ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 532.51

MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

**Стационарное конвективное
течение Куэтта – Хименца при квадратичном нагреве
нижней границы слоя жидкости**

В. В. Привалова, Е. Ю. Просвиряков

Приведено точное решение системы Обербека – Буссинеска, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, подогреваемой квадратичным источником. Найденные точные решения обобщают изотермическое течение Куэтта и конвективные движения Бириха – Остроумова. Характерная особенность предложенного класса точных решений заключается в учете горизонтального градиента гидродинамических полей. Приведен анализ полученных решений, благодаря которому получен критерий, объясняющий существование противотечений в движущейся неизотермической вязкой несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: течение Куэтта, течение Бириха – Остроумова, плоская конвекция Бенара – Рэлея, квадратичный нагрев, точное решение, противотечение

Получено 28 июня 2017 года
После доработки 23 октября 2017 года

Привалова Валентина Викторовна
valentprival@gmail.com
Институт машиноведения УрО РАН
620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

Просвиряков Евгений Юрьевич
pros@mail.ru
Казанский государственный национальный исследовательский университет им. А. Н. Туполева
420111, Россия, г. Казань, ул. Карла Маркса, д.10
Институт машиноведения УрО РАН
620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д.34

Введение

При решении различных технических задач и описании технологических процессов часто используется модельное представление течение жидкости, движущейся с заданными скоростями между двумя бесконечными недеформируемыми пластинами. Иными словами, на границах слоя жидкости задаются скорости. Как известно, такое течение вязкой несжимаемой жидкости описывается точным решением Куэтта [1]. При вычислении этого решения использовалось приближение Стокса [2, 3], которое основано на предположении о преобладании вязких сил над инерционными эффектами, возникающими в движущейся жидкости. Стоит подчеркнуть, что полученное решение удовлетворяет нелинейным уравнениям Навье–Стокса. Интерпретация данного решения в качестве ползущего течения обусловлена тождественным обращением в нуль конвективной производной в уравнениях движения вязкой несжимаемой жидкости.

Несмотря на ограниченность применения решения Куэтта в экспериментальной гидродинамике [4–8], это решение находит широкое применение в прикладной и технической гидродинамике [4–8]. Таким образом, интерес к течению Куэтта не исчезает со временем. Это решение остается одним из самых популярных при исследовании на устойчивость движения для различных классов возмущающих факторов, поскольку допускает нахождение точного решения уравнения Орра–Зоммерфельда [4–8].

Использование при расчетах изотермического решения Куэтта ограничивается диапазоном изменения температуры. Иными словами, необходимо найти точное решение системы Обербека–Буссинеска, описывающей конвективное движение несжимаемой жидкости, обладающей диссипативными свойствами. Отметим, что впервые точные решения для таких краевых задач были получены представителями пермской гидродинамической школы: Остроумовым [11] и Бирихом [12]. Данные решения, как и решение Куэтта, оказались очень полезными и продуктивными для исследователей [10, 13–22].

В настоящей статье приводится обобщение известных классов течений Бириха–Остроумова [11, 12] не только для давления и температуры, но и для скоростей жидкости. Для указанных гидродинамических полей учитывается горизонтальный градиент соответствующих функций, что приводит, как будет показано ниже, к образованию противотечений в жидкости. Возможность постановки краевой задачи при задании горизонтальной скорости и учете температуры приводит к необходимости рассматривать аналог течения Хименца [9], которое можно интерпретировать как суперпозицию течений Куэтта и Хименца при задании теплового источника на нижней границе. В статье [10] изучена конвекция при параболическом нагреве или охлаждении верхней границы бесконечного слоя жидкости.

1. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое жидкости с плоскими границами (рис. 1), описывающие влияние температуры на распределение гидродинамических полей, в приближении Буссинеска [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + g\beta T,\end{aligned}$$

Рис. 1. Геометрия задачи.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Здесь V_x и V_z — скорости, параллельные соответствующим координатным осям прямоугольной декартовой системы координат, P — отклонение давления от гидростатического, отнесенное к постоянной средней плотности жидкости ρ , T — отклонение от средней температуры, ν , χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно, g — ускорение свободного падения, β — температурный коэффициент объемного расширения жидкости [3].

Решение системы Обербека – Буссинеска (1.1) будем искать в следующем виде [10]:

$$V_x = U + xu, \quad V_z = w,$$

$$P = P_0 + \frac{x^2}{2} P_{11}, \quad (1.2)$$

$$T = T_0 + \frac{x^2}{2} T_{11}.$$

Неизвестные функции U , u , w , T_0 , T_{11} , P_0 , P_{11} в гидродинамических полях (1.2) зависят от координаты z и t . Решения (1.2) обобщают класс точных решений для скоростей, линейно растущих по горизонтальным координатам. Этот класс решений систематически начал изучаться Линем для задач магнитной гидродинамики в [23], хотя уже Эйлер использовал частные случаи выражений (1.2) для скоростей, описывающих изотермическое движение газов [24]. Точное решение (1.2), описывающее стационарное натекание жидкости из бесконечности на плоскость с условием прилипания на нижней границе при постоянной температуре впервые было рассмотрено Хименцем [9]. Нестационарные аналоги решения Хименца были изучены Рябушинским [25, 26].

В обзоре [27] приведен подробный анализ точных изотермических решений. Показано, что компоненты давления связаны с коэффициентами представления (1.2) для скоростей. Таким образом, существует связь давления со скоростью. Аналогично устанавливается связь скоростей с температурой. Отметим, что такого рода связи для идеальной жидкости были исследованы в [28]. Решения (1.2), описывающие течения различных жидкостей и газов, подробно рассматривались в работах [4–20], групповая классификация решений в рамках рассматриваемого класса представлена в [29–32]. Новые физически содержательные результаты, полученные в классе точных решений Хименца – Рябушинского, содержатся в статьях [33, 34]. Далее рассмотрим установившееся движение. Все коэффициенты в функциях (1.2) в этом случае зависят только от координаты z . Классическое изотермическое течение Куэтта является однонаправленным потоком [1], в котором существенными являются диффузионные эффекты при пренебрежении конвективными слагаемыми в уравнениях

сохранения импульса. При изучении влияния квадратичного источника температуры на структуры движения жидкости будем использовать приближение Стокса и для уравнения теплопроводности. В этом случае уравнения (1.1) редуцируются к следующей системе:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + g\beta T, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Подставим выражения (1.2) в (1.3), получим систему входящих в класс точных решений (1.2) обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций. Уравнения запишем в том порядке, в котором они будут проинтегрированы:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 T_{11}}{dz^2} &= 0, \quad \frac{d^2 T_0}{dz^2} + T_{11} = 0, \\ \frac{dP_{11}}{dz} &= g\beta T_{11}, \quad \nu \frac{d^2 u}{dz^2} = P_{11}, \quad \nu \frac{d^2 U}{dz^2} = 0, \\ \frac{dw}{dz} + u &= 0, \quad \frac{dP_0}{dz} = g\beta T_0 + \nu \frac{d^2 w}{dz^2}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

2. Точное решение уравнений естественной конвекции

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4) одиннадцатого порядка имеет точное решение, которое принадлежит к классу полиномов:

$$\begin{aligned}T_{11} &= C_1 z + C_2, \quad T_0 = -C_1 \frac{z^3}{3!} - C_2 \frac{z^2}{2!} + C_3 z + C_4, \\ P_{11} &= g\beta \left(C_1 \frac{z^2}{2!} + C_2 z \right) + C_5, \\ u &= \frac{g\beta}{\nu} \left(C_1 \frac{z^4}{4!} + C_2 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{C_5}{\nu} \frac{z^2}{2!} + C_6 z + C_7, \\ U &= \frac{1}{\nu} (C_1 z + C_2), \\ w &= -\frac{g\beta}{\nu} \left(C_1 \frac{z^5}{5!} + C_2 \frac{z^4}{4!} \right) - \frac{C_5}{\nu} \frac{z^3}{3!} - C_6 \frac{z^2}{2!} - C_7 z + C_{10}, \\ P_0 &= g\beta \left(-2C_1 \frac{z^4}{4!} - 2C_2 \frac{z^3}{3!} + C_3 \frac{z^2}{2!} + C_4 z \right) - C_5 \frac{z^2}{2!} - \nu (C_6 z + C_7) + C_{11}.\end{aligned}$$

Здесь C_i , где $i = \overline{1; 11}$, — свободные параметры краевой задачи, являющиеся постоянными интегрирования. Очевидно, что степень многочленов T_{11} , T_0 , P_{11} , P_0 , u , U , w не превосходит пяти. Для вычисления постоянных интегрирования сформулируем граничные условия, определяющие конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости.

На нижней границе, определяемой уравнением плоскости $z = 0$, выполняются условия прилипания:

$$V_x(0) = V_z(0) = 0.$$

На верхней границе при $z = h$ задано неоднородное распределение скорости

$$V_x(h) = W + \Omega x.$$

При описании конвективного движения будем полагать, что верхняя граница является изотермической с отсчетной температурой

$$T(h) = 0.$$

На нижней границе задан тепловой источник по следующему закону:

$$T(0) = \Theta + \frac{\Theta x^2}{2l^2},$$

где l — характерный масштаб длины по горизонтали (рис. 1).

В силу того, что рассматривается бесконечный слой жидкости по координате x , параметр l должен быть равен бесконечности. Однако в природе физические процессы происходят на конечных размерах. Введение конечного числа l , играющего роль характерного масштаба по горизонтали, дает оценку горизонтального размера слоя жидкости, на котором можно пренебречь граничными условиями на боковых границах. Следовательно, для таких значений параметра l при решении краевых задач в качестве абстрактного математического объекта можно использовать бесконечный слой жидкости.

Используя формулы (1.2) и линейность граничных условий, получим при $z = 0$

$$U = u = w = 0, \quad (2.1)$$

$$T_0 = \Theta, \quad T_{11} = \frac{\Theta}{l^2}. \quad (2.2)$$

На верхней границе при $z = h$ справедливы равенства

$$U = W, \quad u = \Omega, \quad (2.3)$$

$$T_0 = 0, \quad T_{11} = 0, \quad (2.4)$$

$$P_0 = S, \quad P_{11} = 0. \quad (2.5)$$

Конвективное движение жидкости, определяемое формулами (1.2), в силу граничных условий (2.1)–(2.5) является обобщением течения Куэтта и Хименца. Если в краевом условии (2.3) положить $\Omega = 0$ и исключить изменение температуры на нижней границе (2.2), приняв $\Theta = 0$, то получим краевую задачу, описывающую однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости при постоянном давлении $P = S$ — течение Куэтта.

Обратим внимание, что при изучении обобщенного течения Куэтта – Хименца не сформулировано граничное условие на верхней границе $z = h$ относительно вертикальной скорости V_z . Таким образом, задавая на плоскости $z = h$ только горизонтальную скорость V_x , в зависимости от управляющих параметров краевой задачи получим несколько постановок задач. Ниже они будут изучены.

Далее вводим безразмерный параметр $\delta = \frac{h}{l}$, характеризующий отношение масштабов анизотропного слоя жидкости, и в результате общее решение задачи (1.4) при заданных граничных условиях (2.1)–(2.5) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_0 &= \Theta \left[\left(\frac{1}{3!} \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{z}{h} + \frac{1}{3} \right) \frac{z}{h} \delta^2 + \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right], \quad T_{11} = \frac{\Theta}{l^2} \left(1 - \frac{z}{h} \right), \\ P_0 &= g\beta\Theta h \left[\frac{\delta^2}{4!} \left(2 \frac{z^4}{h^4} - 8 \frac{z^3}{h^3} + 10 \frac{z^2}{h^2} - 3 \frac{z}{h} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 \right] + \Omega\nu \left(1 - \frac{z}{h} \right) + S, \\ P_{11} &= -g\beta\Theta \frac{\delta^2}{h} \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{h^2} - \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right), \\ U &= W \frac{z}{h}, \quad u = -\frac{g\beta\Theta\delta^2 h}{4!\nu} \left(\frac{z^3}{h^3} - 4 \frac{z^2}{h^2} + 6 \frac{z}{h} - 3 \right) \frac{z}{h} + \Omega \frac{z}{h}, \\ w &= \frac{g\beta\Theta\delta^2 h^2}{240\nu} \left(2 \frac{z^3}{h^3} - 10 \frac{z^2}{h^2} + 20 \frac{z}{h} - 15 \right) \frac{z^2}{h^2} - \frac{\Omega h}{2} \frac{z^2}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Анализ точного решения краевой задачи

Качественное поведение функции

$$T_{11} = \frac{\Theta}{l^2} \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

показано на рисунке 2. Функция изменяется по линейному закону, принимая экстремальное значение на нижней границе. При $\Theta > 0$ наблюдается минимум, при $\Theta < 0$ — максимум.

Рис. 2. График функции T_{11} .

Температура T_0 (рис. 3) может быть представлена в силу граничных условий (2.2) и (2.4)

$$T_0 = \frac{\Theta}{6} \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \left[\delta^2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 2\delta^2 \frac{z}{h} - 6 \right] = \frac{\Theta}{6} \left(\frac{z}{h} - 1 \right) f \left(\frac{z}{h} \right).$$

Покажем, что квадратичный многочлен $f \left(\frac{z}{h} \right)$ не имеет нулей на отрезке $\frac{z}{h} \in [0; 1]$. Функция $f \left(\frac{z}{h} \right)$ принимает нулевые значения при $z = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}}$. Очевидно, что справедливы

Рис. 3. График функции T_0 .

следующие оценки для корней многочлена $f\left(\frac{z}{h}\right)$:

$$1 + \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}} > 1, \quad 1 - \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}} < 0.$$

Таким образом, функция T_0 принимает значения одного знака (расслоение поля фоновой температуры не происходит), который противоположен знаку значения температуры Θ на верхней границе, на которой достигается экстремум при $\delta \in [0, \sqrt{3}]$. Для $\delta > \sqrt{3}$ (преобладание адвекции) всегда существует точка $z = 1 - \sqrt{2 + \frac{\delta^2}{3}}$, в которой температура принимает экстремальное значение (рис. 3)

$$T_0 = \Theta \frac{(\delta^2 (6 + \delta^2))^{3/2}}{9\sqrt{3}\delta^4}.$$

Таким образом, изолинии температуры при любых значениях параметра δ не имеют замкнутых изолиний (рис. 4), а при крупномасштабных течениях ($\delta \ll 1$) фоновая температура T_0 монотонно изменяется по толщине слоя жидкости.

Рис. 4. Изолинии нормированной температуры.

Перейдем к изучению свойств поля скоростей. Представим градиент скорости u следующим образом:

$$u = \frac{z}{h} g \left(\frac{z}{h} \right) = \frac{z}{h} \left[\Omega - \frac{g\beta\Theta\delta^2 h}{4! \nu} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^3 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 + 6 \left(\frac{z}{h} \right) - 3 \right) \right].$$

При $\Omega = 0$ скорость V_x принимает вид

$$V_x = -\frac{xg\beta\Theta\delta^2 h}{4! \nu l} \frac{z}{h} \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 3 \left(\frac{z}{h} \right) + 3 \right].$$

Данная функция имеет два нуля на области определения, которые являются граничными точками: $z = 0$ и $z = h$. Очевидно, что во внутренних точках слоя жидкости $z \in (0; 1)$ скорость сонаправлена оси абсцисс при $\Omega > 0$, принимая максимальное значение $u = -0.47247 \frac{g\beta\Theta\delta h}{4! \nu}$ при $z = 0.370039h$ (рис. 5). При $\Omega < 0$ скорость течет в противоположном оси Ox направлении, достигая минимума. Данный гидродинамический эффект наблюдается из-за того, что многочлен в квадратных скобках принимает только положительные значения.

Если $\Omega \neq 0$, то скорость V_x принимает значения одного знака во всех внутренних точках слоя, кроме $z = 0$ (условие прилипания) при выполнении неравенства

$$\Omega \left(\Omega + \frac{g\beta\Theta\delta h^2}{8\nu l} \right) > 0.$$

Если имеет место противоположное неравенство, то скорость имеет застойную точку $z = 0.377861h$ (точку покоя) и принимает как положительные, так и отрицательные значения, достигая при этом экстремального значения внутри слоя (это показано на рисунке 6).

Если провести аналогичные рассуждения, то получим условие, при котором в жидкости будет наблюдаться два встречных потока по оси Oz (рис. 6):

$$\left(\Omega + \frac{g\beta\Theta\delta^2 h}{8\nu} \right) \left(\Omega + \frac{g\beta\Theta\delta^2 h}{40\nu} \right) > 0.$$

Анализируя последнее неравенство, можно заметить, что противотечение при поперечном движении жидкости возникает при перекрестном влиянии граничного пространственного

Рис. 5. График функции V_x при $\Omega = 0$, нормированной на величину $-\frac{xg\beta\Theta\delta^2 h}{4! \nu l}$.

Рис. 6. Функция тока при наблюдении противотечений в жидкости при $g\beta\Theta\delta^2h = -19.2\nu$ и $\Omega = 1$.

ускорения Ω и теплового возмущения Θ . При расслоении поля скоростей скорость жидкости V_z на границе $z = h$ отлична от нуля:

$$V_z(h) = w(h) = -\frac{\Omega h}{2} - \frac{g\beta\Theta\delta^2h^2}{80\nu}.$$

Если $w(h) > 0$, то происходит отсос жидкости с верхней границы. Такое граничное условие используется в океанологии при построении простейшего точного решения уравнений движений океана [7]. Если $w(h) < 0$, то в этом случае происходит приток жидкости из внешней среды, что может быть обусловлено выпадением осадков в открытый водоем [7].

При выполнении равенства $w(h) = 0$ получается граничное условие типа «твердой крышки», которое также широко используется при описании крупномасштабных экваториальных противотечений [35]. Аналогично можно изучить ситуацию, когда справедливо равенство на верхней границе

$$\frac{dw}{dz}(h) = 0.$$

Это краевое условие более точно отражает краевые эффекты, проявляющиеся на границе атмосферы и океана [35], поскольку оно определяет принадлежность вектора скорости касательной плоскости верхней границы слоя жидкости $z = h$. Следует также отметить, что при определенных значениях параметров справедливо динамическое условие [17]

$$S = P_0(h) = -2\nu\frac{dw}{dz}(h) = 2\nu u(h) = 2\nu\Omega.$$

Таким образом, исследование свойств скорости $V_z = w$ на верхней границе позволяет установить условия применимости полученного точного решения для описания крупномасштабных конвективных течений при разных типах краевых условий.

Заключение

В статье приведено новое точное решение, описывающее плоское конвективное движение Куэтта вязкой несжимаемой жидкости. Осуществляется подогрев только нижней границы слоя жидкости по линейному закону. Показано, что скорость, параллельная плоским границам, имеет профиль, описываемый многочленом четвертой степени. Таким образом, учет горизонтального градиента температуры приводит к качественно иному поведению скорости, что ведет к наблюдению противотечений в жидкости, по сравнению со скоростью, заданной на верхней границе. Еще одной особенностью рассмотренного класса точных

решений является квадратичный профиль вертикальной скорости, который можно объяснить учетом градиента горизонтальной скорости.

References

- [1] Couette M. Études sur le frottement des liquides, *Ann. Chim. Phys. (6)*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
- [2] Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums, *Trans. Camb. Philos. Soc.*, 1851, vol. 9, part 2, pp. 8–106.
- [3] Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of theoretical physics: Vol. 6. Fluid mechanics*, 2nd ed., Oxford: Butterworth/Heinemann, 2003.
- [4] Getling A. V. *Rayleigh – Bénard convection: Structures and dynamics*, Adv. Ser. Nonlinear Dyn., vol. 11, Singapore: World Sci., 1998.
- [5] Kabanov A. S. *The theory of free convection from local sources with meteorological applications*, Leningrad: Gidrometeoizdat, 1984 (Russian).
- [6] Zimin V. D., Fricke P. G. *The turbulent convection*, Moscow: Nauka, 1988 (Russian).
- [7] Aristov S. N., Schwarz K. G. *Vortex flows of advective nature in a rotating fluid layer*, Perm: Perm Gos. Univ., 2006 (Russian).
- [8] Aristov S. N., Schwarz K. G. *Vortex flows in thin fluid layers*, Kirov: Vyatka Gos. Univ., 2011 (Russian).
- [9] Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder, *Dingler's Polytechn. J.*, 1911, vol. 326, pp. 321–324.
- [10] Aristov S. N., Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer, *Nelin. Dinam.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 167–178.
- [11] Ostroumov G. A. *Free convection under the condition of the internal problem (NACA-TM-1407, Rept-4281)*, Washington, D.C.: NASA, 1958.
- [12] Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44; see also: *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 69–72.
- [13] Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Couette flows, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (Russian).
- [14] Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard – Marangoni viscous incompressible fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 3(32), pp. 110–118 (Russian).
- [15] Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of thermocapillary convection in a localized heating of a plane layer of a viscous incompressible fluid, *Vestn. Kazan. Gos. Tekhn. Univ.*, 2014, no. 3, pp. 7–12 (Russian).
- [16] Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. On layered flows of planar free convection, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657 (Russian).
- [17] Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V. *Mathematical models of convection*, De Gruyter Stud. Math. Phys., vol. 5, Berlin: de Gruyter, 2012.
- [18] Andreev V. K. Birikh solution of convection equations and some of its generalizations, *Preprint № 1–10*, Krasnoyarsk: Inst. Computer Modeling, Sib. Branch, Russian Acad. of Sci., 2010 (Russian).
- [19] Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer, *Microgravity Sci. Technol.*, 2009, vol. 21, suppl. 1, pp. 129–137.
- [20] Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203; see also: *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 34–40.
- [21] Broman G. I., Rudenko O. V. Submerged Landau jet: Exact solutions, their meaning and application, *Physics–Uspekhi*, 2010, vol. 53, no. 1, pp. 91–98; see also: *Uspekhi Fiz. Nauk*, 2010, vol. 180, no. 1, pp. 97–104.
- [22] Skul'skii O. I., Aristov S. N. *Mechanics of anomalous viscous fluids*, Moscow–Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2003 (Russian).

- [23] Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395.
- [24] Nemenyi P. F. Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua, in *Advances in Applied Mechanics: Vol. 2*, R. von Mises, Th. von Kármán (Eds.), New York: Acad. Press, 1951, pp. 123–151.
- [25] Riabouchinsky D. Quelques considérations sur les mouvements plans rotationnels d'un liquide, *C. R. Hebd. Acad. Sci.*, 1924, vol. 179, pp. 1133–1136.
- [26] Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*, Boca Raton, Fla.: CRC, 2007.
- [27] Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier – Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662; see also: *Teoret. Osnovy Khim. Tekhnol.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 547–566.
- [28] Aristov S. N., Polyanin A. D. New classes of exact solutions of Euler equations, *Dokl. Phys.*, 2008, vol. 53, no. 3, pp. 166–171; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2008, vol. 419, no. 3, pp. 328–333.
- [29] Pukhnachev V. V. Symmetries in Navier – Stokes equations, *Uspekhi Mekh.*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6–76 (Russian).
- [30] Pukhnachev V. V. Group properties of the equations of Navier – Stokes in the planar case, *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1960, vol. 1, no. 1, pp. 83–90 (Russian).
- [31] Ibragimov N. H. *CRC handbook of Lie group to differential equations: Vol. 2. Applications in engineering and physical sciences*, Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1995.
- [32] Polyanin A. D., Kutepov A. M., Vyazmin A. V., Kazenin D. A. *Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering*, London: Taylor & Francis, 2002.
- [33] Aristov S. N., Knyazev D. V. Viscous fluid flow between moving parallel plates, *Fluid Dynam.*, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 476–482; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zidk. Gaza*, 2012, no. 4, pp. 55–61.
- [34] Petrov A. G. Exact solution of the Navier – Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 642–646; see also: *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 13–18.
- [35] Korotaev G. K., Mikhailova E. N., Shapiro N. B. *Theory of equatorial countercurrents in the World Ocean*, Kiev: Naukova Dumka, 1986 (Russian).

Steady convective Couette flow for quadratic heating of the lower boundary fluid layer

Valentina V. Privalova¹, Evgeniy Yu. Prosviryakov²

^{1,2}Institute of Engineering Science UB RAS,
ul. Komsomolskaya 34, Yekaterinburg, 620049, Russia

²Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev
ul. Karla Marksa 10, Kazan, 420111, Russia

¹valentprival@gmail.com, ²pros@mail.ru

This paper presents an exact solution to the Oberbeck – Boussinesq system which describes the flow of a viscous incompressible fluid in a plane channel heated by a linear point source. The exact solutions obtained generalize the isothermal Couette flow and the convective motions of Birikh – Ostroumov. A characteristic feature of the proposed class of exact solutions is that they integrate the horizontal gradient of the hydrodynamic fields. An analysis of the solutions obtained is presented and thus a criterion is obtained which explains the existence of countercurrents moving in a nonisothermal viscous incompressible fluid.

MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

Keywords: Couette flow, Birikh – Ostroumov flow, planar Rayleigh – Benard convection, quadratic heating, exact solution, counterflow

Received June 28, 2017, accepted October 23, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 69–79 (Russian)