ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9
MSC 2010: 34A25

Применение гидродинамической подстановки для систем уравнений с одинаковой главной частью

Н. Н. Фимин, В. М. Чечеткин

Рассмотрены свойства квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Установлена их связь с редуцированной системой уравнений Эйлера, возникающей в результате гидродинамической подстановки в кинетические уравнения Лиувилля и Власова. При рассмотрении импульсного уравнения системы Эйлера оказывается, что оно приводится к специальной форме типа Лиувилля–Якоби. Данное уравнение также можно исследовать с помощью гидродинамической подстановки, но уже сопряженного типа. Применение этой подстановки (второго порядка) позволяет симметризовать методику применения гидродинамической подстановки и расширить класс уравнений гидродинамического типа, к которым приводятся системы (в общем случае негамильтоновых) автономных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Приведены примеры использования развиваемого формализма для систем гравитирующих частиц в постньютоновском приближении и для гидродинамических систем, описываемых потенциалами Монжа, с целью построения уравнений Лиувилля–Якоби и применения к ним модифицированной гидродинамической подстановки.

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, квазилинейные уравнения, гидродинамическая подстановка, потенциалы Монжа, уравнения с одинаковой главной частью

Получено 06 апреля 2017 года
После доработки 18 октября 2017 года

Работа В. М. Чечеткина поддержана грантом РФФИ № 16-11-10339.

Фимин Николай Николаевич
n.fimin@hotmail.com

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4

Чечеткин Валерий Михайлович
chechetv@gmail.com

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4
Институт автоматизации проектирования РАН
123056, Россия, г. Москва, ул. 2-ая Брестская, д. 19/18

1. Введение

Применение так называемой гидродинамической подстановки [1, 2] для получения замкнутой системы моментных следствий достаточно длительное время практиковалось только для классического уравнения Власова. Определенные модификации рассматривались в основном для специальных случаев типа многоскоростных моделей и континуумслойной динамики [3, 4]. Однако некоторое время назад была установлена возможность использования гидродинамической подстановки для уравнения Лиувилля, причем данная методика оказывается применимой также для уравнений типа Власова–Пуассона, Власова–Максвелла, Власова–Янга–Миллза и др. [5, 6]. Кроме того, установлена связь гидродинамических следствий (редуцированная система Эйлера, или РСЭ) уравнений Лиувилля с классическим методом Гамильтона–Якоби (метод ГЯ) интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных, приводимых к форме, выражаемой через эйконоальную производящую функцию (или, другими словами, рассматриваемых на лагранжевом многообразии как фазовом пространстве). Можно утверждать, что существует возможность обобщения метода ГЯ на случай (включающий в себя гамильтоновы системы как частность), когда фазовое пространство для уравнения Лиувилля не обязательно будет симметричным: это означает, что допускается произвольный выбор размерностей многообразий «конфигурационных» и (вообще говоря, не являющихся канонически сопряженными к таковым) «импульсных» переменных в динамической системе, эволюция которой описывается уравнением Лиувилля для фазовой плотности [7, 8].

Базисом для анализа гамильтонова случая, приводимого к «классической» РСЭ, можно считать цикл работ [9–11], где исследовалось (эмпирически введенное) уравнение Ламба–Козлова, по форме близкое к уравнению для импульсов РСЭ. Для негамильтонова случая аналогичную роль играет теория квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью [12, 13], на основании выводов из которой можно получить методику решения широкого класса уравнений в частных производных математической физики.

2. Уравнения гидродинамического типа и квазилинейные уравнения с одинаковой главной частью

Рассмотрим общую автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в n -мерном пространстве:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in R^n, \quad t \in R^1. \quad (2.1)$$

Введем функцию распределения $f(\mathbf{x}, t)$ изображающих точек в n -мерном фазовом пространстве, представляющую собой вероятность пребывания точки траектории динамической системы в окрестности данной точки пространства R^n в момент времени t . Ее эволюция описывается обобщенным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_n(\mathbf{v}f) = 0. \quad (2.2)$$

Представим вектор $\mathbf{x}$ как упорядоченную пару $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$, $\mathbf{q} \in R^m$, $\mathbf{p} \in R^{n-m}$ (т. е. разложим фазовое пространство системы в декартову сумму фазовых множеств, определяемых

новыми переменными: $R_{\mathbf{x}}^n = R_{\mathbf{q}}^m \oplus R_{\mathbf{p}}^{n-m}$. Перепишем систему (2.1) в этих переменных:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (2.3)$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — это, соответственно, m первых и $n - m$ последних компонент векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ из (2.1) (т. е. $(\mathbf{w}, \mathbf{g})^T = \mathbf{v}$).

Будем искать решение обобщенного уравнения Лиувилля, переписанного в явной форме

$$\Omega(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial q_i} (w_i f) + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial p_j} (g_j f) = 0, \quad (2.4)$$

используя гидродинамическую («односкоростную») подстановку: $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{q}, t) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$. Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ — уравнение $(n - m)$ -мерной гиперповерхности в момент времени t , $\rho(\mathbf{q}, t)$ — плотность изображающих точек на ней. Подстановка данного представления $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в уравнение (2.4) дает, в соответствии с [7, 8], редуцированную систему Эйлера уравнений гидродинамического типа, состоящую из уравнения неразрывности и уравнения движения (изображающих точек):

$$\Omega_0(\rho) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho W_k) = 0, \quad (2.5)$$

$$\Omega_j(P_j) \equiv \frac{\partial P_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^m W_k \frac{\partial P_j}{\partial q_k} = G_j, \quad j = 1, \dots, n - m, \quad (2.6)$$

где $W_k(\mathbf{q}, t) \equiv w_k(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$, $G_j(\mathbf{q}, t) \equiv g_j(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$.

Очевидно, система уравнений $\Omega_j(P_j) = G_j$, имеющая одинаковые коэффициенты W_k при производных $\partial P_j / \partial q_k$ ($\forall j \leq n - m$), принадлежит классу якобиевых систем, впервые рассмотренных в [14] (и детально исследованных в [15]), или иначе — систем с одинаковой главной частью. Примем, что набор решений уравнений (2.6), зависящих от постоянных $\{C_j\}_1^{n-m}$, задан в виде совокупности соотношений $\Phi_j(q_0 \equiv t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) = C_j$, причем якобиан $D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-m}) / D(P_1, \dots, P_{n-m}) \neq 0$. Следуя методике [12], продифференцируем данную совокупность по $q_{i'}$ $|_{i'=0, \dots, m}$, умножим результат на $W_{k'}|_{k'=0, \dots, m}$ и просуммируем по k' ; окончательно получаем:

$$\Xi_j(\Phi_j) \equiv \sum_{k'=0}^m W_{k'} \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{k'}} + \sum_{\ell=1}^{n-m} G_\ell \frac{\partial \Phi_j}{\partial P_\ell} = 0, \quad W_0 \equiv 1, \quad q_0 \equiv t. \quad (2.7)$$

Все эти уравнения идентичны по виду (кроме нумерующего их индекса j), поэтому вместо функций $\Phi_j|_{j=1, \dots, n-m}$ можно ввести одну функцию $\Phi(q_0, \mathbf{q}, \mathbf{P})$. Так как все уравнения совокупности $\Phi_j(q_0, \mathbf{q}, \mathbf{P}) = C_j$ удовлетворяют уравнению (2.7) тождественно по $q_{i'}$, C_j , все они тождественно по $q_{i'}$, Φ_j удовлетворяют однородному линейному дифференциальному уравнению (которое можно назвать уравнением Лиувилля–Якоби, или уравнением ЛЯ) для производящей функции $(n + 1)$ -го переменного $\Phi(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$:

$$\Xi(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^m W_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n-m} G_j \frac{\partial \Phi}{\partial P_j} = 0. \quad (2.8)$$

Интегрирование последнего уравнения равносильно интегрированию характеристической системы дифференциальных уравнений (вида (2.3)): $dq_i/dt = W_k$, $dP_j/dt = G_j$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n-m$). В качестве *замечания* укажем, что, полагая $W_i(\mathbf{q}, t)$ известными функциями, можно, вводя обозначения $\mathbf{P}' = \{P_0, \mathbf{P}\}$, $P_0 \equiv \rho$, $\mathbf{G}' \equiv \{-P_0 \sum_i \partial W_i / \partial q_i, \mathbf{G}\}$, записать систему (2.5)–(2.6) единообразно как $\sum_{i=0}^m W_i \partial \mathbf{P}' / \partial q_i = \mathbf{G}'$; далее можно перейти к новой производящей функции $\Phi'(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}')$ и получить для нее уравнение, аналогичное (2.8).

Возвращаясь к анализу свойств системы уравнений (2.6), можно констатировать, что данная система (равно как и полная РСЭ при условиях, упомянутых выше в *замечании*) эквивалентна уравнению для производящей функции, формально совпадающему по виду с уравнением Лиувилля (2.8) (классического вида, т. е. не «обобщенным»). Отличие от исходного уравнения (2.4) заключается в том, что дифференцированию по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ в членах левой части в последнем случае подвергаются не моментные ядра $\mathbf{w}f$, $\mathbf{g}f$, а собственно новая неизвестная функция Φ .

С точки зрения возможности реализации симметрии решения в моментном представлении представляется правомерным поставить вопрос о применении сопряженной гидродинамической подстановки [5] теперь уже к уравнению (2.8) («подстановка 2-го уровня»): $\Phi(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) = \rho^{[2]}(\mathbf{P}, t) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}(\mathbf{P}, t))$. Рассмотрим получающиеся выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial \rho^{[2]}}{\partial t} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}(\mathbf{P}, t)) - \rho^{[2]} \left(\nabla \delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = \rho^{[2]} \frac{\partial \delta}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} &= \frac{\partial \rho^{[2]}}{\partial P_i} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}(\mathbf{P}, t)) - \rho^{[2]} \left(\nabla \delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial P_i} \right). \end{aligned}$$

Собирая множители при δ -функции и при ее производных, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{[2]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-m} G_i^{[2]} \frac{\partial \rho^{[2]}}{\partial P_i} &= 0, \quad -\rho^{[2]} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \rho^{[2]} \sum_{i=1}^{n-m} G_i^{[2]} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial P_i} + \rho^{[2]} \mathbf{W}^{[2]} = 0, \\ \mathbf{G}^{[2]} &= \mathbf{G}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{W}^{[2]} = \mathbf{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}). \end{aligned}$$

Окончательно получаются гидродинамические уравнения для «бездивергентной (в импульсном пространстве) среды»:

$$\begin{aligned} \Omega_0^{[2]} \equiv \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial G_i^{[2]}}{\partial P_i} &= 0, \quad \Omega_k^{[2]}(Q_k) \equiv \frac{\partial Q_k}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{n-m} G_\ell^{[2]} \frac{\partial Q_k^{[2]}}{\partial P_\ell} = W_k^{[2]}, \\ W_k^{[2]}(\mathbf{Q}, t) &\equiv W_k(\mathbf{Q}(\mathbf{P}, t), \mathbf{P}), \quad G_j^{[2]}(\mathbf{Q}, t) \equiv G_j(\mathbf{Q}(\mathbf{P}, t), \mathbf{P}), \quad k = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (2.9)$$

(вторичная плотность $\rho^{[2]}$ вычисляется после получения решения уравнения движения).

Таким образом, исследование произвольной автономной системы ОДУ, равно как гидродинамических следствий уравнений Лиувилля и Власова, приводится к анализу уравнений движения несжимаемой «фазовой жидкости».

Отметим, что величина $\mathbf{P}$ в (2.3) (а также в (2.8)) не предполагается представимой только через градиент некоторой («эйкональной») функции $S(\mathbf{q}, t)$, а представляет собой вектор общего вида. В частности, при $n = 2m$ (гамильтонов случай) его разложение Гельмгольца–Ходжа может содержать неаннулирующуюся соленоидальную компоненту. Тогда второе уравнение системы (2.9) приводится к виду $\partial \mathbf{P}^{[2]} / \partial t - \mathbf{W} \times \text{rot} \mathbf{P}^{[2]} = -dH/d\mathbf{q}$, близкому к виду уравнений класса Ламба–Козлова [11] (и в то же время точно представляющему собой частную гамильтонову форму основного уравнения механики Биркгофа [16]).

3. Методика применения гидродинамической подстановки с учетом физических аспектов решаемых задач

Сведение решения уравнений эволюции динамической системы к уравнениям гидродинамического типа (2.9), по сути, представляет собой тривиальный алгоритм действий, хотя и зависящий от формы исходного описания динамики: если «отправной точкой» для исследования поведения динамической системы служит уравнение Лиувилля (или Власова), то 2-уровневая подстановка реализуема непосредственно, если же заданы лишь уравнения движения, то необходимо предварительно исследовать возможность приведения их к форме якобиевой системы или переход к (обобщенному) уравнению Лиувилля.

Рассмотрим как *пример 1* динамическую эволюцию системы N точечных гравитирующих частиц в постньютоновском приближении [17]. Гамильтониан в этом случае имеет форму

$$H_{1pN} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + mc^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + \sum_{j=1}^3 \frac{h_{0j}p_j}{mc} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{h_{ji}p_jp_i}{2m^2c^2} - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{\mathbf{p}^2h_{00}}{4m^2c^2} \right),$$

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{2\Phi^2}{c^4} - \frac{2Gm}{c^4} \sum_{n=1}^N \frac{\Phi'_n}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|} - \frac{3Gm}{c^4} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{v}^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|},$$

$$h_{0j} = \frac{Gm}{2c^3} \sum_{n=1}^N |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|^{-1} (7v_{nj} + (\mathbf{v}_n \mathbf{e}_n) e_{nj}), \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|},$$

$$h_j^i = -\frac{2}{c^2} \Phi \delta_j^i, \quad \Phi(\mathbf{x}) = -Gm \sum_{n=1}^N |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|^{-1}, \quad \Phi'_n = -Gm \sum_{k \neq n}^N |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n|^{-1}.$$

Для построения динамики гравитирующих частиц в постньютоновском приближении на микроскопическом уровне следует ввести (одночастичную) функцию распределения $\mathcal{F}(x^j, p_j, t)$ с нормировкой на полную массу покоя системы частиц: $\int \mathcal{F} d\mathbf{x} d\mathbf{p} = Nm$ ($m \equiv 1$) (при этом для пространственного распределения плотности в связи с наличием кривизны пространства–времени, создаваемого ансамблем частиц, необходимо рассматривать нормировку $\int \mathcal{F} d\mathbf{p} = \rho(\mathbf{x}) \sqrt{|\det g_{ij}|}|_{i,j=\overline{1,3}}$, где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — плотность массы покоя, g_{ij} — метрический тензор пространственной части 4-метрики). Кинетическое уравнение имеет вид $\partial \mathcal{F} / \partial t + [H_{1pN}, \mathcal{F}] = 0$, где $[\cdot, \cdot]$ — стандартные скобки Пуассона в фазовом μ -пространстве.

Для перехода к гидродинамическому описанию эволюции системы представим функцию распределения в форме, используемой для гидродинамической подстановки: $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{x}, t))$, где $\rho(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ имеют смысл плотности массы покоя частиц и импульса частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно. Проводя дифференцирование функции распределения и собирая множители при δ -функции и ее производных, получаем систему уравнений обобщенной гидродинамики среды, состоящей из гравитирующих частиц:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho v^k) = 0, \quad \frac{\partial P_\ell}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial P_\ell}{\partial x^k} = F_\ell, \quad \ell = \overline{1,3},$$

где $\mathcal{V}^k = (\partial H_{1pN}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, t))/\partial \mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}$ — компоненты «обобщенной скорости» среды, $F_\ell(\mathbf{x}, t) = -\partial H_{1pN}(\mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x}, t))/\partial x_\ell$ — компоненты «обобщенной массовой силы»

$$\mathcal{V}^k = \frac{P_k}{m} \left(1 - \frac{\mathbf{P}^2}{2c^2} + \frac{h_{00}}{2} \right) + ch_{0k} + \sum_{\ell=1}^3 h_{k\ell} P_\ell,$$

$$F_\ell = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\ell} \left(1 - \frac{\mathbf{P}^2}{2c^2} - \frac{h_{00}}{2} \right) - \sum_k cP_k \frac{\partial h_{0k}}{\partial x^\ell} - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^\ell} P_j P_k.$$

Преобразуя второе уравнение вышеприведенной РСЭ к виду уравнения ЛЯ и производя подстановку 2-го уровня (сопряженную), получаем:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial P_k} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{P}, t)} = 0, \quad \frac{\partial X_\ell}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 F_k \frac{\partial X_\ell}{\partial P_k} = \mathcal{V}^\ell \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{P}, t)} \cdot \nabla$$

Существует весьма широкий класс динамических систем, эволюция которых описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных, внешне существенно отличающихся от гамильтоновых, но приводимых к таковым путем выбора специальных переменных и модификацией канонических уравнений. Методика гидродинамической подстановки в этом случае не претерпевает существенных изменений, хотя, в принципе, сама подстановка может приобрести несколько иной вид: аргументом функции Дирака будет являться не вектор выделенного импульса/скорости, а набор некоторых макроструктурных/полевых величин, принимаемых за новые зависимые переменные.

В качестве *примера 2* можно рассмотреть модификацию формализма потенциалов Монжа [18] (или, что с исторической точки зрения менее правомерно, Клебша [19]) применительно к уравнениям идеальной гидродинамики. Расширенное монжевское представление может быть реализовано для системы уравнений Эйлера (для простоты для несжимаемой жидкости), описывающих эволюцию тройки зависимых переменных $(\varrho, \mathbf{v}, s)$, следующим образом: будем полагать, что гидродинамическая скорость может быть записана в виде $\mathbf{v} = -\sum_{k=1}^3 (N_k/\varrho) (\nabla \mathbf{M})_k$ ($N_1 \equiv \varrho$ — плотность среды, $N_3/\varrho \equiv s$ — удельная энтропия, $\mathbf{M} \equiv \{M_k\}_{k=1,2,3}(\mathbf{x}, t)$ — потенциалы Монжа). При наличии дополнительных условий, компенсирующих произвол, возникающий в процессе введения вспомогательных скалярных (N_k) и векторных $(\nabla \mathbf{M})$ полей в монжевском представлении скорости,

$$\sum_k \frac{N_k}{\varrho} \dot{M}_k - \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = h, \quad \hat{D} \frac{N_2}{\varrho} = \hat{D} M_2 = 0, \quad \hat{D} M_3 = T, \quad \hat{D} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla,$$

вышеприведенное представление приводит к возможности применения для получения уравнений эволюции гидродинамической системы вариационного принципа [20, 21] для кинетического потенциала $\mathcal{L} = p$, в качестве которого рассматривается динамическое давление:

$$\delta \iint \mathcal{L} d\mathbf{x} dt = 0, \quad \mathcal{L} = \sum_{k=1}^3 N_k \dot{M}_k - \frac{1}{2\varrho} \left(\sum_{k=1}^3 N_k (\nabla \mathbf{M})_k \right)^2 - \varrho \varepsilon(\varrho, s),$$

где ε и $h(= \varepsilon + p/\varrho)$ — соответственно, удельная внутренняя энергия и удельное тепло-содержание (среды, участвующей в гидродинамическом движении). Поскольку величины $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{M}_k = N_k$ имеют смысл канонически сопряженных к потенциалам Монжа псевдо-импульсов, можно перейти к гамильтонову представлению, используя преобразование Ле-жандра: $\mathcal{H} = \sum_k \dot{M}_k N_k - \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Из вариационных (функционально-дифференциальных)

уравнений движения $\dot{M}_k = \delta H / \delta N_k$, $\dot{N}_k = -\delta H / \delta M_k$, соответствующих гамильтониану $H = \int \mathcal{H} d\mathbf{x}$, можно получить с использованием приведенного выше в пункте 2 алгоритма (для якобиевых систем) уравнение ЛЯ для производящей функции $\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{K})$, аналогичное по структуре уравнению (2.7):

$$\frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{K})}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^6 g_i \frac{\partial \Phi}{\partial K_i} = 0, \quad \mathbf{K} = (\mathbf{M}, \mathbf{N})^T, \quad (3.1)$$

$$g_{1,2,3} = 0, \quad g_4 = \mu - \frac{\mathbf{v}^2}{2}, \quad g_5 = 0, \quad g_6 = T,$$

где $\mu(N_1, N_3) = \partial(N_1 \varepsilon(N_1, N_3)) / \partial N_1$ — удельный химический потенциал (полагаемый известной функцией). Используем для получения решения уравнения (3.1) подстановку

$$\Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{K}) = \phi(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}^{[0]}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{K}^{[0]}(\mathbf{x}, t) = (M_1^{[0]}(\mathbf{x}, t), \dots, N_3^{[0]}(\mathbf{x}, t))^T,$$

в результате имеем следующую эквивалентную этому уравнению (в том же смысле, что и для стандартной гидродинамической подстановки в уравнения Власова и Лиувилля) замкнутую систему, содержащую «уравнение непрерывности» и «уравнение движения» (с учетом априорно заданного уравнения состояния среды):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k(\mathbf{K}) \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \Big|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}^{[0]}} = 0, \quad \frac{\partial K_i^{[0]}}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^3 v_\ell \frac{\partial K_i}{\partial x_\ell} \Big|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}^{[0]}} = G_i(\mathbf{K}^{[0]}), \quad (3.2)$$

$$G_4 = \varepsilon(N_1^{[0]}, N_3^{[0]}) + \left(N_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial N_1} - \frac{1}{2} \mathbf{v}^2(\mathbf{K}) \right)_{\mathbf{K}=\mathbf{K}^{[0]}}, \quad G_6 = T, \quad G_{1,2,3,5} = 0.$$

Очевидно, ко второму уравнению системы (3.1) можно применить преобразование к форме уравнения ЛЯ с дальнейшим использованием подстановки 2-го порядка, рассмотренной ранее. Получаем при этом пару гидродинамических уравнений сопряженного типа:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial G_i}{\partial K_i^{[0]}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{K}^{[0]}, t)} = 0,$$

$$\frac{\partial X_\ell}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 G_i(\mathbf{X}(\mathbf{K}^{[0]}, t), \mathbf{K}^{[0]}) \frac{\partial X_\ell}{\partial K_i^{[0]}} = v_\ell(\mathbf{X}(\mathbf{K}^{[0]}, t), \mathbf{K}^{[0]}, t), \quad \ell = 1, 2, 3. \blacktriangledown$$

Таким образом, переход к представлению Монжа в приведенной реализации вариационного принципа Зелигера – Уизема [20] для системы уравнений Эйлера позволяет перейти к РСЭ для несжимаемой (в импульсном пространстве) среды путем повторного применения модифицированной гидродинамической подстановки к соответствующему предварительно сформированному уравнению ЛЯ. Использование потенциалов Монжа представляет собой достаточно универсальную методику получения канонических уравнений динамики и поэтому может рассматриваться как первичный этап для применения гидродинамической подстановки надлежащего вида (в терминах новых переменных) с целью получения уравнений гидродинамического типа. При этом процесс получения решений этих уравнений может быть существенно проще, чем для исходной системы уравнений, поскольку по сути получаемые РСЭ представляют собой обобщения уравнений классического метода Гамильтона – Якоби.

4. Заключение

Мы рассмотрели математический аппарат для получения уравнений гидродинамического типа для описания эволюции динамических систем общего вида (не обязательно сводящихся к гамильтоновым). Установлено, что получаемая в результате гидродинамической подстановки в уравнения типа Лиувилля или Власова редуцированная система Эйлера может быть преобразована к уравнению Лиувилля–Якоби, из которого сопряженной подстановкой можно получить другой вариант РСЭ. Приведенные примеры демонстрируют, что уравнения с одинаковой главной частью образуют базис метода прямой и сопряженной гидродинамической подстановки, имея, тем самым, тесную связь с уравнениями типа Гамильтона–Якоби.

References

- [1] Vlasov A. A. *Statistical distribution functions*, Moscow: Nauka, 1966 (Russian).
- [2] Braginskii S. I. The phenomena of transport in plasma, in *Reviews of plasma physics: Vol. 1*, M. A. Leontovich (Ed.), Moscow: Gosatomizdat, 1963, pp. 183–272 (Russian).
- [3] Vedenyapin V. V. *Kinetic equations of Boltzmann and Vlasov*, Moscow: Fizmatlit, 2001 (Russian).
- [4] Odesskii A. V., Pavlov M. V., Sokolov V. V. Classification of integrable Vlasov-type equations, *Theoret. and Math. Phys.*, 2008, vol. 154, no. 2, pp. 209–219; see also: *Teoret. Mat. Fiz.*, 2008, vol. 154, no. 2, pp. 249–260.
- [5] Vedenyapin V. V., Fimin N. N. The Liouville equation, the hydrodynamic substitution, and the Hamilton–Jacobi equation, *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 2, pp. 697–699; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2012, vol. 446, no. 2, pp. 142–144.
- [6] Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Negmatov M. A. *Equations of the Vlasov and Liouville type, their macroscopic, energetic and hydrodynamic consequences*, Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2016.
- [7] Vedenyapin V. V., Fimin N. N. The Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution, *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 2, pp. 154–157; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2015, vol. 461, no. 2, pp. 136–139.
- [8] Vedenyapin V. V., Fimin N. N. The Hamilton–Jacobi method for non-Hamiltonian systems, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 279–286 (Russian).
- [9] Kozlov V. V. The hydrodynamics of Hamiltonian systems, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 1983, vol. 38, no. 6, pp. 9–23; see also: *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1983, no. 6, pp. 10–22.
- [10] Kozlov V. V. *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), vol. 31, Berlin: Springer, 1996.
- [11] Kozlov V. V. *General theory of vortices*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 67, Berlin: Springer, 2003.
- [12] Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics: Vol. 2*, New York: Interscience, 1962.
- [13] Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N. *Systems of quasilinear equations*, Moscow: Nauka, 1978 (Russian).
- [14] Jacobi C. G. J. Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen Irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, 1837, vol. 1837, no. 17, pp. 97–162. See also: Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke: Vol. 4*, K. Weierstrass (Ed.), Berlin: Reiner, 1886, pp. 57–127.
- [15] Saltykow N. N. Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues, *J. Math. Pures Appl.*, 1897, vol. 3, pp. 423–428.

- [16] Santilli R. M. *Foundations of theoretical mechanics: Vol. 2: Birkhoffian generalizations of Hamiltonian mechanics*, New York: Springer, 1983.
- [17] Fimin N. N., Chechetkin V. M. Dynamics of particles in the original Schwarzschild metric, *Preprint № 49*, Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2015 (Russian).
- [18] Monge G. Supplement, où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées, *Mém. Acad. Sci. Paris*, 1784, pp. 502–576.
- [19] Clebsch A. Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, 1859, vol. 56, pp. 1–10.
- [20] Seliger R. L., Whitham G. B. Variational principles in continuum mechanics, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1968, vol. 305, no. 1480, pp. 1–25.
- [21] van Saarloo W. A canonical transformation relating the Lagrangian and Eulerian description of ideal hydrodynamics, *Phys. A*, 1981, vol. 108, nos. 2–3, pp. 557–566.

Application of the hydrodynamic substitution for systems of equations with the same principal part

Nikolay N. Fimin¹, Valery M. Chechetkin²

^{1,2}Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
pl. Miusskaya 4, Moscow, 125047, Russia

²Institute for Design Automation, Russian Academy of Sciences,
ul. 2nd Brestskaya 19/18, Moscow, 123056, Russia

¹n.fimin@hotmail.com, ²chechetv@gmail.com

The properties of quasi-linear differential equations with the same the principal part are considered. Their connection with the reduced system of Euler equations is established, which results from the hydrodynamic substitution in the kinetic Liouville and Vlasov equations. When considering the momentum equation of the Euler system, it turns out that it reduces to a special form such as Liouville–Jacobi equation. This equation can also be investigated using a hydrodynamic substitution, but of conjugate type. The application of this substitution (of the second order) makes it possible to symmetrize the technique of applying hydrodynamic substitution and to extend the class of equations of hydrodynamic type to which systems of (in the general case non-Hamiltonian) first-order autonomous differential equations. Examples are given of the use of the developed formalism for systems of gravitating particles in post-Newtonian approximation and the hydrodynamic systems described by Monge potentials, with the aim of constructing the Liouville–Jacobi equations and applying to them a modified hydrodynamic substitution.

MSC 2010: 34A25

Keywords: Liouville equation, quasi-linear equations, hydrodynamic substitution, Monge potentials, equations with the same principal part

Received April 06, 2017, accepted October 18, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 53–61 (Russian)