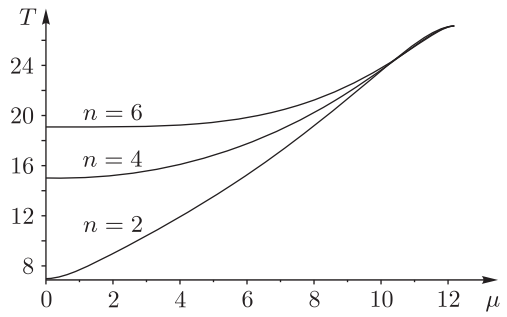

Рис. 5. Период обращения T в зависимости от слоя μ.

3. Задача Чаплыгина: сфероид с гомотетическим распределением плотности

Как известно, гомотетическая стратификация задается в виде

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{r^2}{a^2} = \sigma, \quad \sigma \in [0, +\infty),$$

откуда, полагая, что a, b — главные полуоси заполненного жидкостью сфероида (см. рис. 6), получим

$$\sigma_0 = 1, \quad Z(r, \sigma) = \pm b\sqrt{\sigma - \frac{r^2}{a^2}}.$$

Вновь положим

$$\rho = \begin{cases} \rho(\sigma) \text{ (не зависит от } r), & \sigma \leqslant 1, \\ 0, & \sigma > 1. \end{cases}$$

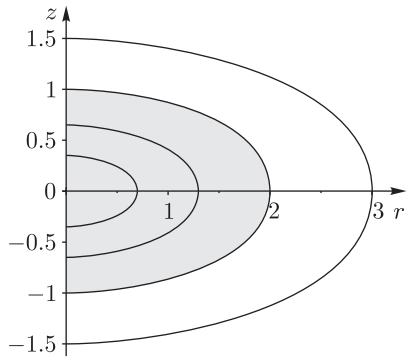

Рис. 6. Меридиональные сечения поверхностей $\sigma = \text{const}$ при гомотетической стратификации

Используя второе из уравнений (1.7) с учетом $p\big|_{\sigma=1} = 0$, получим давление, которое представим в форме

$$p(r, \sigma) = \rho_1 U(r, 1) - \rho(\sigma) U(r, \sigma) + \int\limits_1^\sigma U(r, \sigma)\, \frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\, d\sigma, \quad \rho_1 = \rho(1).$$

Подставляя давление из первого уравнения (1.7), аналогично получим

$$\omega^2(r, \sigma) = \frac{1}{r\rho(\sigma)} \left(\rho_1 \frac{\partial U}{\partial r}(r, 1) + \int\limits_1^\sigma \frac{\partial U}{\partial r}(r, \sigma) \frac{\partial \rho}{\partial \sigma}\, d\sigma \right). \tag{3.1}$$

Таким образом, для завершения решения осталось найти потенциал из уравнения

$$\Delta_{r,\sigma} U(r,\sigma) = 4\pi G\rho(\sigma).$$

В работе [26] указано удобное интегральное представление потенциала для (трехосного) эллипсоида с гомотетической стратификацией плотности. Применяя его в случае сфероида $\sigma = 1$, получим

$$\begin{gathered} U^{\text{in}}(r,z) = \pi G a^2 b^2 \int\limits_0^\infty \frac{f(1) - f\left(\dfrac{r^2}{a^2+s} + \dfrac{z^2}{b^2+s}\right)}{\Delta(s)}\, ds, \\ U^{\text{out}}(r,z) = \pi G a^2 b^2 \int\limits_{s_0}^\infty \frac{f(1) - f\left(\dfrac{r^2}{a^2+s} + \dfrac{z^2}{b^2+s}\right)}{\Delta(s)}\, ds, \\ \Delta(s) = (a^2+s)\sqrt{b^2+s}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где функция $f(\sigma)$ связана с плотностью жидкости соотношением

$$\rho(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma},$$

а величина s_0 при заданных (r,z), соответствующих точке вне жидкого сфероида, определяется как корень уравнения

$$\frac{r^2}{a^2+s_0} + \frac{z^2}{b^2+s_0} = 1.$$

В качестве примера рассмотрим распределение плотностей вида

$$\rho(\sigma) = \rho_0(1 - \alpha\sigma^n), \quad n = 1,2,3, \tag{3.3}$$

постоянные ρ_0 и α будем теперь определять исходя из того, что заданы средняя плотность $\langle\rho\rangle$ тела и отношение плотностей в центре и на поверхности $\eta = \frac{\rho_0}{\rho_1}$:

$$\alpha = \frac{\eta - 1}{\eta}, \quad \rho_0 = \frac{\eta(3+2n)\langle\rho\rangle}{3+2n\eta}; \tag{3.4}$$

положим

$$\eta = 5, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2}.$$

Далее из (3.2) находим потенциал, а из уравнения (3.1) получаем угловую скорость. Меридиональное сечение поверхностей $\dfrac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle} = \text{const}$ с одинаковым шагом при различных $n = 1,2,3$ показано на рисунке 7. Графики изменения отношения $\dfrac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle}$ вдоль малой полуоси b представлены на рисунке 8.

Для рассматриваемых плотностей (см. рис. 7, 8) можно сделать следующие выводы:

1. *По мере приближения от границы к центру сфероида изменение угловой скорости замедляется.*

2. *При $n = 1$ поверхности уровня вблизи центра сфероида представляют собой концентрические сферы. Далее с увеличением значения n область, в которой линии уровня*

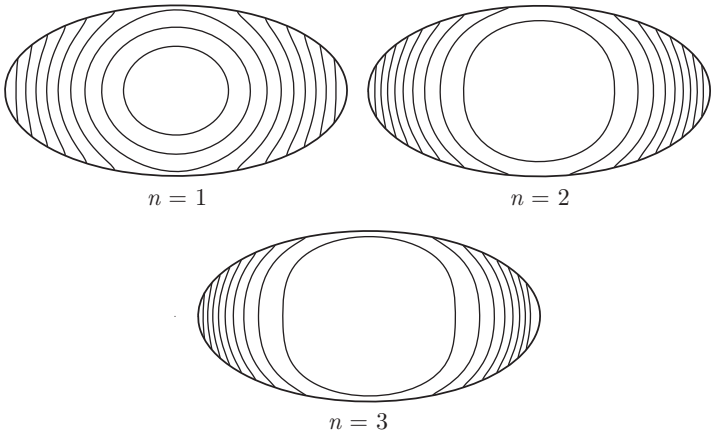

Рис. 7. Меридиональные сечения поверхностей $\dfrac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle} = \mathrm{const}$ с одинаковым шагом.

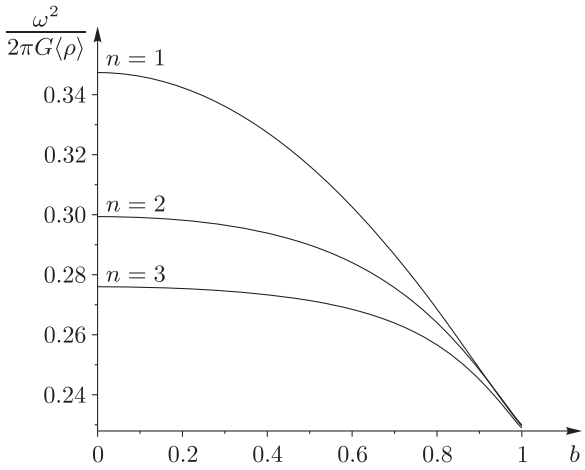

Рис. 8. Изменение отношения $\dfrac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle}$ вдоль малой полуоси b при различных n.

представляют собой замкнутые поверхности, увеличивается, причем эти замкнутые поверхности при $n > 1$ уже не являются поверхностями второго порядка.

Рассмотрим более подробно угловую скорость на границе сфероида на экваторе при плотностях вида (3.3), но теперь уже при произвольном n. Из уравнения (3.1), выполнив замену переменной $s = a^2(t-1)$, получаем угловую скорость на поверхности:

$$\frac{\omega_n^2(r,1)}{2\pi G} = \rho_0 e^2\sqrt{1-e^2}\int\limits_1^\infty \frac{t-1}{t^2(t-e^2)^{3/2}}\left(1-\frac{\alpha t^{-n}}{(t-e^2)^n}\left((t-1)e^2\frac{r^2}{a^2}+t(1-e^2)\right)^n\right)dt,$$

то есть при $r = a$ имеем

$$\frac{\omega_n^2(a,1)}{2\pi G} = \rho_0 e^2\sqrt{1-e^2}\int\limits_1^\infty \frac{(t-1)(1-\alpha t^{-n})}{t^2(t-e^2)^{3/2}}\,dt.$$

Явно проинтегрировав, получаем

$$\frac{\omega_n^2(a,1)}{2\pi G} = \rho_0\omega_m^2 + \frac{2\alpha\rho_0 e^2}{3+2n}\left(\frac{\sqrt{1-e^2)}(2n(1-e^2)+3-2e^2)}{5+2n}F\left(\frac{3}{2}, n+\frac{5}{2}, n+\frac{7}{2}, e^2\right)-1\right), \tag{3.5}$$

где ω_m^2 — безразмерная угловая скорость сфероида Маклорена:

$$\omega_m^2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\Big((3-2e^2)\arcsin e - 3e\sqrt{1-e^2}\Big).$$

Выражение (3.5) переходит в угловую скорость сфероида Маклорена при двух значениях n:

$$\frac{\omega_0^2(a,1)}{2\pi G\rho_0(1-\alpha)} = \frac{\omega_\infty^2(a,1)}{2\pi G\rho_0} = \omega_m^2.$$

Далее ρ_0 и α будем определять, используя различные известные данные для Земли.

Задана средняя плотность тела $\langle\rho\rangle = 5.51$ *г/см*^{3} *и отношение плотностей на поверхности и в центре* $\dfrac{\rho_0}{\rho_1} = 5$. В этом случае ρ_0 и α определяются выражением (3.5), а зависимость периода обращения T на экваторе от значения n представлена на рисунке 9.

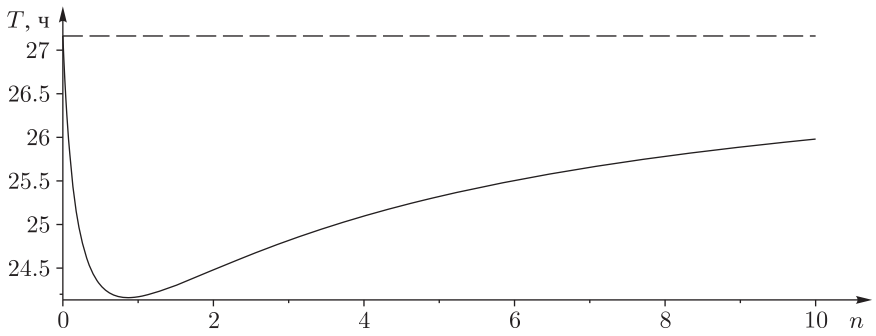

Рис. 9. Зависимость периода обращения T на экваторе от значения n при $\langle\rho\rangle = 5.51$ г/см^3 и $\dfrac{\rho_0}{\rho_1} = 5$.

Как видим из графика, $T(n)$ достигает минимума в точке $T(0.8675) = 24.1610$ ч.

Задана средняя плотность тела $\langle\rho\rangle = 5.51$ *г/см*^{3} *и отношение плотности на поверхности к средней плотности* $\dfrac{\rho_1}{\langle\rho\rangle} = \varepsilon = 2.5$. Зависимость периода обращения T от значения n на экваторе представлена на рисунке 10.

Зависимость периода вращения T на поверхности от полярного радиуса r представлена на рисунке 11.

4. Фигуры равновесия в S^3

Одним из обобщений вышеприведенных результатов является их перенесение на пространства постоянной кривизны S^3 и L^3, по аналогии с небесной механикой точечных масс [3, 5, 8, 16]. По динамике точечных гравитирующих масс имеется обширная классическая и современная литература (см. [2, 17, 19, 20]). Известны, например, аналоги закона

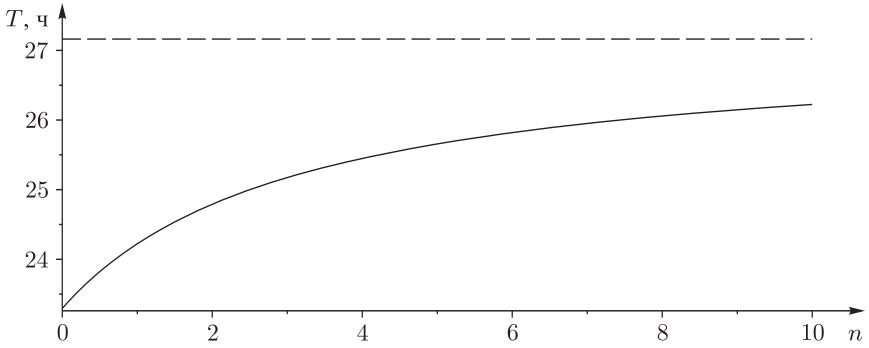

Рис. 10. Зависимость периода обращения T от значения n на экваторе при $\langle\rho\rangle = 5.51$ г/см^3 и $\varepsilon = 2.5$.

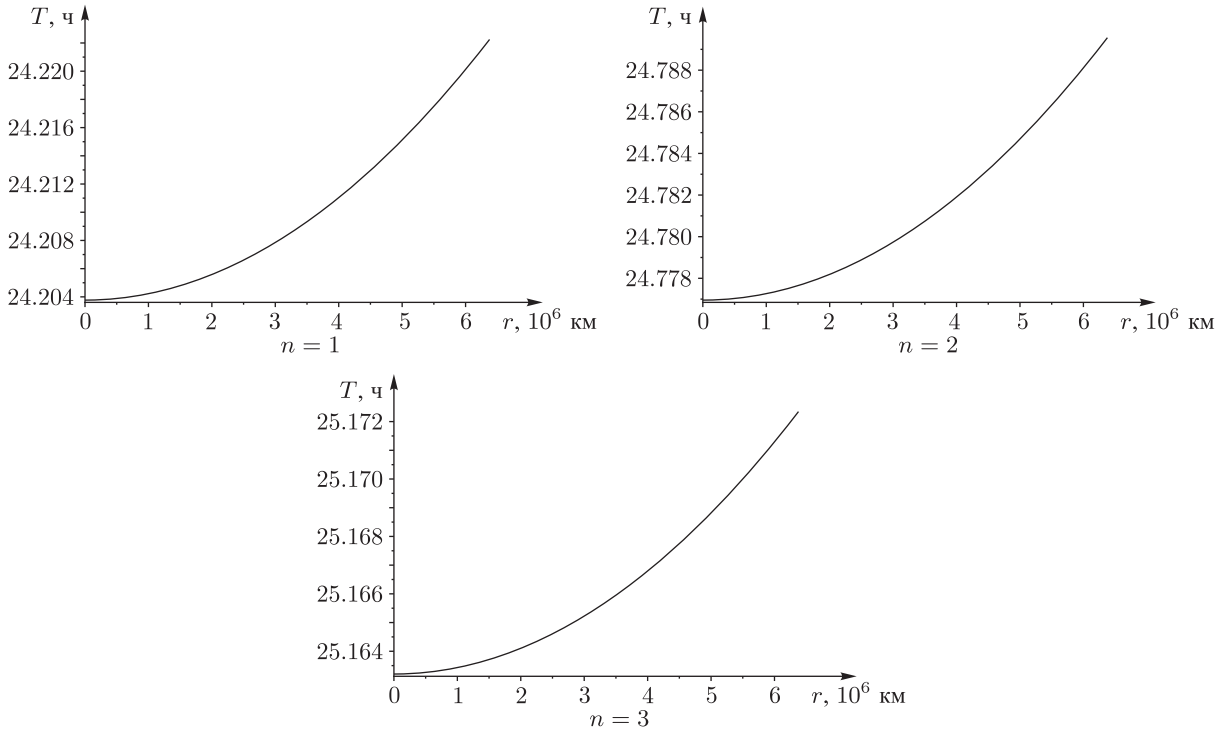

Рис. 11. Зависимость периода обращения T от полярного радиуса r на поверхности неоднородного сфероида $\langle\rho\rangle = 5.51$ г/см^3 и $\varepsilon = 2.16$ при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$.

Кеплера, изучались аналоги задачи трех тел. Однако частное обобщение теорем ньютоновского потенциала на S^3, L^3 было предпринято только в [7]. Как будет показано ниже, в этом случае задача о фигурах равновесия существенно усложняется: так, даже в случае однородных эллипсоидов невозможно твердотельное вращение жидкой массы (напомним, что эллипсоидом в искривленном пространстве называется тело, которое получается при пересечении сферы S^3 либо пространства Лобачевского L^3, вложенных в $\mathbb{R}^4$, с конической квадрикой). Одна из трудностей объясняется тем, что хотя и возможны некоторые обобщения теоремы Айвори о потенциале эллиптического слоя [7], в полной мере перенесение этой и подобной ей теорем на S^3 и L^3 невозможно (они сильно связаны с однородностью плоского пространства).

Замечание. Возможны также обобщения задачи о фигурах равновесия на релятивистский случай (см., например, обзор [33]). К сожалению, при этом не удается получить явные аналитические точные решения, и это направление все же составляет новую область исследований.

4.1. Стационарные осесимметричные решения в S^3

Для исследования возможных фигур равновесия в S^3 выберем криволинейные координаты, как это делалось в плоском пространстве E^3. Для удобства считаем S^3 вложенным в E^4, тогда переход к рассматриваемым координатам будет иметь вид

$$x_0 = \pm\sqrt{R^2 - r^2 - Z^2(r,\mu)}, \quad x_1 = Z(r,\mu), \quad x_2 = r\cos(\varphi), \quad x_3 = r\sin(\varphi),$$

где $Z(r,\mu)$, как и ранее, определяется конкретной постановкой задачи. Метрический тензор представляется в форме

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

где

$$g_{11} = 1 - Z_r^2 + \frac{(r + ZZ_r)^2}{R^2 - r^2 - Z^2}, \quad g_{12} = \frac{Z_\mu(rZ + (R^2 - r^2)Z_r)}{R^2 - r^2 - Z^2}, \quad g_{22} = \frac{(R^2 - r^2)Z_\mu^2}{R^2 - r^2 - Z^2}.$$

Будем искать стационарное решение, для которого распределение скоростей частиц жидкости имеет вид

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\mu} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(r,\mu).$$

Как и выше, предполагая, что плотность зависит только от μ, при помощи уравнений раздела 1.1, получим систему:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = r\omega^2, \quad \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mu} = 0,$$
$$\triangle_{r\mu} U = 4\pi G\rho(\mu),$$
$$\triangle_{r\mu} = \frac{x_0}{rZ_\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{rZ_\mu}{x_0}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{x_0}{Z_\mu}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{1}{x_0 Z_\mu}\left(1 + Z_r^2 - \frac{(Z - rZ_r)^2}{R^2}\right)\frac{\partial}{\partial \mu}\right] + \tag{4.1}$$
$$+\frac{x_0}{rZ_\mu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{x_0}\left(Z_r + \frac{r(Z - rZ_r)}{R^2}\right)\frac{\partial}{\partial \mu}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{x_0}\left(Z_r + \frac{r(Z - rZ_r)}{R^2}\right)\frac{\partial}{\partial \mu}\right]\right),$$

где $x_0 = \sqrt{R^2 - r^2 - Z^2(r,\mu)}$ и предполагается, что плотность $\rho(\mu)$ обращается в нуль всюду вне тела ($\mu_0 < \mu$), а на свободной границе ($\mu = \mu_0$) давление также равно нулю,

$$p(r,\mu)|_{\mu=\mu_0} = 0.$$

Как мы видим, уравнения гидродинамики остались такими же, как в E^3, поэтому, как и в разделе 3, их решение внутри области ($\mu \leqslant \mu_0$), заполненной жидкостью, представляется

в форме

$$p(r,\mu) = \rho_0 U(r,\mu_0) - \rho(\mu)U(r,\mu) + \int\limits_{\mu_0}^{\mu} U(r,\mu)\,\frac{d\rho(\mu)}{d\mu}\,d\mu, \quad \rho_0 = \rho(\mu_0),$$
$$\omega^2(r,\mu) = \frac{1}{r\rho(\mu)}\left(\rho_0\,\frac{dU}{dr}(r,\mu_0) + \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{dU}{dr}(r,\mu)\,\frac{d\rho(\mu)}{d\mu}\,d\mu\right). \tag{4.2}$$

4.2. Однородный сфероид в S^3

Остановимся теперь подробнее на случае однородного сфероида, когда при $\mu \leqslant \mu_0$ плотность $\rho(\mu) = \rho_0 = \mathrm{const}$. Обобщение конфокальной стратификации в S^3 задается следующим образом (ср. с разделом 2.2):

$$\frac{x_0^2}{R^2 - d^2\mu^2} - \frac{x_1^2}{d^2\mu^2} - \frac{x_2^2 + x_3^2}{d^2(1+\mu^2)} = 0, \quad \mu \in \left[0, \frac{R}{d}\right].$$

Отсюда получаем:

$$Z(r,\mu) = \pm\sqrt{d^2\mu^2 - r^2\frac{R^2+d^2}{R^2}\frac{\mu^2}{1+\mu^2}}.$$

Как и в предыдущем случае (см. раздел 2.2), параметр d и граница μ_0 жидкого сфероида, имеющего полуоси a, b, задаются соотношениями

$$d = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \mu_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Согласно (4.2), в случае однородного сфероида $\dfrac{d\rho}{d\mu} = 0$, поэтому угловая скорость жидкости зависит только от r:

$$\omega^2(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial r}(r,\mu_0). \tag{4.3}$$

Решения уравнения для потенциала (4.1) будем искать в виде ряда по степеням параметра $\dfrac{d^2}{R^2}$ следующего вида

$$U(r,\mu) = 2\pi G d^2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{R}\right)^{2n} U_n(r,\mu).$$

Как можно показать, все члены этого ряда являются полиномами относительно переменной r, которые удобно представить в форме

$$U_n(r,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^{2m}\frac{u_{n,\mu}(\mu)}{2^m(1+\mu^2)^m}.$$

При этом потенциал $U_0(r,\mu)$ совпадает с точностью до множителя с потенциалом сфероида Маклорена (см. раздел 2.3):

$$U_0(r,\mu) = u_{0,0}(\mu) + \frac{r^2}{d^2}\,\frac{u_{0,1}(\mu)}{2(1+\mu^2)};$$

внутри сфероида ($\mu \leqslant \mu_0$):

$$u_{0,0}^{\text{in}}(\mu) = \rho_0(1+\mu_0^2)\big(\mu^2 - \mu_0(1+\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu_0\big),$$
$$u_{0,1}^{\text{in}}(\mu) = \rho_0\Big(\mu_0(1+3\mu^2)\big((1+\mu_0^2)\operatorname{arcctg}\mu_0 - \mu_0\big) - 2\mu^2\Big),$$

снаружи сфероида ($\mu_0 < \mu$):

$$u_{0,0}^{\text{out}}(\mu) = \rho_0\mu_0(1+\mu_0^2)\big(\mu - (1+\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu\big),$$
$$u_{0,1}^{\text{out}}(\mu) = \rho_0\mu_0(1+\mu_0^2)\big((1+3\mu^2)\operatorname{arcctg}\mu - 3\mu\big).$$

Будем предполагать, что кривизна пространства очень мала ($R^2 \gg a^2$), в связи с чем ограничимся вычислением первой поправки

$$U_1(r,\mu) = \frac{r^4}{d^4}\frac{u_{1,2}(\mu)}{4(1+\mu^2)^2} + \frac{r^2}{d^2}\frac{u_{1,1}(\mu)}{2(1+\mu^2)} + u_{1,0}(\mu),$$

где функции $u_{1,0}(\mu)$, $u_{1,1}(\mu)$, $u_{1,2}(\mu)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d}{d\mu}\left((1+\mu^2)\frac{du_{1,2}}{d\mu}\right) - 20u_{1,2} + 16u_{0,1} = 0,$$
$$\frac{d}{d\mu}\left((1+\mu^2)\frac{du_{1,1}}{d\mu}\right) - 6u_{1,1} - \mu(1+\mu^2)\frac{du_{0,1}}{d\mu} - 6(2+\mu^2)u_{0,1} + 8u_{1,2} + 4\rho_0(1+\mu^2) = 0, \quad (4.4)$$
$$\frac{d}{d\mu}\left((1+\mu^2)\frac{du_{1,0}}{d\mu}\right) - 2u_{1,1} - \mu(1+\mu^2)\frac{du_{0,0}}{d\mu} + 2\mu^2(u_{0,1} + \rho_0(1+\mu^2)) = 0.$$

Функции $u_{1,0}$, $u_{1,1}$, $u_{1,2}$ должны также удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{du_{1,m}^{\text{in}}}{d\mu}\right|_{\mu=0} = 0, \quad m = 0,1,2,$$
$$u_{1,m}^{\text{in}}|_{\mu=\mu_0} = u_{1,m}^{\text{out}}|_{\mu=\mu_0}, \quad \left.\frac{du_{1,m}^{\text{in}}}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} = \left.\frac{du_{1,m}^{\text{out}}}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0}, \quad m = 0,1,2.$$
$$U_1(r,\mu)\big|_{\mu=R/d} = O(R^2).$$

Решение получившейся системы достаточно громоздкое, поэтому мы его здесь не приводим, а ограничимся лишь выражением для угловой скорости жидкости, для которой, согласно (4.3), находим:

$$\frac{\omega^2(r)}{2\pi G} = \frac{u_{0,1}^{\text{in}}(\mu_0)}{1+\mu_0^2} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{u_{1,2}^{\text{in}}(\mu_0)}{(1+\mu_0^2)^2}r^2 + \frac{u_{1,1}^{\text{in}}(\mu_0)}{1+\mu_0^2}d^2\right) + O\left(\frac{d^4}{R^4}\right).$$

Подставляя сюда решение для $u_{1,m}^{\text{in}}(\mu_0)$ и выражая μ_0 через эксцентриситет границы по

формуле $e = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu_0^2}}$, получим явное представление для угловой скорости в форме

$$\frac{\omega^2(r)}{2\pi G\rho_0} = \omega_{00} + \frac{1}{R^2}\left(\omega_{11}r^2 + \omega_{10}a^2\right) + O\left(\frac{d^2}{R^4}\right),$$

$$\omega_{00} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(2 - \frac{3}{e^2}\right)\arcsin e - \frac{3}{e^2}(1-e^2),$$

$$\omega_{11} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(12 - \frac{30}{e^2} + \frac{35}{2e^4}\right)\arcsin e + \left(\frac{4}{3} - \frac{55}{3e^2} + \frac{35}{2e^4}\right)(1-e^2),$$

$$\omega_{10} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(16 - \frac{27}{2e^2} + \frac{10}{e^4}\right)\arcsin e - \left(\frac{1}{3} - \frac{41}{6e^2} + \frac{10}{e^4}\right)(1-e^2),$$

где мы также перешли от параметра d (который стремится к нулю при $e \to 0$) к величине наибольшей главной полуоси a. Графики зависимости каждой из поправок для угловой скорости от эксцентриситета приведены на рисунке 12.

Таким образом, в пространстве постоянной (положительной) кривизны однородный жидкий самогравитирующий сфероид не может вращаться как твердое тело, и распределение угловой скорости частиц жидкости зависит лишь от расстояния до оси симметрии: $\omega = \omega(r)$.

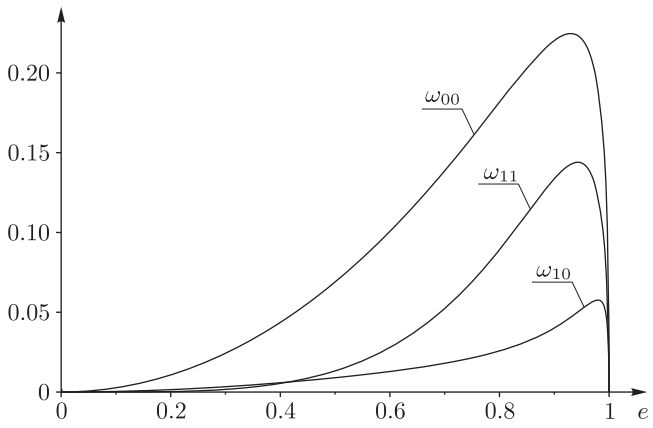

Рис. 12. Зависимости ω_{00}, ω_{11}, ω_{10} от эксцентриситета e.

Замечание. Для полноты приведем также уравнения, описывающие осесимметричные фигуры равновесия в криволинейных ортогональных координатах (μ, ν, φ) и определяемые следующим образом:

$$\frac{x_0^2}{d^2} = \frac{(\delta-\mu)(\delta+\nu)}{\delta+1}, \quad \frac{x_1^2}{d^2} = \mu\nu, \quad \delta = \frac{R^2}{d^2},$$

$$\frac{x_2^2}{d^2} = \frac{(1+\mu)(1-\nu)}{\delta+1}\cos^2\varphi, \quad \frac{x_3^2}{d^2} = \frac{(1+\mu)(1-\nu)}{\delta+1}\sin^2\varphi, \quad 0 < \mu < \delta, \quad 0 < \nu < 1.$$

Система (4.1) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial \mu} = -\frac{\delta d^2}{2(\delta+1)}(1-\nu)\omega^2, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial \nu} = \frac{\delta d^2}{2(\delta+1)}(1+\mu)\omega^2,$$

$$\Delta_{\mu\nu} U(\mu,\nu) = 4\pi G\rho(\mu),$$

$$R^2\Delta_{\mu\nu} = \frac{4}{\mu+\nu}\left(\sqrt{\mu(\delta-\mu)}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1+\mu)\sqrt{\mu(\delta-\mu)}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\right) + \sqrt{\nu(\delta+\nu)}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left((1-\nu)\sqrt{\nu(\delta+\nu)}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right).$$

Эта форма уравнений предпочтительна, если требуется получить решение в квадратурах (а не в виде ряда).

5. Дискуссия

В данной работе мы систематически исследовали задачу о неоднородных осесимметричных фигурах равновесия идеальной самогравитирующей жидкости. Получено наиболее общее решение, описывающее стратифицированный сфероид (угловая скорость жидкости принимает одно и то же значение на слое с одинаковой плотностью, то есть $\omega = \omega(\mu)$). Из этого решения естественным образом получаются указанные ранее сфероиды с кусочно-постоянным распределением плотности [24, 34]. Показано, что угловая скорость внешней поверхности сфероида с конфокальной стратификацией плотности ρ совпадает со значением угловой скорости однородного сфероида Маклорена плотности $\langle\rho\rangle$. Вследствие этого данная модель не может быть использована для объяснения отклонения сжатия планет от сжатия сфероидов Маклорена, вращающихся с той же угловой скоростью.

Мы приводим также достаточно подробный обзор (и формулировку в современных терминах) результатов в данной области. Особо следует выделить не публиковавшуюся ранее (и найденную в архивах) работу Чаплыгина о сфероидах с гомофокальной стратификацией плотности.

В последнем разделе мы рассматриваем задачу об условиях равновесия однородного сфероида в пространствах постоянной кривизны S^3 и показываем, что в этом случае жидкость не может вращаться как твердое тело и угловая скорость частиц жидкости зависит только от расстояния до оси симметрии: $\omega = \omega(r)$.

В заключение укажем некоторые открытые проблемы, связанные с возможными обобщениями вышеприведенных результатов.

1. В связи с найденными стратифицированными аналогами сфероидов Маклорена возникает вопрос об их устойчивости. Здесь речь следует вести, видимо, о вековой устойчивости. Для однородной плотности жидкости этот вопрос рассмотрен Ляпуновым [12]. Исследуя возмущение свободной поверхности сферическими гармониками, он заключает, что чем выше порядок гармоники, тем больше значение эксцентриситета, при котором происходит потеря вековой устойчивости. В общем случае Ляпунов приходит к выводу, что вековая устойчивость сфероидов Маклорена при произвольных деформациях нарушается, если эксцентриситет становится равным 0.8126 (в частном случае эллипсоидальных возмущений этот результат был получен Дирихле [22]).

К сожалению, в данной задаче не удается получить конечномерные уравнения, описывающие динамику стратифицированных эллипсоидов (см. [22, 25, 36]), поэтому затруднительно получение всех достаточных критериев устойчивости, обусловленных именно конечномерностью системы (теорема Ляпунова, КАМ-теория).

2. Исторически первые уравнения стратифицированных эллипсоидов пытался вывести еще Бетти [18], но, как заметил Тедоне [37], его рассуждения были ошибочными. В связи с этим до сих пор стоит вопрос о возможном существовании трехосных неоднородных эллипсоидов.

3. Приведенное выше решение для сфероидов с конфокальной стратификацией, по-видимому, является единственно возможным решением, для которого $\omega = \omega(\mu)$, но доказательство этого факта не получено.

4. Открытым вопросом является задача об устойчивости найденных фигур равновесия как по отношению к эллипсоидальным, так и по отношению к произвольным возмущениям.

5. Интересной задачей является также получение явного решения (не в форме ряда) для однородного сфероида в искривленном пространстве и поиск других возможных фигур равновесия в пространствах постоянной кривизны.

6. Напомним, что для эллипсоидов Маклорена и Якоби существует «динамическое» обобщение Дирихле, когда самогравитирующий жидкий эллипсоид движется, сохраняя эллипсоидальную форму при изменении направления и размеров полуосей. Неизвестно, существует ли подобное динамическое обобщение для неоднородных фигур равновесия.

Замечание. Простое перенесение метода Дирихле, например, на семейство с конфокальной стратификацией плотности (см. раздел 2) невозможно, поскольку в решении Дирихле одни и те же частицы жидкости движутся по эллипсоидам, образующим в каждый момент времени гомотетическое слоение (а не конфокальное).

7. Другое возможное обобщение связано с нахождением фигур равновесия стратифицированного газового облака. В этом случае для того, чтобы замкнуть систему (1.7), как правило, используют уравнения термодинамики (в приложении к динамике жидких масс см. обзор [4] и библиографию к нему). В частности, одним из простейших предположений является используемое в работе [23] условие постоянства температуры жидкости/газа вдоль всего объема: $T(r,\mu) = T_0 = \mathrm{const}$. Это в случае идеального газа приводит к линейной связи между плотностью и давлением

$$p = \lambda\rho, \quad \lambda = RT_0, \tag{5.1}$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Предполагая, что $\rho = \rho(\mu)$, получим из (1.7) и (5.1) систему

$$\frac{\partial U}{\partial r} = r\omega^2, \quad \frac{\partial U}{\partial \mu} = \frac{\lambda\rho'(\mu)}{\rho(\mu)},$$
$$\Delta_{r\mu} U = 4\pi G\rho(\mu).$$

Одной из неизвестных в этих уравнениях является функция $Z(r,\mu)$, характеризующая возможные фигуры равновесия облака идеального газа.

Замечание. Вместо уравнения состояния (5.1) для замыкания системы можно использовать условие баротропности течения жидкости.

Авторы благодарят А. Албуи за полезные советы и неоценимую помощь в работе.

Список литературы

[1] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Москва–Ленинград: ОНТИ, 1936. 376 с.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 464 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Задача двух тел на сфере: Приведение, стохастичность, периодические орбиты // Классическая динамика в неевклидовых пространствах: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: «ИКИ», 2004. С. 263–285.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 4, с. 363–406. *См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The Hamiltonian dynamics of self-gravitating liquid and gas ellipsoids // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 2, pp. 179–217.

[5] Киллинг В. Механика в неевклидовых пространствах // Классическая динамика в неевклидовых пространствах: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: «ИКИ», 2004. С. 23–73.

[6] Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. Москва: АН СССР, 1947. 358 с.

[7] Козлов В. В. Теоремы Ньютона и Айвори о притяжении в пространствах постоянной кривизны // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 2000, № 5, с. 43–47. *См. также:* Классическая динамика в неевклидовых пространствах: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: «ИКИ», 2004. С. 341–348.

[8] Козлов В. В., Харин А. О. Задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны // Классическая динамика в неевклидовых пространствах: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: «ИКИ», 2004. С. 159–167.

[9] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: Ч. 1. Москва: Физматлит, 1963. 584 с.

[10] Литтлтон Р. А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 240 с.

[11] Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 252 с.

[12] Ляпунов А. М. Собрание сочинений: Т. 3. Москва: АН СССР, 1959. 373 с.

[13] Пицетти П. Основы механической теории фигуры планет. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1933. 170 с.

[14] Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. Москва: Мир, 1973. 289 с.

[15] Чаплыгин С. А. Установившееся вращение жидкого неоднородного сфероида // Собр. соч.: Т. 2. Гидродинамика. Аэродинамика. Москва: Гостехиздат, 1948. С. 576–585.

[16] Шрёдингер Э. Метод определения квантовомеханических собственных значений и собственных функций // Классическая динамика в неевклидовых пространствах: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: «ИКИ», 2004. С. 113–125.

[17] Albouy A. There is a projective dynamics // Eur. Math. Soc. Newsl., 2013, no. 89, pp. 37–43.

[18] Betti E. Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea // Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 2, 1881, vol. 10, pp. 173–187. *См. также:* Бетти Э. О движениях, сохраняющих эллипсоидальную форму неоднородной жидкой массы // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. С. 134–149.

[19] Borisov A. V., Mamaev I. S. Relations between integrable systems in plane and curved spaces // Celestial Mech. Dynam. Astronom., 2007, vol. 99, no. 4, pp. 253–260. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизмы некоторых интегрируемых систем на плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2007, т. 3, № 1, с. 49–56.

[20] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Two-body problem on a sphere: Reduction, stochasticity, periodic orbits // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265–279. *См. также:* Борисов А. В.,

Мамаев И. С., Килин А. А. Задача двух тел на сфере: Приведение, стохастичность, периодические орбиты // Классическая динамика в неевклидовых пространствах: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: «ИКИ», 2004. С. 263–285.

[21] Craik A. D. D. James Ivory's last papers on the «Figure of the Earth» (with biographical additions) // Notes and Records Roy. Soc. London, 2002, vol. 56, no. 2, pp. 187–204.

[22] Dirichlet G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik: Aus dessen Nachlass hergestellt von Herrn R. Dedekind zu Zürich // J. Reine Angew. Math., 1861, vol. 58, pp. 181–216. *См. также:* Дирихле Л. Исследование одной задачи гидродинамики // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. С. 19–58.

[23] Dyson F. J. Dynamics of a spinning gas cloud // J. Math. Mech., 1968, vol. 18, no. 1, pp. 91–101.

[24] Esteban E. P., Vasquez S. Rotating stratified heterogeneous oblate spheroid in Newtonian physics // Celestial Mech. Dynam. Astronom., 2001, vol. 81, no. 4, pp. 299–312.

[25] Fassò F., Lewis D. Stability properties of the Riemann ellipsoids // Arch. Ration. Mech. Anal., 2001, vol. 158, no. 4, pp. 259–292. *См. также:* Фассо Ф., Льюис Д. Свойства устойчивости эллипсоидов Римана // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. С. 255–303.

[26] Ferrers N. M. On the potentials, ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae, and elliptic rings, of variable densities // Quart. J. Pure Appl. Math., 1875, vol. 14, pp. 1–23.

[27] Gaffet B. Spinning gas clouds: Liouville integrability // J. Phys. A, 2001, vol. 34, no. 11, pp. 2097–2109.

[28] Hamy M. Étude sur la figure des corps célestes // Ann. de l'Observatoire de Paris. Mémories, 1889, vol. 19, pp. 1–54.

[29] Jacobi C. G. J. Über die Figur des Gleichgewichts // Poggendorff Annalen der Physik und Chemie, 1834, vol. 33, pp. 229–238. *См. также:* Jacobi C. G. J. Gesammelte Werke. Berlin: Reimer, 1882. Vol. 2, pp. 17–72.

[30] Kong D., Zhang K., Schubert G. Shapes of two-layer models of rotating planets // J. Geophys. Res., 2010, vol. 115, E12003. doi:10.1029/2010JE003720.

[31] Liouville J. Sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre et douée d'un mouvement de rotation // J. de l'École Polytech., 1834, vol. 14, pp. 289–296.

[32] MacLaurin C. A treatise of fluxions: In 2 vols. Edinburgh: Ruddimans, 1742. 574 pp.

[33] Meinel R., Ansorg M., Kleinwächter A., Neugebauer G., Petroff D. Relativistic figures of equilibrium. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. 228 pp.

[34] Montalvo D., Martínez F. J., Cisneros J. On equilibrium figures for ideal fluids in the form of confocal spheroids rotating with common and different angular velocities // Rev. Mexicana Astronom. Astrofís., 1983, vol. 5, no. 4, pp. 293–300.

[35] Rambaux N., van Hoolst T., Dehant V., Bois E. Inertial core-mantle coupling and libration of Mercury // Astron. Astrophys., 2007, vol. 468, no. 2, pp. 711–179.

[36] Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoïdes // Abh. der Königl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 1860, vol. 9, pp. 3–36. *См. также:* Риман Б. Сочинения. Москва – Ленинград: ГИТТЛ, 1948. С. 339–366; Риман Б. О движении жидкого однородного эллипсоида // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. С. 74–107.

[37] Tedone O. Il moto di un ellissoide fluido secondo l'ipotesi di Dirihlet // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. 1, 1895, vol. 7, pp. 1–100. *См. также:* Тедоне О. Движение жидкого эллипсоида при выполнении гипотезы Дирихле // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. С. 150–236.

[38] Véronnet A. Rotation de l'ellipsoide hétérogène et figure exacte de la Terre // J. Math. Pures et Appl., Sér. 6, 1912, vol. 8, pp. 331–463.

[39] Volterra V. Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre // Acta Math., 1903, vol. 27, no. 1, pp. 105–124.

[40] Williams D. R. Earth fact sheet // Structural geology of the Earth's interior: Proc. Natl. Acad. Sci. NASA (17 Nov 2010), vol. 76, no. 9. *См. также:* http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html

Figures of equilibrium of an inhomogeneous self-gravitating fluid

Ivan A. Bizyaev[1], Alexey V. Borisov[2], Ivan S. Mamaev[3]

[1,2,3]Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia
[2]Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS
S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia
[2]National Research Nuclear University "MEPhI"
Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia
[1]bizaev_90@mail.ru, [2]borisov@rcd.ru, [3]mamaev@rcd.ru

This paper is concerned with the figures of equilibrium of a self-gravitating ideal fluid with density stratification and a steady-state velocity field. As in the classical setting, it is assumed that the figure or its layers uniformly rotate about an axis fixed in space. As is well known, when there is no rotation, only a ball can be a figure of equilibrium.
It is shown that the ellipsoid of revolution (spheroid) with confocal stratification, in which each layer rotates with inherent constant angular velocity, is at equilibrium. Expressions are obtained for the gravitational potential, change in the angular velocity and pressure, and the conclusion is drawn that the angular velocity on the outer surface is the same as that of the Maclaurin spheroid. We note that the solution found generalizes a previously known solution for piecewise constant density distribution. For comparison, we also present a solution, due to Chaplygin, for a homothetic density stratification.
We conclude by considering a homogeneous spheroid in the space of constant positive curvature. We show that in this case the spheroid cannot rotate as a rigid body, since the angular velocity distribution of fluid particles depends on the distance to the symmetry axis.

MSC 2010: 76U05
Keywords: self-gravitating fluid, confocal stratification, homothetic stratification, space of constant curvature

Received December 12, 2013, accepted January 24, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 73–100 (Russian)