УДК: 531.355 + 532.582
MSC 2010: 70Exx, 76-05

Экспериментальные исследования падения винтовых тел в жидкости

Е. В. Ветчанин, А. И. Кленов

В работе представлен сравнительный анализ расчетов движения тяжелых трехлопастных винтов в жидкости с результатами экспериментов. Моделирование движения тела производится в рамках теории идеальной жидкости и на основе феноменологической модели вязкого трения. Для проведения экспериментов были изготовлены образцы трехлопастных винтов различных конфигураций и размеров методом отливки из химически затвердевающего полиуретана. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов показало, что рассмотренные математические модели корректно описывают только часть стационарных решений.

Ключевые слова: движение в жидкости, винтовое тело, экспериментальные исследования

Получено 11 октября 2016 года
После доработки 24 января 2017 года

Работа А. И. Кленова (разделы 1, 2) поддержана грантом РФФ № 14-19-01303. Работа Е. В. Ветчанина (разделы 3, 4) поддержана грантами РФФИ № 14-01-00395-а и № 15-08-09093-а.

Ветчанин Евгений Владимирович
eugene186@mail.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Кленов Анатолий Игоревич
tolik-klenov@mail.ru
Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

1. Введение

Задача о движении тяжелого твердого тела в жидкости представляет интерес как с точки зрения механики, так и с точки зрения теории динамических систем. По количеству публикаций, содержащих результаты теоретических и экспериментальных исследований в этом направлении, выделяется задача Максвелла о падающей пластине. Под пластиной понимается тонкое тело, длина которого существенно превосходит ширину. В математическом описании динамики пластин, как правило, пренебрегают краевыми эффектами и рассматривают плоскопараллельное движение. При падении таких объектов в сопротивляющейся среде наблюдаются четыре типа движений: равномерное падение, автоколебания (flutter), авторотация (tumbling), хаотический режим. Упомянем здесь некоторые из таких работ. В [5] описана модель движения тяжелого тела в среде с линейным по скорости вязким сопротивлением. В работе [6] на основе экспериментальных исследований и прямых численных расчетов на основе уравнений Навье – Стокса построена конечномерная модель движения металлической пластинки в жидкости. В работе [7] на основе обработки данных численного моделирования построена модель движения тяжелого эллиптического профиля, приведены зависимости модельных коэффициентов от плотности материала профиля. Обзор и сравнительный анализ ряда моделей движения тяжелых пластин в жидкости даны в работе [8]. Экспериментальное PIV-исследование потоков, создаваемых движущейся в воде платиной, представлено в работе [9]. В работе [16] описана динамика прямолинейного бумеранга. На начальном этапе (сразу после броска) движение бумеранга является существенно трехмерным, однако после короткого переходного процесса реализуется режим авторотации, а движение становится практически плоскопараллельным. Динамика классического бумеранга изучалась, например, в работах [14, 15].

Более сложные движения наблюдаются при падении тел, обладающих сложной геометрией. Движение таких тел является существенно трехмерным. Например, в работах [10, 11] экспериментально изучается движение тяжелых круглых дисков в жидкости, построены карты режимов, описывающие в пространстве параметров области равномерного движения, колебательного, авторотационного и хаотического. В работе [12] экспериментально изучается движение тороидальных тел, приведены данные PIV-визуализации течений и траектории движения тела.

Еще более сложной и практически неизученной является задача о движении тяжелого винтового тела в жидкости. В работе [1] была проанализирована динамика винтового тела в поле силы тяжести в рамках моделей идеальной и вязкой жидкостей. В данной работе мы проводим экспериментальное исследование движения тяжелых винтовых тел. В разделе 2 описаны математические модели данного процесса. В разделе 3 приведены результаты экспериментальных исследований.

2. Математические модели движения тяжелого винтового тела

Рассмотрим падение в безграничном объеме жидкости однородного тяжелого винтового тела, состоящего из центрального шара и трех лопастей в форме сплюснутых эллипсоидов вращения (см. рис. 1). Центр масс винта совпадает с центром шара, ось винтовой симметрии проходит через центр масс винта.

Ориентацию лопастей будем задавать углом Φ между плоскостью Π лопасти (плоскость, проходящая через наибольшее сечение лопасти) и координатной плоскостью Oe_1e_2 (см. рис. 1). В случаях $\Phi = 0^\circ$ ($\Pi \equiv Oe_1e_2$) и $\Phi = 90^\circ$ ($\Pi \perp Oe_1e_2$) винтовая симметрия отсутствует. Очевидно, что динамика винтов с различными углами Φ будет отличаться, так как от этого параметра зависят центральный тензор инерции $\mathbf{J}$, тензор $\mathbf{\Lambda}_1$ присоединенных масс, тензор $\mathbf{\Lambda}_2$ присоединенных моментов инерции и тензор $\mathbf{B}$, связанный с винтовой симметрией.

В работе [1] для винтов с параметрами, указанными в таблице 1, на основе твердотельной CAD-модели были рассчитаны компоненты тензоров $\mathbf{J}$ в зависимости от величины угла Φ (см. табл. 2). Расчет компонент тензоров $\mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{\Lambda}_2$, $\mathbf{B}$ в [1] осуществлялся на основе общей теории [13], для расчета гидродинамических потенциалов использовалась реализация метода конечных объемов в пакете OpenFOAM, построение сетки на основе CAD-модели производилось в пакете SALOME. Результаты расчета компонент тензоров $\mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{\Lambda}_2$, $\mathbf{B}$ в зависимости от величины угла Φ приведены в табл. 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Компоненты тензоров $\mathbf{J}$, $\mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{\Lambda}_2$, $\mathbf{B}$ для уменьшенной или увеличенной модели могут быть получены из значений, приведенных в таблицах 2, 3, умножением на соответствующий масштабный коэффициент.

Рис. 1. Геометрия тела.

Таблица 1. Геометрические параметры тела

Радиус центрального шара	$R = 0.1$ м
Радиус лопасти	$a = 0.2$ м
Толщина лопасти	$d = 0.04$ м
Расстояние от центра шара до центра лопасти	$h = 0.15$ м
Объем	$V = 1.238575 \cdot 10^{-3}$ м ³

Таблица 2. Центральный тензор инерции

Φ	$\mathbf{J} \cdot 10^4 / \rho_b$	Φ	$\mathbf{J} \cdot 10^4 / \rho_b$
20°	diag(2.12001, 2.12001, 4.16675)	30°	diag(2.17355, 2.17355, 3.784)
45°	diag(2.253855, 2.253855, 3.56706)	60°	diag(2.32331, 2.32331, 3.33956)

Здесь ρ_b — плотность материала винта.

Таблица 3. Присоединенные массы

Φ	$\mathbf{\Lambda}_1 \cdot 10^3 / \rho_f$	$\mathbf{\Lambda}_2 \cdot 10^3 / \rho_f$	$\mathbf{B} \cdot 10^3 / \rho_f$
20°	diag(5.490, 5.490, 54.820)	diag(0.841, 0.841, 0.191)	diag(1.311, 1.311, -2.771)
30°	diag(9.401, 9.401, 45.606)	diag(0.734, 0.734, 0.399)	diag(1.825, 1.825, -3.702)
45°	diag(16.917, 16.917, 30.559)	diag(0.542, 0.542, 0.781)	diag(2.168, 2.168, -4.196)
60°	diag(24.727, 24.727, 16.395)	diag(0.348, 0.348, 1.148)	diag(1.912, 1.912, -3.553)

Здесь ρ_f — плотность жидкости.

2.1. Модель идеальной жидкости

2.1.1. Уравнения движения

Для описания движения введем три системы координат: неподвижную O_axyz , подвижную $Oxyz$, полученную из системы O_axyz параллельным переносом, и подвижную $Oe_1e_2e_3$, жестко связанную с телом (см. рис. 1). Будем считать, что

- 1) начала подвижных систем координат (точка O) совпадают с центром масс винта,
- 2) ось Oe_3 подвижной системы координат совпадает с осью винтовой симметрии тела.

Положение начала подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$. Для описания ориентации подвижной системы координат введем единичные векторы α , β и γ , направленные вдоль осей Ox , Oy , Oz . Их компоненты в подвижной системе координат образуют ортогональную матрицу перехода

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, будут справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad \dot{\mathbf{r}} = Q^T \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}$ — поступательная скорость винта, ω — угловая скорость винта.

Начальную ориентацию тела будем задавать следующими векторами:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= (\cos \varepsilon, 0, \sin \varepsilon)^T, & \beta(0) &= (0, 1, 0)^T, \\ \gamma(0) &= (-\sin \varepsilon, 0, \cos \varepsilon)^T, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рис. 2

где ε — угол тангажа, соответствующий повороту винта вокруг оси Oy (см. рис. 2). Мы не рассматриваем повороты вокруг осей Ox и Oz в начальный момент времени, так как они не влияют на динамику.

Движение произвольного тела в идеальной жидкости описывается уравнениями Кирхгофа [2, 3]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times \omega - \mu \gamma, \\ \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \omega + \mathbf{p} \times \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{B}\omega$ — импульс, $\mathbf{M} = \mathbf{B}^T\mathbf{v} + \mathbf{A}\omega$ — кинетический момент, $\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \mathbf{\Lambda}_1 = (c_1, c_1, c_3)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_1, b_3)$, $\mathbf{A} = \mathbf{J} + \mathbf{\Lambda}_2 = \text{diag}(a_1, a_1, a_3)$, m — масса тела, $\mu = (\rho_b - \rho_f)Vg$ — вес тела в жидкости. В данной работе система координат O_axyz выбрана так, что вектор ускорения свободного падения $\mathbf{g}$ противоположно направлен оси O_az . В этом случае его проекция на ось O_az имеет значение $g = -9.807$. Коэффициенты матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ в зависимости от угла Φ могут быть аппроксимированы следующими соотно-

шениями [1]:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= (-4.6764 \cdot 10^{-3} \rho_f + \rho_b V + 4.8542 \cdot 10^{-4} \rho_f \Phi) k^3, \\
 c_3 &= (74.279 \cdot 10^{-3} \rho_f + \rho_b V - 9.6606 \cdot 10^{-4} \rho_f \Phi) k^3, \\
 a_1 &= ((1.0974 \cdot 10^{-3} \rho_f + 2.01995 \cdot 10^{-4} \rho_b) + (-1.2418 \cdot 10^{-5} \rho_f + 5.1027 \cdot 10^{-7} \rho_b) \Phi) k^5, \\
 a_3 &= ((-3.0673 \cdot 10^{-4} \rho_f + 4.4726 \cdot 10^{-4} \rho_b) + (2.4167 \cdot 10^{-5} \rho_f - 1.9567 \cdot 10^{-6} \rho_b) \Phi) k^5, \\
 b_1 &= (-0.51062 + 0.11603 \Phi - 1.2601 \cdot 10^{-3} \Phi^2) \cdot 10^{-3} \rho_f k^4, \\
 b_3 &= (0.60381 - 0.21822 \Phi + 2.4818 \cdot 10^{-3} \Phi^2) \cdot 10^{-3} \rho_f k^4,
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где k — масштабный коэффициент, значение $k = 1$ отвечает размерам, приведенным в таблице 1. Аппроксимации (2.4) и исходные данные для $\rho_f = 1000$ кг/м³, $\mu = 1$ Н приведены на рисунке 3.

Рис. 3. Аппроксимации коэффициентов матриц A , B , C .

Система уравнений (2.1), (2.3) полностью описывает движение рассматриваемого тела в идеальной жидкости. Нетрудно заметить, что уравнения относительно $\mathbf{p}$, $\mathbf{M}$, γ отделяются.

Система уравнений (2.1), (2.3) допускает следующие первые интегралы движения (см., например, [4]):

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = P_1, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = P_2, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu t = P_3, \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \sigma, \quad (2.6)$$

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

где P_1 , P_2 , P_3 — проекции начального импульса (начального толчка) на неподвижные оси, σ — проекция начального кинетического момента на ось $O_a z$ неподвижной системы координат.

В силу динамической симметрии $A_{11} = A_{22} = a_1$, $B_{11} = B_{22} = b_1$, $C_{11} = C_{22} = c_1$ уравнения (2.1), (2.3) помимо интегралов (2.5) допускают интеграл Лагранжа

$$M_3 = C = \text{const.} \quad (2.7)$$

2.1.2. Частные решения

При движении из состояния покоя интегралы (2.5), (2.6), (2.7) равны нулю, то есть $P_1 = P_2 = P_3 = 0$, $\sigma = C = 0$. В этом случае уравнения (2.1), (2.3) допускают частные решения, соответствующие равноускоренным движениям с сохранением направления одной из главных осей и вращением вокруг нее [1]. Данные частные решения называются решениями Стеклова, а соответствующие им скорости движения и вращения имеют вид

$$\gamma_k = \pm 1, \quad \gamma_i = \gamma_j = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (2.8)$$

$$v_k = -\mu \tilde{c}_{kk} t, \quad \omega_k = -\mu \tilde{b}_{kk} t, \quad v_i = v_j = 0, \quad \omega_i = \omega_j = 0,$$

$$\tilde{c}_k = \frac{a_k}{a_k c_k - b_k^2}, \quad \tilde{b}_k = -\frac{b_k}{a_k c_k - b_k^2}. \quad (2.9)$$

Поскольку рассматриваемое тело обладает динамической симметрией, то имеется два семейства частных решений вместо шести (2.8):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad (2.10)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \gamma_3 = 0, \quad \gamma_2 = \text{const}, \quad \gamma_3 = \text{const}. \quad (2.11)$$

В работе [1] было показано, что решения (2.10) линейно устойчивы при условии $\tilde{c}_1 > \tilde{c}_3$, решения (2.11) — при $\tilde{c}_1 < \tilde{c}_3$.

2.2. Феноменологическая модель вязкого трения

2.2.1. Уравнения движения

Уравнения движения тела в вязкой жидкости имеют вид

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega} - \mu \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{F}_s, \quad (2.12)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{v} - \mathbf{G}_s,$$

где $\mathbf{F}_s = (F_1, F_2, F_3)$ — стационарная сила вязкого сопротивления, $\mathbf{G}_s = (G_1, G_2, G_3)$ — стационарный момент вязкого сопротивления.

В работе [1] было смоделировано обтекание трехлопастного винта (см. параметр в табл. 1) на основе численного решения уравнений Навье–Стокса. По результатам численных экспериментов были получены выражения для компонент F_i вязкой силы и компонент G_i вязкого момента, которые с учетом масштабного коэффициента k , соответствующего растяжению линейных размеров в k раз, принимают вид

$$F_j = (f_j^v |v_j| v_j + f_j^\omega |\omega_j| \omega_j) k^2, \quad G_j = (g_j^v |v_j| v_j + g_j^\omega |\omega_j| \omega_j) k^3, \quad (2.13)$$

где $f_j^v, f_j^\omega, g_j^v, g_j^\omega$ — коэффициенты сопротивления, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} f_1^v &= f_2^v = (312.9 - 3.54\Phi) \frac{-4.6764 + 0.48542\Phi}{74.279 - 0.96606\Phi}, \\ f_1^\omega &= f_2^\omega = (0.085 - 0.0737\Phi) \frac{-510.62 + 116.03\Phi - 1.2601\Phi^2}{603.81 - 218.22\Phi + 2.4818\Phi^2}, \\ f_3^v &= 312.9 - 3.54\Phi > 0, \quad f_3^\omega = 0.085 - 0.0737\Phi, \\ g_1^v &= g_2^v = -23.5 \frac{-510.62 + 116.03\Phi - 1.2601\Phi^2}{603.81 - 218.22\Phi + 2.4818\Phi^2}, \\ g_1^\omega &= g_2^\omega = (0.542 - 0.0268\Phi + 0.0008\Phi^2) \frac{109.74 - 1.2418\Phi}{-30.673 + 2.4167\Phi}, \\ g_3^v &= -23.5 < 0, \quad g_3^\omega = 0.542 - 0.0268\Phi + 0.0008\Phi^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Система уравнений (2.1), (2.12) полностью описывает движение рассматриваемого винта в вязкой жидкости. Как и в случае идеальной жидкости, нетрудно заметить, что уравнения относительно p, M, γ отделяются.

2.2.2. Частные решения

Система уравнений (2.1), (2.12) допускает частные решения

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad (2.15)$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{\mu g_1^\omega}{f_1^v g_1^\omega - f_1^\omega g_1^v}}, \quad v_2 = v_3 = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g_1^v}{f_1^v g_1^\omega - f_1^\omega g_1^v}}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad (2.16)$$

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = -\sqrt{\frac{\mu g_3^\omega}{f_3^v g_3^\omega - f_3^\omega g_3^v}}, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\sqrt{\frac{-\mu g_3^v}{f_3^v g_3^\omega - f_3^\omega g_3^v}},$$

соответствующие движениям с постоянными поступательной и угловой скоростями при сохранении ориентации одной из осей подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат.

В [1] с помощью численных расчетов было показано, что оба решения (2.15), (2.16) неустойчивы по Ляпунову при $\mu > 1$.

2.3. Постановка задачи

Как показано в [1], модели идеальной и вязкой жидкости приводят к различным результатам. В частности, в расчетах на основе уравнений движения в идеальной жидкости (2.1), (2.3) воспроизводятся только асимптотически устойчивые равноускоренные вращения. В то же время моделирование движения на основе уравнений (2.1), (2.12) демонстрирует существование как регулярных, так и хаотических режимов. Кажется удивительным, что в постановке вязкой жидкости движение с сохранением направления винтовой оси вертикально вверх является неустойчивым.

Кроме того, следует иметь в виду, что наблюдаемые в расчетах режимы движения реализуются на достаточно продолжительных промежутках физического времени (порядка 10^2 – 10^3 с). На практике время погружения тела на глубину в 1.5 м составляет около 4–7 с, то есть на 2–3 порядка меньше.

В связи с описанным расхождением в расчетах при использовании различных математических моделей и различием в возможном времени наблюдения динамических эффектов рассмотрим следующую задачу:

экспериментально проверить, какие режимы движения реализуются при падении винтового тела в жидкости.

3. Экспериментальное исследование

3.1. Описание натурных образцов. Методика эксперимента

Для проведения экспериментальных исследований были изготовлены образцы, изображенные на рисунке 4. Образцы изготовлены из полиуретана плотностью $\rho_b = 1200 \text{ кг/м}^3$.

Рис. 4. Модели винтов: а) масштабный коэффициент $k = 0.125$, угол поворота лопастей $\Phi = 20^\circ$, б) масштабный коэффициент $k = 0.25$, углы поворота лопастей $\Phi = 50^\circ$ и $\Phi = 60^\circ$.

При проведении экспериментов образцы погружались под поверхность воды в резервуар, изображенный на рисунке 5.

После затухания возмущений вследствие помещения образца в воду, исследуемое тело отпускалось, процесс его движения фиксировался камерой. С помощью библиотеки OpenCV из видеозаписи выбирались кадры, которые затем объединялись в единое изображение, показывающее последовательные положения винта.

3.2. Результаты эксперимента

3.2.1. Винт с углом $\Phi = 20^\circ$

Рассмотрим поведение винта с углом поворота лопастей $\Phi = 20^\circ$ (см. рис. 4а). Процесс падения данного образца при различных начальных условиях изображен на рисунках 6–8.

Согласно (2.9), для рассматриваемого тела коэффициенты $\tilde{c}_i$ принимают следующие значения:

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 \approx 102.955, \quad \tilde{c}_3 = 11.391. \quad (3.1)$$

Следовательно, в соответствии с моделью движения в идеальной жидкости (см. раздел 2.1.2), устойчивым должно быть движение, при котором ось винтовой симметрии тела направлена вертикально вверх ($\gamma_3 = \pm 1$). Устойчивость данного режима движения наблюдается и в эксперименте (см. рис. 6).

Рис. 5. Водный резервуар

Рис. 6. Последовательные положения винтового тела с углом $\Phi = 20^\circ$. В начальный момент времени винтовая ось вертикальна.

Рис. 7. Последовательные положения винтового тела с углом $\Phi = 20^\circ$. В начальный момент времени винтовая ось горизонтальна.

Рис. 8. Последовательные положения винтового тела с углом $\Phi = 20^\circ$. В начальный момент времени винтовая ось наклонена.

Согласно модели на основе теории идеальной жидкости, режим движения, при котором $\gamma_3 = 0$, должен быть неустойчивым, однако в эксперименте (см. рис. 7) потеря устойчивости не наблюдается, что в первую очередь связано с коротким временем процесса. Из рисунка 7 видно, что падение происходит практически вертикально, ось винтовой симметрии во время движения находится в горизонтальной плоскости ($|\gamma_3| \ll 1$), а тело совершает вокруг данной оси дополнительное вращение.

Когда движение начинается из произвольного положения, траектория тела имеет криволинейную форму (см. рис. 8). Реализация какого-либо устойчивого режима движения в эксперименте не наблюдается.

В расчетах на основе уравнений движения в идеальной жидкости (2.1), (2.12) при начальных условиях $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{M} = 0$, $\boldsymbol{\gamma} = (-\sin \theta, 0, \cos \theta)$, где $\theta = 0.02$, реализуется прецессия. Эволюция динамической переменной γ_3 показана на рисунке 9.

Рис. 9. Эволюция динамической переменной γ_3 для случая $\Phi = 20^\circ$, $k = 0.125$.

На рисунке 9 видно, что направление вектора $\boldsymbol{\gamma}$ близко к вертикали, что практически согласуется с экспериментальным результатом. Аналогичный режим движения воспроизводится в расчетах при $\theta = \pi/2 - 0.02$.

Таким образом, можно сделать вывод, что представленные в разделе 2 математические модели корректно описывают только ситуацию, изображенную на рисунке 6.

3.2.2. Винт с углом $\Phi = 50^\circ$

Рассмотрим поведение винта с углом поворота лопастей $\Phi = 50^\circ$ (см. рис. 4b, левый объект). Процесс падения данного образца при различных начальных условиях изображен на рисунках 10 и 11.

Согласно (2.9), для рассматриваемого тела коэффициенты $\tilde{c}_i$ принимают следующие значения:

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 \approx 4.276, \quad \tilde{c}_3 = 4.3479. \quad (3.2)$$

Следовательно, в соответствии с моделью движения в идеальной жидкости (см. раздел 2.1.2), устойчивым должно быть движение, при котором ось винтовой симметрии тела лежит в горизонтальной плоскости ($\gamma_3 = 0$). Устойчивость данного режима движения в эксперименте не наблюдается (см. рис. 11), траектория тела практически сразу существенно отклоняется от вертикали. Аналогичная картина наблюдается в случае, когда в начальный момент времени ось винтовой симметрии тела была направлена вертикально вверх.

В расчетах на основе уравнений движения в идеальной жидкости (2.1), (2.12) при начальных условиях $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{M} = 0$, $\boldsymbol{\gamma} = (-\sin \theta, 0, \cos \theta)$, где $\theta = 0.02$, реализуется прецессия (см. рис. 12). Расчетное отклонение вектора $\boldsymbol{\gamma}$ от вертикали не превосходит 1° , тогда как в эксперименте визуально наблюдаются существенно большие отклонения (см. рис. 10).

Таким образом, можно сделать вывод, что при выбранных начальных условиях представленные в разделе 2 математические модели не дают корректного описания движения рассмотренного винтового тела (см. рис. 4b, слева).

Рис. 10. Последовательные положения винтового тела с углом $\Phi = 50^\circ$. В начальный момент времени винтовая ось вертикальна.

Рис. 11. Последовательные положения винтового тела с углом $\Phi = 50^\circ$. В начальный момент времени винтовая ось горизонтальна.

Рис. 12. Эволюция динамической переменной γ_3 для случая $\Phi = 50^\circ$, $k = 0.25$: а) переходный процесс, б) установившийся режим.

3.3. Винт с углом $\Phi = 60^\circ$

Рассмотрим падение винта с углом поворота лопастей $\Phi = 60^\circ$ (см. рис. 4b, правый объект). Различные реализации процесса падения данного образца при условии, что в начальный момент ось винта направлена вертикально вверх, показаны на рисунке 13. Две реализации процесса падения для случая, когда в начальный момент времени ось винта находится в горизонтальной плоскости, показаны на рисунке 14.

Согласно (2.9), для рассматриваемого тела коэффициенты $\tilde{c}_i$ принимают следующие значения:

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 \approx 3.1796, \quad \tilde{c}_3 = 6.673. \quad (3.3)$$

Рис. 13. Различные реализации процесса падения винтового тела с углом $\Phi = 60^\circ$. В начальный момент времени винтовая ось вертикальна.

Рис. 14. Различные реализации процесса падения винтового тела с углом $\Phi = 60^\circ$. В начальный момент времени винтовая ось горизонтальна.

Следовательно, в соответствии с критерием, описанным в разделе 2.1.2, устойчивым должно быть движение, при котором ось винтовой симметрии тела лежит в горизонтальной плоскости ($\gamma_3 = 0$). Устойчивость данного режима движения в эксперименте не наблюдается (см. рис. 13 и 14), траектория тела практически сразу существенно отклоняется от вертикали.

Рис. 15. Эволюция динамической переменной γ_3 для случая $\Phi = 60^\circ$, $k = 0.25$.

В расчетах на основе уравнений движения в идеальной жидкости (2.1), (2.12) при начальной ориентации, соответствующей $\theta = 0.02$, воспроизводится режим движения, предсказанный моделью идеальной жидкости. Эволюция динамической переменной γ_3 с течением времени приведена на рисунке 15.

Таким образом, можно сделать вывод, что в рамках математических моделей, описанных в разделе 2, для рассмотренного объекта (см. рис. 4b, справа) должны наблюдаться режимы устойчивого движения с $\gamma_3 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, однако результаты расчетов не согласуются с экспериментальными данными.

4. Заключение

Проведенные в данном исследовании эксперименты показали, что рассмотренные модели движения винтового тела в идеальной и вязкой жидкостях корректно описывают только часть стационарных решений. Феноменологическая модель вязкого трения нуждается в доработке с учетом результатов эксперимента и прямых численных расчетов на основе уравнений Навье–Стокса.

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову, И. С. Мамаеву и А. А. Килину за интерес, проявленный к данному исследованию, и С. С. Алалыкину за содействие в изготовлении опытных образцов.

References

- [1] Tenenev V. A., Vetchanin E. V., Ilaletdinov L. F. Chaotic dynamics in the problem of the fall of a screw-shaped body in a fluid, *Nonlin. Dynam.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 99–120 (Russian).
- [2] Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik: Vol. 1. Mechanik*, Leipzig: Teubner, 1876.
- [3] Lamb H. *Hydrodynamics*, 6th ed., New York: Dover, 1945.
- [4] Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S. Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 5, pp. 531–565.
- [5] Kozlov V. V. On the problem of fall of a rigid body in a resisting medium, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 1990, vol. 45, no. 1, pp. 30–36; see also: *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1990, no. 1, pp. 79–86.
- [6] Andersen A., Pesavento U., Wang Z. J. Unsteady aerodynamics of fluttering and tumbling plates, *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 541, pp. 65–90.

- [7] Borisov A. V., Kuznetsov S. P., Mamaev I. S., Tenenev V. A. Describing the motion of a body with an elliptical cross section in a viscous incompressible fluid by model equations reconstructed from data processing, *Tech. Phys. Lett.*, 2016, vol. 42, no. 9, pp. 886–890; see also: *Pis'ma Zh. Tekh. Fiz.*, 2016, vol. 42, no. 17, pp. 9–19.
- [8] Kuznetsov S. P. Motion of a falling card in a fluid: Finite-dimensional models, complex phenomena, and nonlinear dynamics, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 3–49 (Russian).
- [9] Klenov A. I., Vetchanin E. V. Optical measurement of a fluid velocity field around a falling plate, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 554–567 (Russian).
- [10] Willmarth W. W., Hawk N. E., Harvey R. L. Steady and unsteady motions and wakes of freely falling disks, *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, no. 2, pp. 197–208.
- [11] Field S. B., Klaus M., Moore M. G., Nori F. Chaotic dynamics of falling disks, *Nature*, 1997, vol. 388, no. 6639, pp. 252–254.
- [12] Vincent L., Shambaugh W. S., Kanso E. Holes stabilize freely falling coins, *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 801, pp. 250–259.
- [13] Korotkin A. I. *Added Masses of Ship Structures*, Fluid Mech. Appl., vol. 88, Dordrecht: Springer, 2009.
- [14] Azuma A., Beppu G., Ishikawa H., Yasuda K. Flight dynamics of the boomerang: Part 1. Fundamental analysis, *J. Guid. Control Dynam.*, 2004, vol. 27, no. 4, pp. 545–554.
- [15] Beppu G., Ishikawa H., Azuma A., Yasuda K. Flight dynamics of the boomerang: Part 2. Effects of initial conditions and geometrical configuration, *J. Guid. Control Dynam.*, 2004, vol. 27, no. 4, pp. 555–563.
- [16] Vos H. Straight boomerang of balsa wood and its physics, *Am. J. Phys.*, 1985, vol. 53, no. 6, pp. 524–527.

Experimental investigation of the fall of helical bodies in a fluid

Evgeny V. Vetchanin¹, Anatolii I. Klenov²

¹Udmurt State University

ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

²M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

ul. Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069, Russia

¹eugene186@mail.ru, ²tolik-klenov@mail.ru

This paper presents a comparative analysis of computations of the motion of heavy three-bladed screws in a fluid along with experimental results. Simulation of the motion is performed using the theory of an ideal fluid and the phenomenological model of viscous friction. For experimental purposes, models of three-bladed screws with various configurations and sizes were manufactured by casting from chemically hardening polyurethane. Comparison of calculated and experimental results has shown that the mathematical models considered essentially do not reflect the processes observed in the experiments.

MSC 2010: 70Exx, 76-05

Keywords: motion in a fluid, helical body, experimental investigation

Received October 11, 2016, accepted January 24, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 585–598 (Russian)