ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.3

MSC 2010: 37J60, 37G35, 70E18

Регулярная и хаотическая динамика в «резиновой» модели волчка Чаплыгина*

А. В. Борисов, А. О. Казаков, Е. Н. Пивоварова

В работе исследуется качение динамически несимметричного неуровновешенного шара (волчка Чаплыгина) в поле тяжести по плоскости в предположении отсутствия проскальзывания и прокручивания в точке контакта. Приводится описание странных аттракторов, существующих в системе, а также подробно описывается сценарий рождения одного из них через последовательность бифуркаций удвоения периода. Кроме того, проанализирована динамика системы в абсолютном пространстве и показано, что поведение точки контакта при наличии в системе странных аттракторов существенно зависит от характеристик аттрактора и может иметь как хаотический, так и близкий к квазипериодическому характер.

Ключевые слова: волчок Чаплыгина, неголономная связь, «резиновая» модель, странный аттрактор, бифуркация, траектория точки контакта

*Перевод статьи “Regular and chaotic dynamics in the rubber model of a Chaplygin top”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 7–8, pp. 885–901.

Получено 21 ноября 2016 года

После доработки 06 декабря 2016 года

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-08-09261-а). Работа А. В. Борисова (разделы 1, 4, 6) выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (№ 1.2404.2017/4.6). Работа А. О. Казакова (разделы 2, 3) поддержана ЦФИ ВШЭ (проект 90) в 2017 г., грантом РФФИ 16-51-10005, а также фондом «Династия». Работа Е. Н. Пивоваровой (раздел 5) выполнена в рамках гранта Российского научного фонда № 15-12-20035.

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Пивоварова Елена Николаевна

l.n.pivovarova@gmail.com

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Казаков Алексей Олегович

kazakovdz@yandex.ru

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

Введение

1. Исследование качения динамически несимметричного уравновешенного шара по плоскости восходит к работе С. А. Чаплыгина [41] и было продолжено в [10, 29, 36]. Вследствие интегрируемости этой задачи поведение динамических характеристик системы оказывается регулярным, и для их анализа могут быть использованы хорошо развитые качественные и топологические методы. Одним из возможных обобщений данной системы является задача о качении шара Чаплыгина по сфере — эта задача существенно сложнее, ее исследование выполнено в работах [4, 13].

Поверхность, для которой выполняется классическая связь отсутствия проскальзывания в точке контакта, по терминологии, предложенной авторами [20], называют «мраморной» (marble rolling). Для упрощения анализа качения в различных областях, в частности, в робототехнике, используется другая модель поверхности, которая по той же терминологии называется «резиновой» (rubber rolling) и которая предполагает кроме отсутствия проскальзывания наложение условия отсутствия прокручивания, то есть проекция угловой скорости на нормаль к поверхности равняется нулю. Подробное развитие модели «резинового» качения содержится в работе [15]. Эти модели («резиновая» и «мраморная») имеют как различия, так и сходство. Иерархия поведения динамических систем в «мраморной» модели подробно исследована в [14, 17]. Отметим, что «резиновая» модель, хотя и является более простой, изучена пока еще очень слабо. Как «мраморная», так и «резиновая» модели качения предполагают наличие неинтегрируемых связей и могут быть рассмотрены с помощью современных методов неголономной механики. С историческим развитием и основными достижениями неголономной механики читатель может ознакомиться по недавнему обзору [16].

Задача о движении динамически несимметричного шара со смещенным центром масс в поле тяжести в «резиновой» постановке ранее систематически не рассматривалась (не рассматривался даже уравновешенный шар, хотя эта задача и интегрируема в квадратурах). Некоторые обоснования «резиновой» модели для качения шара Чаплыгина получены недавно в [24], однако очевидно, что вопрос требует дальнейшего изучения. В этой работе модель шара Чаплыгина со смещенным центром масс мы будем называть волчком Чаплыгина. Отметим, что существуют работы [6, 39], в которых для «мраморной» модели волчка Чаплыгина указано существование восьмерочного и спирального странных аттракторов, а также странного аттрактора, возникающего в результате разрушения квазипериодического режима. Исследования по «резиновой» модели такой системы пока только начинаются [27, 28]. Так, в [27] найден аттрактор необычной формы, который фактически является квазиаттрактором [1], а кроме того, исследованы бифуркации (как локальные, так и глобальные), приводящие к возникновению этого аттрактора. В [28] исследовано также влияние постоянного гиростатического момента на хаотическую динамику системы.

2. В данной работе мы подходим к исследованию динамики волчка Чаплыгина более систематически на основе анализа карты динамических режимов системы, позволяющей не только обнаруживать странные аттракторы, но и проследивать сценарии их возникновения. В результате проведенных исследований нам удалось обнаружить странный аттрактор фейгенбаумовского типа, переход к которому происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. Заметим, что рассматриваемая система обладает слабой диссипацией и демонстрирует существенную мультистабильность (когда в фазовом пространстве системы сосуществует множество различных аттракторов). Как следствие, построение карт режимов, а также вычисление универсальных констант приводит к существенным вычис-

лительным затратам. Отметим, что специфическая диссипация (возникающая вследствие неголономности связей), как правило, связана с наличием различных инволюций и может приводить к странным аттракторам. Однако вполне вероятно, что не все возможные в общей теории аттракторы реализуются в неголономных системах. Вследствие того, что наличие аттракторов имеет существенное влияние на динамику (например, на траекторию точки контакта), их поиск и изучение представляет собой важную самостоятельную задачу.

3. Одним из направлений исследования является изучение поведения точки контакта, так как траектория движения шара важна для анализа динамики системы и может быть использована для сравнения с экспериментальными данными. Для уравновешенного шара Чаплыгина в «резиновой» постановке, вследствие дополнительных ограничений (на положение центра масс), все траектории движения имеют направленный дрейф с поперечными колебаниями (см. рис. 1a). При смещенном центре масс, но в отсутствие поля тяжести, система обладает дополнительным интегралом [12], однако при этом отсутствует гладкая инвариантная мера [3, 34]. Топологическое интегральное слоение изоморфно случаю Эйлера – Пуансо в динамике твердого тела, но распределение чисел вращения образует канторову лестницу, препятствующую интегрируемости в квадратурах. Поведение точки контакта при этом регулярно и ограничено (см. рис. 1b).

Рис. 1. Характерные траектории движения по плоскости уравновешенного динамически несимметричного шара в поле тяжести (a) и неуравновешенного динамически несимметричного шара в отсутствие поля тяжести (b).

В рассматриваемой задаче (несмотря на то, что в фазовом пространстве приведенной системы существует несколько аттракторов, в том числе и сложных) поведение точки контакта может оказаться близким к квазипериодическому движению, вблизи которого происходят хаотические колебания с крайне малой амплитудой. В рамках настоящей работы мы показываем, что поведение точки контакта для волчка Чаплыгина зависит не только от природы аттрактора (хаотичности или регулярности), но и от его характеристик, таких как показатели размерности аттрактора, показатели Ляпунова и пр. Для хаотического поведения точки контакта в работе вычисляются различные параметры, характеризующие диффузию (случайное разбегание траекторий) и направленное движение. Близкое к регулярному поведение точки контакта в случае даже классических аттракторов показывает,

что появление в приближенных моделях типа Лоренца странных аттракторов может не приводить к проявлению реального хаотического поведения системы.

Отметим, что рассматриваемая в работе задача имеет модельный характер. Ее исследование актуально не только для теории динамических систем (для понимания возникновения и роли аттракторов в динамических системах), но и для робототехники и теории управления: в настоящее время проблема управления телами сферической формы (сферороботами) вызывает большой поток исследований (см., например, [2, 8, 9, 18, 19] и литературу к ним). Кроме того, заметим, что нерегулярность поведения точки контакта может быть использована для создания направленного дрейфа; задача о дрейфе и диффузии точки контакта в современной концепции может быть использована для управления хаосом [31], хотя до сих пор эта идея в механических системах реализована слабо (исключая, возможно, небесную механику [30]). Более продвинутые исследования имеются только для управления регулярными системами [8, 9].

1. Уравнения движения и первые интегралы

Рис. 2

Рассмотрим движение динамически несимметричного неуравновешенного шара (волчка Чаплыгина) по горизонтальной плоскости (рис. 2). Для описания динамики системы выберем неподвижную систему координат $O\alpha\beta\gamma$ и подвижную $C\xi\eta\zeta$, оси которой жестко связаны с телом и направлены вдоль главных осей инерции. Связь неподвижной системы координат с подвижной задается матрицей перехода $\mathbf{Q} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Обозначим через o геометрический центр шара, C — его центр масс, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор смещения центра масс шара относительно геометрического центра. Здесь и далее, если не оговорено иное, все векторы (выделенные жирным шрифтом) записаны в проекциях на оси подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$.

Положение системы будем задавать координатами центра масс шара $\mathbf{r}$ и его ориентацией в пространстве при помощи матрицы $\mathbf{Q}$. Таким образом, конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение $\mathcal{N} = \{\mathbf{r}, \mathbf{Q}\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Будем полагать, что на систему наложены связи отсутствия проскальзывания и верчения в точке контакта шара с поверхностью. Эти связи описываются уравнениями

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий центр масс с точкой контакта, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость шара, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор нормали к поверхности в точке контакта.

Уравнения движения, описывающие эволюцию переменных $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, имеют вид [12]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + mg(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}) + \lambda_0\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \lambda_0 &= -\frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + mg(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a}))}{(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T$ — тензор инерции шара относительно точки контакта, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции шара, записанный в системе координат, связанной с шаром, m — масса шара, g — ускорение свободного падения.

Дополнив уравнения (1.2) кинематическими соотношениями, описывающими траекторию точки контакта шара и его ориентацию,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R(\beta, \omega), & \dot{y} &= -R(\alpha, \omega), \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \omega, & \dot{\beta} &= \beta \times \omega,\end{aligned}\tag{1.3}$$

получим замкнутую систему уравнений, полностью описывающую движение шара по плоскости.

Радиус-вектор центра масс $\mathbf{r}$ может быть выражен через вектор нормали к поверхности в точке контакта в виде

$$\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}.$$

С учетом данного соотношения, уравнения (1.2) зависят только от переменных $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и, следовательно, образуют замкнутую приведенную систему уравнений.

Система уравнений (1.2) обладает двумя первыми интегралами:

$$\text{интеграл энергии} \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$$

$$\text{и геометрический интеграл} \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1;$$

а кроме того, в данной системе связь отсутствия верчения также может рассматриваться как частный интеграл:

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

Для численного исследования динамики рассматриваемой системы наиболее удобными являются переменные Андуайе–Депри [35, 37], связанные с переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ соотношениями

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \\ \omega_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \\ \omega_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \frac{L}{G} \cos g \sin l + \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \frac{L}{G} \cos g \cos l - \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= -\sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \cos g.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Введение данных переменных уменьшает размерность системы до четырех, поскольку наличие геометрического интеграла и интеграла, реализующего связь отсутствия верчения, приняты во внимание с самого начала. Таким образом, на уровне интеграла энергии динамика системы описывается в переменных Андуайе–Депри с помощью трехмерного потока, сечение которого по переменной $g = \text{const}$ дает двумерное отображение Пуанкаре на плоскости $(l, L/G)$.

2. Описание существующих в системе аттракторов

Как показано в работе [27], в рассматриваемой системе при параметрах

$$\begin{aligned} E = 50, \quad R = 3, \quad m = 1, \quad g = 9.77145, \\ I_1 = 1, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = 3, \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 1.5, \quad a_3 = 0.5 \end{aligned} \quad (2.1)$$

существует странный хаотический аттрактор (квазиаттрактор [1]), изображенный на рисунке 3а (будем называть его аттрактор I). В ходе дальнейшего численного исследования отображения Пуанкаре, при небольшом изменении смещения центра масс a_3 был найден аттрактор, портрет которого изображен на рисунке 3б (аттрактор II). Данный аттрактор существует при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned} E = 50, \quad R = 3, \quad m = 1, \quad g = 9.77145, \\ I_1 = 1, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = 3, \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 1.5, \quad a_3 = 0.9. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рис. 3. Портреты аттракторов в сечении Пуанкаре для волчка Чаплыгина, полученные при параметрах $E = 50$, $R = 3$, $m = 1$, $g = 9.77145$, $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1.5$ и $a_3 = 0.5$ (а), $a_3 = 0.9$ (б). Синим цветом обозначен аттрактор, красным — построенный в обратном времени репеллер.^а

В работе [27] подробно описаны бифуркации, приводящие к рождению аттрактора I. Отметим, что его рождение происходит не по одному из известных сценариев, а в результате сложной последовательности глобальных и локальных бифуркаций. Далее мы подробно рассмотрим сценарий рождения аттрактора II и исследуем динамику системы в абсолютном пространстве при параметрах, соответствующих существованию данного аттрактора.

3. Сценарий рождения нового аттрактора

В данном разделе мы опишем сценарий рождения хаотического аттрактора, изображенного на рисунке 3б. Проследим за изменением динамического поведения системы, варьируя

^аДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1702009/>

параметры a_3 и g при постоянных значениях остальных параметров, на основе анализа карты динамических режимов [5].

Карта режимов представляет собой плоскость параметров (в нашем случае (a_3, g)), каждая точка которой окрашена в определенный цвет. Для построения карты режимов применяется следующий алгоритм (аналогичный описанному, например, в [5]). Каждому узлу карты ставится в соответствие пара параметров. При заданных параметрах рассчитывается некоторое число итераций отображения Пуанкаре (в нашем случае $2 \cdot 10^4$), после чего полученная точка проверяется на периодичность; данная процедура повторяется для следующих значений параметров. При этом в качестве начальных условий используется финальное состояние системы, полученное на предыдущем шаге (наследование начальных условий). Если период точки определен в промежутке от 1 до 160, соответствующий узел карты окрашивается в определенный цвет, согласно шкале, представленной рядом с картой. Если точка имеет более высокий период или же ее траектория не является периодической, соответствующий узел окрашивается в серый цвет.

В результате предварительного анализа нам удалось обнаружить точку периода 19, которая рождается в результате седло-узловой бифуркации. Эта точка существует в относительно широком диапазоне параметров a_3 и g , и, как мы покажем далее, в результате последовательности бифуркаций удвоения периода из нее рождается аттрактор фейгенбаумовского типа. В данной работе мы будем рассматривать окрестность параметров, при которых была обнаружена эта точка.

На рисунке 4 изображена карта динамических режимов отображения Пуанкаре для волчка Чаплыгина, построенная на плоскости параметров (a_3, g) . Упомянутая выше точка периода 19 существует в достаточно широкой полосе карты, окрашенной в темно-синий цвет.

В работе [27] было показано, что динамика волчка Чаплыгина демонстрирует развитую мультистабильность, то есть при одних и тех же параметрах в системе сосуществует множество периодических режимов, рождающихся и исчезающих в результате седло-узловых бифуркаций при незначительном изменении параметров. Карта, изображенная на рисунке 4, была склеена из нескольких кусков, каждый из которых построен с наследованием начальных условий из указанной точки периода 19.

Рис. 4. (а) Карта режимов на плоскости параметров (a_3, g) . Цифрами на карте обозначены периоды устойчивых точек. Красными цветом обозначены точки, отвечающие устойчивым движениям периода 152. (б) Карта показателей Ляпунова.

Если двигаться по карте, изменяя параметры снизу вверх и слева направо из области, соответствующей неподвижной точке периода 19, можно наблюдать последовательность бифуркаций удвоения периода неподвижных точек 19–38–76–152 и переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума [40]. Приведем далее портреты аттракторов для каждого из режимов при постоянном значении $a_3 = 0.9$ и при изменении параметра g (то есть будем двигаться снизу вверх по карте вдоль вертикальной стрелки).

На рисунке 5 изображены фазовые портреты на отображении Пуанкаре, соответствующие точкам периода 19 и 38 при $g = 9.746$ и $g = 9.7661$ соответственно. При увеличении параметра g наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода 19–38–76–152–304–608, в результате которой рождается странный аттрактор фейгенбаумовского типа [40]; портрет этого аттрактора изображен на рисунках 6 ($g = 9.768522$) и 7 ($g = 9.768526$). При дальнейшем увеличении параметра g (до 9.76853) аттрактор сильно разрастается в размерах и замазывает значительную область на отображении, образуя хаотический аттрактор, показанный на рисунке 8.

Рис. 5. Отображение Пуанкаре для режимов с периодом 19 (а) и 38 (б). Изображения построены при параметрах $g = 9.746$ (а) и $g = 9.7661$ (б).

Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода можно также проиллюстрировать с помощью бифуркационного дерева, изображенного на рисунке 9.

Оценивая расстояния между последовательными бифуркациями удвоениями периода и вычисляя их отношения

$$\delta_F = \frac{g_n - g_{n-1}}{g_{n+1} - g_n},$$

где g_i — значение параметра g , при котором происходит i -я бифуркация удвоения периода, получим следующие приближения константы Фейгенбаума:

	(19, 38)/(38, 76)	(38, 76)/(76, 152)
δ_F	3.86	4.45

Для диссипативных систем при переходе к хаосу по сценарию Фейгенбаума указанные величины должны стремиться к универсальной константе $\delta_F = 4.6692\dots$, что мы и наблюдаем уже после нескольких бифуркаций удвоения периода. Дальнейшие бифуркации происходят на очень мелких масштабах, что не дает возможности оценить последующие приближения константы с достаточной точностью.

Рис. 6. Отображение Пуанкаре и его увеличенные фрагменты при $g = 9.768522$. Начальная точка $(3.41521459867, -0.397805679682)$. В результате последовательности бифуркаций удвоения периода на базе устойчивой точки периода 19 возникает странный аттрактор фейгенбаумовского типа.

Рис. 7. Отображение Пуанкаре и его увеличенные фрагменты при $g = 9.768526$. Начальная точка $(3.54393434518, -0.277391330766)$. В результате последовательности бифуркаций удвоения периода на базе устойчивой точки периода 19 возникает странный аттрактор фейгенбаумовского типа.

Рис. 8. Отображение Пуанкаре при $g = 9.76853$. Начальная точка $(3.41521459867, -0.397805679682)$.

Рис. 9. Дерево бифуркаций удвоения периода на плоскости $(g, L/G)$.

4. Средняя дивергенция системы

Характерной чертой систем с неголономной диссипацией является сосуществование в фазовом пространстве областей сжатия и растяжения фазового объема. Другими словами, дивергенция в таких системах является знакопеременной. Для иллюстрации этого эффекта в рассматриваемой системе приведем карту средней дивергенции по времени $\langle \int_t \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dt \rangle$, где $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — векторное поле в фазовом пространстве, $\mathbf{x} = (\omega, \gamma)$. Проведем вычисления средней дивергенции при параметрах, соответствующих странному хаотическому аттрактору (аттрактор II), и, для сравнения, при параметрах, когда в системе существуют только простые аттракторы, чтобы отображать результаты на плоскости начальных условий. Вычисление средней дивергенции для исследования хаотического поведения системы использовалось в работах [32, 33].

На рисунке 10 изображены карты средней по времени дивергенции на плоскости начальных условий $(l, L/G)$. Из рисунка видно, что первоначальное распределение диверген-

Рис. 10. Карты средней дивергенции на плоскости начальных условий при $t = 0$ (верхний ряд), $t = 200$ (средний ряд) и соответствующие сечения отображения Пуанкаре (нижний ряд) для регулярных ($g = 8$, слева) и странного ($g = 9.76853$, справа) аттракторов. Легенда дана справа от рисунков; обозначения St и Un соответствуют устойчивым и неустойчивым неподвижным точкам.

ции (рис. 10, $t = 0$) достаточно регулярно, с явными областями положительных (оттенки желтого и красного) и отрицательных (оттенки синего) значений. Подобные диаграммы (при $t = 0$) применялись в работе [32] при исследовании динамики в обратимых неконсервативных отображениях.

На рисунке 10 при $t = 200$ изображен переходный процесс смешивания областей сжатия и растяжения фазового объема. Как видно из рисунка, с течением времени зоны с положительной и отрицательной дивергенцией сильно перемешиваются (рис. 10, $t = 200$).

Это позволяет утверждать, что, с одной стороны, аттрактор II имеет квазигамильтонову (квазиконсервативную) природу, так как он занимает целые зоны в фазовом пространстве, подобно стохастическому слою в гамильтоновой механике. С другой стороны, внутри этого аттрактора имеется множество мелких фокусов. В отличие от гамильтоновой механики, где число эллиптических резонансов бесконечно, вопрос о конечности фокусов, насколько нам известно, до конца не решен [21]. Таким образом, анализ карт средней дивергенции позволяет выявить области в фазовом пространстве, где могут находиться хаотические аттракторы.

Эти иллюстрации еще раз показывают специфичность возникающих аттракторов, связанную с неголономной диссипацией [7]. Природа и сценарии возникновения таких аттракторов требуют дополнительного изучения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вычисление среднего значения дивергенции на больших временах проводилось в работе [33] для определения параметров, при которых происходит сжатие фазового объема. В нашей системе во всем диапазоне параметров построения карты динамических режимов, естественно, фазовый объем сжимается (см. рис. 11, оттенки синего соответствуют отрицательным значениям дивергенции).

Рис. 11. Карта средней дивергенции при $t = 2 \cdot 10^4$ на плоскости параметров (a_3, g) . Оттенки синего соответствуют отрицательным значениям дивергенции.

5. Исследование поведения точки контакта

Весьма интересным с точки зрения механики и моделирования механических систем в данном случае является наблюдение за поведением точки контакта, поскольку траекторию движения системы можно непосредственно экспериментально наблюдать и анализировать. Приведем траектории точки контакта для полученных выше аттракторов. Заметим,

что при построении точки контакта мы не принимали во внимание возможные отрывы волчка от поверхности, связанные со смещением центра масс (и, как следствие, с переменной реакцией плоскости). Этот вопрос требует отдельного изучения в связи с возможным возникновением парадоксальных ситуаций, указанных в [22, 23].

Эволюция точки контакта рассматриваемой системы описывается кинематическими соотношениями (1.3)

$$\dot{x} = R(\beta, \omega), \quad \dot{y} = -R(\alpha, \omega).$$

На рисунках 12–14 изображены траектории точки контакта, соответствующие приведенным выше отображениям Пуанкаре. Из приведенных рисунков можно сделать следующий вывод: чем меньшую площадь на фазовой плоскости занимает аттрактор, тем более регулярным является поведение точки контакта. Кроме того, это заключение можно проиллюстрировать численно, рассчитав размерность аттрактора (его стохастическую характеристику) по формуле Каплана–Йорке [26]:

$$D = m + \left(\sum_{i=1}^m \Lambda_i \right) / |\Lambda_{m+1}|,$$

где m — число показателей Ляпунова, сумма которых неотрицательна.

Рис. 12. Траектории точки контакта, соответствующие периодическим режимам 19 (а) и 38 (б), изображенным на рисунке 5 для 10^3 итераций отображения Пуанкаре.

Рис. 13. Траектория точки контакта, соответствующая аттрактору фейгенбаумовского типа, изображенному на рисунке 6 при $g = 9.768522$ для 10^3 (слева) и $4 \cdot 10^3$ (справа) итераций отображения Пуанкаре. Вследствие малого различия параметра g на рисунках 6 и 7, траектории для этих двух аттракторов визуально неотличимы, поэтому траекторию точки контакта, соответствующую рисунку 7, мы здесь не приводим.

Рис. 14. Траектории точки контакта для аттрактора, изображенного на рисунке 8, для различных (близких) начальных условий и для 10^3 (a), (d), $4 \cdot 10^3$ (b), (e) и $2 \cdot 10^5$ итераций отображения Пуанкаре соответственно при $g = 9.76853$.

Рассматриваемая система обладает двумя ненулевыми показателями Ляпунова. Показатели Ляпунова для аттрактора, изображенного на рисунке 8 (соответствующая траектория представлена на рис. 14), имеют вид

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= 0.019069 \pm 0.000479, \\ \Lambda_2 &= -0.021845 \pm 0.000489, \\ \Lambda_1 + \Lambda_2 &= -0.002798 \pm 0.000032.\end{aligned}$$

Таким образом, размерность аттрактора по Каплану–Йорке

$$D = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|} \approx 1.87.$$

Для аттрактора фейгенбаумовского типа, изображенного на рисунке 7 (траектория представлена на рис. 13), получим следующие показатели Ляпунова и размерность аттрактора

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= 0,000925 \pm 0.000028, \\ \Lambda_2 &= -0.003315 \pm 0.000036, \\ \Lambda_1 + \Lambda_2 &= -0.002418 \pm 0.000014, \\ D &\approx 1.28.\end{aligned}$$

Таким образом, размерность аттрактора фейгенбаумовского типа близка к 1; как следствие, характер траектории точки контакта близок к квазипериодическому.

Рис. 15

Приведем также показатели Ляпунова и размерность аттрактора I, которые были рассчитаны в [27]:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= 0.083368 \pm 0.000422, \\ \Lambda_2 &= -0.084553 \pm 0.000423 \\ \Lambda_1 + \Lambda_2 &= -0.001184 \pm 0.000011, \\ D &\approx 1.99.\end{aligned}$$

Как видно, его размерность близка к 2, и этот (квази)аттрактор занимает значительную площадь в сечении Пуанкаре. Характерная траектория точки контакта для этого аттрактора изображена на рисунке 15.

Таким образом, для аттрактора фейгенбаумовского типа (рис. 7), имеющего размерность $D = 1.28$, точка контакта квазипериодическим образом замечает некоторое кольцо, для аттрактора II (рис. 8), имеющего размерность $D = 1.87$, траектория точки контакта ведет себя хаотически, однако при этом волчок Чаплыгина, перемещаясь по плоскости, совершает продолжительные вращения, подобные тем, которые наблюдаются на аттракторе Фейгенбаума, а для аттрактора I (рис. 3b), для которого $D = 1.99$, волчок движется по плоскости максимально хаотически. Поэтому можно сделать вывод, что чем большую размерность имеет аттрактор (и, как следствие, чем большую площадь в сечении Пуанкаре он занимает), тем более хаотически ведет себя точка контакта.

Следуя работам [11, 25], вычислим количественную характеристику диффузии траектории точки контакта. Под диффузией мы будем понимать случайное (не направленное) разбегание траектории точки контакта от начальной точки. Так как траектории, соответствующие устойчивым неподвижным точкам, являются периодическими и замечают собой некоторое кольцо на плоскости (x, y) , для характеристики диффузии выберем следующую функцию:

$$\begin{aligned}D &= \sqrt{(\langle x \rangle - x_n)^2 + (\langle y \rangle - y_n)^2}, \\ \langle x \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,\end{aligned}$$

где (x_n, y_n) — конечная точка при расчете траектории. Мы будем искать расстояние от усредненной точки на траектории до конечной точки. Как и в предыдущем разделе, для демонстрации поведения траектории системы при переходе от порядка к хаосу при постоянном значении смещения центра масс $a_3 = 0.9$ мы изменяли параметр g от 9.725 до 9.825 (т. е. снова двигались по карте снизу вверх).

На рисунке 16 показан график зависимости характеристики разбегания траектории $\sqrt{D}$ от параметра g . Полученный график условно (визуально) можно разделить на 5 частей, каждой из которых соответствует определенный режим движения (поведения точки контакта). В области I (в диапазоне параметра g от 9.725 до 9.76853) поведение точки контакта регулярно, и значения разбросаны на величину, не превышающую «ширину кольца», которое замечает траектория на плоскости. Далее, в области II (g меняется от 9.7685 до 9.7728)

Рис. 16. Характеристика разбегания траектории движения волчка Чаплыгина от ее усредненного значения и соответствующие каждому участку характерные траектории точки контакта.

траектории на фазовой плоскости попадают на аттрактор II и поведение точки контакта становится хаотическим. Действительно, из рисунка 16 видно, что при малом изменении параметра траектория разбегается на абсолютно различную величину. На участке III (значения g от 9.7728 до 9.7862) траектории на фазовой плоскости снова попадают на периодическую точку, поэтому поведение точки контакта становится регулярным; здесь, как и на начальном участке, точки разбросаны в пределах «ширины кольца» заметаемой на плоскости траектории. Особый интерес вызывает участок IV (в диапазоне изменения g от 9.7862 до 9.7971). Оказывается, на данном участке траектория точки контакта тоже является регулярной, но при изменении параметра g радиус кольца (как внешний, так и внутренний), заметаемого точкой контакта, возрастает при увеличении параметра до 9.79416, но далее уменьшается. На последнем участке V все траектории на отображении притягиваются к неподвижной точке периода 1; соответственно, и точка контакта ведет себя регулярно, и значения характеристики $\sqrt{D}$ практически не изменяются.

В качестве основного результата исследования поведения точки контакта отметим следующий факт. На всяком регулярном аттракторе точка контакта волчка Чаплыгина ведет себя квазипериодически (то есть регулярно). Изначально полагалось, что на странных аттракторах точка контакта будет себя вести хаотически, однако результаты экспериментов показали, что хаос на аттракторе не всегда приводит к хаотическому поведению точки контакта. Для того чтобы след точки контакта демонстрировал хаотическое поведение, необходимо дополнительно, чтобы странный аттрактор занимал в фазовом пространстве объем, сопоставимый с размерностью самого фазового пространства; в противном случае точка контакта будет себя вести квазипериодически.

6. Генеалогия сепаратрис между аттракторами

Рассмотрим далее сценарии перехода между двумя описанными в разделе 2 аттракторами.

Переход от аттрактора, изображенного на рисунке 3b, к аттрактору, изображенному на рисунке 3a, происходит за счет перестройки сепаратрис седловых точек, ограничивающих области притяжения аттракторов. Проследим, как перестраиваются сепаратрисы гиперболических точек при изменении параметра a_3 .

С помощью карт динамических режимов и численного исследования отображения Пуанкаре можно увидеть, что в области аттрактора при значении параметра $a_3 = 0.9$ сосуществует множество различных точек разных периодов, возникающих в результате седло-узловых бифуркаций. При этом образуется плотная сеть сепаратрис седловых точек. Как видно из рисунка 17, область притяжения аттрактора II ($a_3 = 0.9$) ограничена устойчивыми (синими) сепаратрисами седловых точек P , Q , R (отмечены на рисунке жирными ярко-зелеными точками). При уменьшении параметра a_3 область притяжения аттрактора II сужается, а сепаратрисная сеть седловых точек, находящихся внутри аттрактора, наоборот, расширяется. В результате траектории начинают разбегаться с аттрактора II, замая большую часть фазовой плоскости. При дальнейшем уменьшении параметра a_3 до значения 0.5 сепаратрисы седловых точек P , Q , R , S перестраиваются таким образом, что почти все траектории попадают в область притяжения аттрактора I. В работе [27] показано, что при $a_3 = 0.5$ эта область становится инвариантной: попадая в эту область, траектории ее не покидают. Подробное описание сценария возникновения аттрактора I приведено в работах [27, 28].

Рис. 17. Перестройка сепаратрис седловых точек P , Q , R , S при изменении проекции вектора смещения центра масс a_3 от 0.9 до 0.5. Оттенками синего цвета изображены устойчивые сепаратрисы гиперболических точек, оттенками красного — неустойчивые. Штриховкой отмечены области запрещенного движения.

Заключение

В настоящей работе проведено систематическое исследование регулярного и хаотического поведения «резиновой» модели волчка Чаплыгина. В данной системе обнаружен и исследован аттрактор фейгенбаумовского типа, а также описан сценарий его рождения. Приведен предварительный анализ поведения точки контакта в зависимости от характеристик соответствующего аттрактора.

Оказывается, что в изучаемой системе динамика точки контакта является регулярной, что обусловлено мультистабильностью и наличием, как правило, только простых аттракторов в фазовом пространстве. Поэтому с точки зрения физических приложений особый интерес вызывает именно поиск странных хаотических аттракторов, на которых поведение системы также становится хаотическим. Как уже было указано, это прежде всего может быть использовано в развивающейся в настоящее время теории управления и стабилизации хаоса. Также было бы интересно экспериментально обнаружить эффекты, наблюдаемые в исследуемой системе (например, смена регулярного и хаотического режимов при малом изменении параметров системы). Аналогичное поведение точки контакта для «мраморной» модели обсуждается в [7], где отображение Пуанкаре системы является трехмерным, а динамика существенно разнообразнее.

Кроме того, дальнейшее развитие результатов, полученных в данной работе, может быть связано с еще одной интересной родственной задачей — качение волчка Чаплыгина

по сфере в «резиновой» постановке. Несмотря на существование инвариантной меры, данная система является хаотической даже в случае отсутствия смещения центра масс [20]. Один интересный интегрируемый случай этой задачи, который реализуется при определенном соотношении радиусов неподвижной и движущейся сфер, указан и изучен в работе [12] (его «мраморный» аналог был указан существенно раньше [4, 13, 38]).

Авторы выражают благодарность С. П. Кузнецову, И. С. Мамаеву, И. Р. Сатаеву и А. А. Килину за плодотворные обсуждения и полезные замечания.

References

- [1] Afraimovich V. S., Shil'nikov L. P. Strange attractors and quasiattractors, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph (Eds.), Interaction Mech. Math. Ser., Boston, Mass.: Pitman, 1983, pp. 1–34.
- [2] Armour R. H., Vincent J. F. V. Rolling in nature and robotics: A review, *J. Bionic Eng.*, 2006, vol. 3, no. 4, pp. 195–208.
- [3] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: The absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.
- [4] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.
- [5] Borisov A. V., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [6] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 718–733.
- [7] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, nos. 7–8, pp. 939–954.
- [8] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [9] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors: 2, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158.
- [10] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859.
- [11] Borisov A. V., Kuznetsov S. P. Regular and chaotic motions of a Chaplygin sleigh under periodic pulsed torque impacts, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, nos. 7–8, pp. 792–803.
- [12] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [13] Borisov A. V., Mamaev I. S. Topological analysis of an integrable system related to the rolling of a ball on a sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 356–371.
- [14] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [15] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.
- [16] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. Historical and critical review of the development of nonholonomic mechanics: The classical period, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, no. 4, pp. 455–476.
- [17] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Rolling of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–220.

- [18] Chase R., Pandya A. A review of active mechanical driving principles of spherical robots, *Robotics*, 2012, vol. 1, no. 1, pp. 3–23.
- [19] Crossley V. A. *A literature review on the design of spherical rolling robots*, Pittsburgh, Pa., 2006.
- [20] Ehlers K. M., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of 2 – 3 – 5 distributions, in *Proc. IUTAM Symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, Russia, 25–30 August 2006)*, pp. 469–480.
- [21] Feudel U., Grebogi C., Hunt B. R., Yorke J. A. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors, *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, no. 1, pp. 71–81.
- [22] Ivanov A. P. On detachment conditions in the problem on the motion of a rigid body on a rough plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 355–368.
- [23] Ivanov A. P. Geometric representation of detachment conditions in systems with unilateral constraint, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 435–442.
- [24] Ivanov A. P. On final motions of a Chaplygin ball on a rough plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, nos. 7–8, pp. 804–810.
- [25] Jung P., Marchegiani G., Marchesoni F. Nonholonomic diffusion of a stochastic sled, *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 93, no. 1, 012606, 9 pp.
- [26] Kaplan J. L., Yorke J. A. A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations, in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, H.-O. Peitgen, H.-O. Walther (Eds.), Lecture Notes in Math., vol. 730, Berlin: Springer, 1979, pp. 204–227.
- [27] Kazakov A. O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508–520.
- [28] Kazakov A. O. On the chaotic dynamics of a rubber ball with three internal rotors, *Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics*, 2014, vol. 2, no. 1, pp. 73–97.
- [29] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [30] Marsden J. E., Ross Sh. D. New methods in celestial mechanics and mission design, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, 2006, vol. 43, no. 1, pp. 43–73.
- [31] Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199.
- [32] Roberts J. A. G., Quispel G. R. W. *Chaos and time-reversal symmetry: Order and chaos in reversible dynamical systems*, Phys. Rep., 1992, vol. 216, nos. 2–3, pp. 63–177.
- [33] Topaj D., Pikovsky A. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices, *Phys. D*, 2002, vol. 170, no. 2, pp. 118–130.
- [34] Bizyaev I. A. Nonintegrability and obstructions to the Hamiltonianization of a nonholonomic Chaplygin top, *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 631–634; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2014, vol. 458, no. 4, pp. 398–401.
- [35] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Rigid body dynamics: Hamiltonian methods, integrability, chaos*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).
- [36] Borisov A. V., Mamaev I. S. Isomorphism and Hamilton representation of some nonholonomic systems, *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 1, pp. 26–36; see also: *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2007, vol. 48, no. 1, pp. 33–45.
- [37] Borisov A. V., Mamaev I. S. Strange attractors in rattleback dynamics, *Physics–Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 4, pp. 393–403; see also: *Uspekhi Fiz. Nauk*, 2003, vol. 173, no. 4, pp. 407–418.
- [38] Borisov A. V., Fedorov Yu. N. On two modified integrable problems in dynamics, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 1995, vol. 50, no. 6, pp. 16–18; see also: *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1995, no. 6, pp. 102–105.
- [39] Sataev I. R., Kazakov A. O. Scenarios of transition to chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top, *Nelin. Dinam.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 235–250 (Russian).
- [40] Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems, *Phys. D*, 1983, vol. 7, nos. 1–3, pp. 16–39.
- [41] Chaplygin S. A. On a ball’s rolling on a horizontal plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 131–148; see also: *Math. Sb.*, 1903, vol. 24, no. 1, pp. 139–168.

Regular and chaotic dynamics in the rubber model of a Chaplygin top

Alexey V. Borisov¹, Alexey O. Kazakov², Elena N. Pivovarova³

^{1,3}Udmurt State University

ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

²Higher School of Economics National Research University

ul. Bolshaya Pecherskaya 25/12, Nizhny Novgorod, 603155, Russia

¹borisov@rcd.ru, ²kazakovdz@yandex.ru, ³l.n.pivovarova@gmail.com

This paper is concerned with the rolling motion of a dynamically asymmetric unbalanced ball (Chaplygin top) in a gravitational field on a plane under the assumption that there is no slipping and spinning at the point of contact. We give a description of strange attractors existing in the system and discuss in detail the scenario of how one of them arises via a sequence of period-doubling bifurcations. In addition, we analyze the dynamics of the system in absolute space and show that in the presence of strange attractors in the system the behavior of the point of contact considerably depends on the characteristics of the attractor and can be both chaotic and nearly quasi-periodic.

MSC 2010: 37J60, 37G35, 70E18

Keywords: Chaplygin top, nonholonomic constraint, rubber model, strange attractor, bifurcation, trajectory of the point of contact

Received November 21, 2016, accepted December 06, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 277–297 (Russian)