УДК: 531.38
MSC 2010: 37J60

Неоднородные сани Чаплыгина*

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе исследуется динамика системы, которая является обобщением саней Чаплыгина на случай неоднородной неголономной связи. Выполнено явное интегрирование и достаточно полный качественный анализ динамики.

Ключевые слова: сани Чаплыгина, неоднородные неголономные связи, законы сохранения, качественный анализ, резонанс

Введение

В этой работе рассмотрено движение *саней Чаплыгина* — твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость двумя гладкими ножками и лезвием (коньком). При этом проекция линейной скорости точки контакта v лезвия на перпендикуляр к его плоскости равна некоторой постоянной величине v_0 . Случай $v_0 = 0$ был рассмотрен С. А. Чаплыгиным [24] и К. Каратеодори [12]. Обсуждение этой задачи имеется также в книге Ю. М. Неймарка и Н. А. Фужаева [22]. Движение саней в поле тяжести на наклонной плоскости рассмотрено в [9].

В данной работе мы исследуем систему, которая описывается классической неголономной моделью движения и получается из принципа Даламбера – Лагранжа. Вакономные сани Чаплыгина, полученные из вариационного принципа Гамильтона, рассмотрены в [20]. Связка двух саней Чаплыгина, называемая роулер-рейсер (*roller-racer*), исследовалась недавно в работе [1].

*Перевод статьи “An inhomogeneous Chaplygin sleigh”, опубликованной в журнале *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 4, pp. 435–447.

Получено 02 июня 2017 года
После доработки 06 июля 2017 года

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mmaev@rcd.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Укажем, что связь в санях Чаплыгина может быть реализована при помощи колесной пары [6]. В этом смысле рассматриваемая в работе неголономная связь $v_0 \neq 0$ может интерпретироваться как некоторый увод колеса, возникающий вследствие деформации пневматика. Такая концепция была предложена Рокаром [15] и носит его имя (см. также [23]). Другой реализацией связи является качение омниколесной тележки, в которой скорость вращения колесиков на ободе задается постоянной [5].

Задача Суслова с неоднородной связью рассмотрена в [13]. В этой работе был указан новый первый интеграл, не являющийся полиномом по скоростям, а также получено явное решение. С классическим вариантом задачи Суслова можно ознакомиться по работе [2].

В данной работе мы указываем новый первый интеграл, являющийся непосредственным обобщением интеграла энергии. Этот интеграл не является очевидным, так как в случае неоднородных связей интеграл энергии, вообще говоря, не существует [11, 16]. В работе мы приводим явное решение, указываем квадратуры для точки контакта и делаем из них вывод о качественных свойствах движения. Некоторые траектории построены явно.

Интересной особенностью движения саней является наличие компактных и рассеивающих траекторий, которые имеют существенно более сложный вид по сравнению с классическим случаем $v_0 = 0$. Вследствие интегрируемости угол рассеяния может быть вычислен явно, как и в случае $v_0 = 0$ (см. [22]). Благодаря реализации связи в санях с помощью колесной пары результаты работы могут быть полезны для различных областей мобильной робототехники, использующей неголономные модели [3, 14]. В данной работе мы развиваем общий подход иерархии динамики к неголономным системам (см., например, [8, 10]), который в случае интегрируемых систем приводит к наиболее полным результатам [4].

Отметим, что существенно большее многообразие траекторий по сравнению с классическими санями Чаплыгина возникает при использовании в кинетической энергии саней дополнительных членов, возникающих за счет «инерции» идеальной жидкости. Это, по мнению авторов [17], возможно в рамках гидродинамической интерпретации (уравнений Кирхгофа). Случай с таким обобщением представлял бы существенный математический интерес, однако, указанная интерпретация вряд ли возможна. Обсуждение этого круга вопросов имеется в [18–20].

1. Уравнения движения и законы сохранения

Рассмотрим плоское движение твердого тела, для описания зададим две системы координат:

- неподвижную (инерциальную) Oxy ,
- подвижную, жестко связанную с телом $O_1x_1x_2$.

Конфигурационное пространство $\mathcal{N}$ в данном случае совпадает с группой движений плоскости $SE(2)$, параметризуем его декартовыми координатами (x, y) начала подвижных осей O_1 и их углом поворота φ , то есть $\mathcal{N} = \{\mathbf{q} = (x, y, \varphi)\}$ (см. рис. 1).

Обозначим угловую скорость тела ω , проекции на подвижные оси $O_1x_1y_1$ скорости начала отсчета O_1 — как v_1, v_2 . Уравнение связи в векторных переменных представляется в форме

$$n_1v_1 + n_2v_2 + n_3\omega = \text{const},$$

где n_1, n_2, n_3 — некоторые постоянные. Если $n_1^2 + n_2^2 \neq 0$, то это уравнение имеет физический смысл, который мы сейчас проясним (случай $n_1^2 + n_2^2 = 0$ мы ниже рассмотрим отдельно).

Рис. 1

Рис. 2

Рассмотрим в теле некоторую точку A , в которой задан постоянный в подвижных осях $O_1 x_1 x_2$ вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ (в задаче Чаплыгина это был вектор нормали к плоскости колеса, реализующего связь, см. рис. 1). Обобщение связи Чаплыгина зададим в виде

$$(\mathbf{v}_A, \mathbf{n}) = n_1 v_1 + n_2 v_2 + (d_1 n_2 - d_2 n_1) \omega = v_0 = \text{const}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ — вектор, соединяющий точки O_1 и A . В книге Рокара [15] показано, что если вместо твердого колеса используется пневматическое, то связь имеет именно форму (1.1) с $v_0 \neq 0$.

Выберем теперь систему, связанную с телом специальным образом так, чтобы ось $O_1 x_2$ была параллельна вектору $\mathbf{n}$ и проходила через точку A и, кроме того, ось $O_1 x_1$ проходила через центр масс тела C (см. рис. 2). В этом случае уравнение связи (1.1) записывается в форме

$$f = v_2 = v_0 = \text{const}. \quad (1.2)$$

Кинетическая энергия тела представляется в виде

$$T = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2} I \omega^2 + m a \omega v_2,$$

где m, I — масса и момент инерции тела относительно точки O_1 (нецентральный), a — расстояние от начала координат O_1 до центра масс (см. рис. 2).

Уравнения движения, полученные с помощью принципа Даламбера–Лагранжа, представляются в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial v_1} \right)' - \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial v_1}, & \left(\frac{\partial T}{\partial v_2} \right)' + \omega \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial v_2}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right)' + v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \omega}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\dot{x} = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega,$$

где неопределенный множитель λ — реакция связи.

Случай $a \neq 0$. Исключим неопределенный множитель и ограничим систему на связь (1.2) с учетом $\dot{v}_2 = 0$, тогда после обезразмеривающих замен переменных и времени вида

$$v_1 \rightarrow v_0 v_1, \quad \omega \rightarrow \frac{v_0}{a} \omega, \quad x \rightarrow ax, \quad y \rightarrow ay, \quad \varphi \rightarrow \varphi, \quad dt \rightarrow \frac{a}{v_0} dt,$$

получим замкнутую систему пяти уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \omega(\omega - 1), \quad \dot{\omega} = -Av_1\omega, \quad A = \frac{ma^2}{I}, \\ \dot{x} &= v_1 \cos \varphi - \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Согласно теореме Штейнера, $I = I_c + ma^2$, где I_c — центральный момент инерции тела, откуда заключаем, что

$$0 < A < 1.$$

Как и в задаче о саях Чаплыгина, система (1.4) допускает сингулярную инвариантную меру

$$\mu = \omega^{-1} dv_1 d\omega dx dy d\varphi.$$

Помимо этого, система обладает квадратичным первым интегралом (который обобщает интеграл энергии):

$$E = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2A}(\omega - 1)^2. \quad (1.5)$$

Случай $a = 0$. При этом мы можем обезразмерить лишь скорость v_1 :

$$v_1 \rightarrow v_0 v_1.$$

Система (1.3) после исключения неопределенного множителя представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\omega, \quad \dot{\omega} = 0, \\ \dot{x} &= v_0(v_1 \cos \varphi - \sin \varphi), \quad \dot{y} = v_0(v_1 \sin \varphi + \cos \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega. \end{aligned}$$

Эта система допускает стандартную инвариантную меру

$$\mu = dv_1 d\omega dx dy d\varphi$$

и линейный первый интеграл

$$F = \omega.$$

2. Явное интегрирование при $a = 0$

Зафиксируем величину угловой скорости

$$\omega = \omega_0 = \text{const.}$$

При $\omega_0 = 0$ получаем

$$v_1 = u_0 = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}$$

и, соответственно,

$$x = x_0 + v_0(u_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0)t, \quad y = y_0 + v_0(u_0 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0)t.$$

Следовательно, тело движется вдоль прямой линии, сохраняя ориентацию.

При $\omega_0 \neq 0$ сделаем замену времени и переменных

$$d\tau = \omega_0 dt, \quad v_1 = \omega_0 u, \quad x = \frac{v_0}{\omega_0} X, \quad y = \frac{v_0}{\omega_0} Y.$$

Получим

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= -1, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= 1, \\ \frac{dX}{d\tau} &= u \cos \varphi - \sin \varphi, & \frac{dY}{d\tau} &= u \sin \varphi + \cos \varphi.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\varphi &= \tau \bmod 2\pi, & u &= u_0 - \tau, \\ X &= (u_0 - \tau) \sin \tau, & Y &= -(u_0 - \tau) \cos \tau,\end{aligned}$$

где начало отсчета времени выбрано таким образом, что $\varphi = 0$ при $\tau = 0$.

Итак, мы видим, что тело равномерно вращается и точка O_1 движется по раскручивающейся спирали (см. рис. 3), в то время как в задаче об «однородных санях Чаплыгина» точка O_1 движется по окружности.

Рис. 3. Характерный вид траектории точки O_1 ($u_0 = 0$).

3. Явное интегрирование при $a \neq 0$

Вследствие существования интеграла (1.5) проекции траекторий системы (1.4) на плоскость (v_1, ω) представляют собой эллипсы (см. рис. 4). Прямая $\omega = 0$, как в задаче Чаплыгина, заполнена неподвижными точками, траектории системы асимптотически стремятся к ним: к точкам на полуоси $v_1 > 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и к точкам на полуоси $v_1 < 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Помимо асимптотических траекторий, которые возникают при $E > E_c$, где

$$E_c = \frac{1}{2A},$$

в данной системе при $E < E_c$ траектории на плоскости (v_1, ω) оказываются периодическими (напомним, что такие траектории отсутствуют в задаче о санях Чаплыгина).

Неподвижной точке $v_1 = 0, \omega = 1$ отвечает равномерное вращение саней вокруг центра масс C (при этом точка O_1 описывает окружность).

Рис. 4. Проекция траекторий на плоскость (v_1, ω) при $A = \frac{1}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [11] рассмотрено движение саней Чаплыгина ($v_0 = 0$) на вращающейся плоскости. В этом случае редуцированная система также обладает положениями равновесия, соответствующими равномерному вращению саней.

Неподвижным точкам на оси $\omega = 0$ соответствует прямолинейное равномерное движение саней без вращения,

$$\begin{aligned} v_1 = u_0 = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}, \\ x = x_0 + (u_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0)t, \quad y = y_0 + (u_0 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0)t, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где в начальный момент $t = 0$ положение точки O_1 задается координатами (x_0, y_0) . Неоднородность связи приводит к тому, что тело движется в направлении, которое не только не совпадает с перпендикуляром к нормали $\mathbf{n} = (-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0)$, но еще и зависит от величины начальной скорости u_0 .

Для описания решений при $\omega \neq 0$ вновь сделаем замену времени

$$d\tau = \omega dt,$$

но в данном случае новое время τ зависит от t нелинейно и, как будет показано ниже, находится с помощью квадратуры. Из (1.4) получаем

$$\frac{dv_1}{d\tau} = \omega - 1, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = -Av_1, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = 1,$$

откуда находим

$$v_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}\tau, \quad \omega = 1 + \alpha \cos \sqrt{A}\tau, \quad \varphi = (\varphi_0 + \tau) \bmod 2\pi, \quad (3.2)$$

где начало отсчета времени τ выбрано таким образом, что $v_1 = 0$ при $\tau = 0$. Здесь величина α связана с интегралом (1.5):

$$E = \frac{\alpha^2}{2A},$$

где $\alpha^2 < 1$ для периодических траекторий и $\alpha^2 > 1$ — для асимптотических.

Из уравнений (1.4) и соотношений (3.2) получим квадратуры, описывающие траекторию начала отсчета O_1 :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}\tau \cos(\varphi_0 + \tau) - \sin(\varphi_0 + \tau)}{1 + \alpha \cos \sqrt{A}\tau}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}\tau \sin(\varphi_0 + \tau) + \cos(\varphi_0 + \tau)}{1 + \alpha \cos \sqrt{A}\tau}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Связь времени t и времени τ определяется интегралом

$$t - t_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{1 + \alpha \cos \sqrt{A}\tau}.$$

Случай $\alpha^2 < 1$. Положим (также без ограничения общности) $\alpha > 0$. Согласно (3.2), эволюция переменных v_1, ω в новом времени τ периодическая с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{A}}. \quad (3.4)$$

Угол поворота тела за период в точности совпадает с этим периодом: $\Delta\varphi = T$.

Для того чтобы описать траекторию точки O_1 , представим скорость ее движения (3.3) в матричной форме

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\tau) &= \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{u}(\sqrt{A}\tau), \\ \mathbf{Q}(\tau) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + \tau) & -\sin(\varphi_0 + \tau) \\ \sin(\varphi_0 + \tau) & \cos(\varphi_0 + \tau) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}(\sqrt{A}\tau) &= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{A}} \frac{\sin \sqrt{A}\tau}{1 + \alpha \cos \sqrt{A}\tau}, \frac{1}{1 + \alpha \cos \sqrt{A}\tau} \right),\end{aligned}$$

где $\mathbf{v}(\tau) = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right)$.

Пользуясь этим представлением, находим, что скорость $\mathbf{v}(\tau)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\tau + nT) &= \mathbf{P}^n \mathbf{v}(\tau), \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \cos T & -\sin T \\ \sin T & \cos T \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Другими словами, скорость через период в каждой точке траектории поворачивается на один и тот же угол T . С помощью этого соотношения для точек траектории $\mathbf{r} = (x(\tau), y(\tau))$ получим уравнение

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\tau + nT) - \mathbf{r}_0 &= \left(\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{P}^m \right) \mathbf{s}_0 + \mathbf{P}^n (\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}_0), \\ \mathbf{r}(\tau) &= \mathbf{r}_0 + \int_0^{\tau} \mathbf{v}(\tau') d\tau', \quad \mathbf{s}_0 = \int_0^T \mathbf{v}(\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Возможны три различных случая.

- 1) Пусть $\mathbf{P}^n \neq \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, при этом $nT \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда справедливо соотношение (аналогичное сумме арифметической прогрессии)

$$\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{P}^m = (1 - \mathbf{P}^n)(1 - \mathbf{P})^{-1}.$$

Сдвинем начало отсчета неподвижных осей на постоянный вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) &= \mathbf{r}'(\tau) + \mathbf{c}, \\ \mathbf{c} &= \mathbf{r}_0 + (1 - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{s}_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

получим

$$\mathbf{r}'(\tau + nT) = \mathbf{P}^n \mathbf{r}'(\tau).$$

- 2) Пусть $\mathbf{P}^n = \mathbf{E}$ при некотором $n \geq 2$, в этом случае

$$nT = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

и, кроме того, выполнено соотношение

$$\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{P}^m = 0.$$

Из уравнения (3.5) находим

$$\mathbf{r}(\tau + nT) = \mathbf{r}(\tau).$$

- 3) Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, то есть

$$T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N},$$

тогда

$$\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{P}^m = n\mathbf{E}.$$

Подставляя $\mathbf{P}$ в (3.5), находим

$$\mathbf{r}(\tau + nT) = \mathbf{r}(\tau) + n\mathbf{s}_0.$$

Подставляя для периода T выражение (3.4), получим следующее утверждение.

Предложение. Если $A \neq \frac{n^2}{k^2}$, $n, k \in \mathbb{N}$, то траектория точки O_1 может быть получена из участка траектории за период $\tau \in [0, T)$, то есть из одного лепестка, путем его последовательного поворота на угол T (см. рис. 5, 7) вокруг точки, заданной вектором $\mathbf{c}$ (3.6); если $A = \frac{n^2}{k^2}$, $n, k \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$, то траектория точки O_1 периодическая (см. рис. 6); если $A = \frac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$, то за период T точка O_1 смещается на постоянный вектор $\mathbf{s}_0$ (см. рис. 8).

Рис. 5. Траектория точки O_1 при $A = 1/2$, $\alpha = 3/4$, $\varphi_0 = \pi/2$.

Рис. 6. Траектория точки O_1 при $A = n^2/k^2$, $\alpha = 0.95$, $\varphi_0 = \pi/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичный результат содержится в работе [21], где показано, что для тела вращения, катящегося по абсолютно шероховатой плоскости, точка контакта в отсутствие резонансов совершает сложное движение: она периодически движется по некоторой кривой, которая вращается, как твердое тело, с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки; при резонансах оказывается возможным вековой уход.

Случай $\alpha^2 > 1$. При этом мы также будем полагать, что $\alpha > 0$, но рассмотрим отдельно траектории, для которых $\omega > 0$ и $\omega < 0$ (см. рис. 4).

Рис. 7. Траектория точки O_1 при $A = 0.85$, $\alpha = 3/4$, $\varphi_0 = \pi/2$. Рис. 8. Траектория точки O_1 за период T при $A = 1/k^2$, $\alpha = 3/4$, $\varphi_0 = \pi/2$.

Рис. 9

Пусть $\omega > 0$, тогда

$$\tau \in (-\tau_*, \tau_*), \quad \tau_* = A^{-1/2}(\pi - \arccos \alpha^{-1}).$$

При $\tau \rightarrow \pm\tau_*$ время $t \rightarrow \pm\infty$ и вращение прекращается ($\omega \rightarrow 0$), траектория точки O_1 стремится к прямым, задаваемым соотношениями (3.1). Угол между этими прямыми совпадает с изменением угла поворота φ и задается уравнением

$$\Delta\varphi = 2\tau_*.$$

Сечения графика функции $\tau_*(\alpha, A)$ различными плоскостями $\alpha = \text{const}$ приведены на рисунке 10, характерные траектории точки — на рисунке 9.

Случай $\omega < 0$ получается из предыдущего ($\omega > 0$) заменой $\alpha \rightarrow -\alpha$, и при этом необходимо положить

$$\tau \in [-\tau_{**}, \tau_{**}], \quad \tau_{**} = A^{-1/2} \arccos \alpha^{-1}.$$

Движение в данном случае также асимптотически приближается (при $\tau \rightarrow \pm\tau_{**}$ и $t \rightarrow \pm\infty$) к прямолинейному движению без вращения ($\omega \rightarrow 0$). Изменение угла поворота вектора, касательного к траектории, также совпадает с изменением угла φ :

$$\Delta\varphi = 2\tau_{**}.$$

Зависимость $\tau_{**}(\alpha, A)$ и различные траектории точки O_1 проиллюстрированы на рисунках 11, 12.

Заключение

В этой работе мы рассмотрели динамику неоднородных саней Чаплыгина по инерции. Непосредственным обобщением этой задачи является исследование движения саней в поле тяжести на наклонной плоскости. В случае однородной связи эта система не является интегрируемой и демонстрирует сложное асимптотическое поведение [9].

Рис. 10. Траектории точки O_1 при $\omega > 0$, $\varphi_0 = \pi/2$ и различных значениях α , A .

Рис. 11

Рис. 12. Траектории точки O_1 при $\omega < 0$, $\alpha = 1.01$, $\varphi_0 = \pi/2$ и различных значениях A .

Другой интересной задачей является рассмотрение неоднородных саней при действии периодического возбуждения. В классической постановке ($v_0 = 0$) такая задача недавно была рассмотрена в [7].

Авторы выражают благодарность за полезные замечания И. А. Бизяеву, А. А. Килину.

References

- [1] Bizyaev I. A. The inertial motion of a roller racer, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 239–247.

- [2] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116.
- [3] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [4] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859.
- [5] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Dynamics and control of an omniwheel vehicle, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 153–172.
- [6] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. On the Hadamard–Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 752–766.
- [7] Borisov A. V., Kuznetsov S. P. Regular and chaotic motions of a Chaplygin sleigh under periodic pulsed torque impacts, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, nos. 7–8, pp. 792–803.
- [8] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [9] Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of a Chaplygin sleigh, *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 156–161; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 219–225.
- [10] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 8, no. 3, pp. 277–328.
- [11] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Jacobi integral in nonholonomic mechanics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 383–400.
- [12] Carathéodory C. Der Schlitten, *Z. Angew. Math. Mech.*, 1933, vol. 13, no. 2, pp. 71–76.
- [13] García-Naranjo L. C., Maciejewski A. J., Marrero J. C., Przybylska M. The inhomogeneous Suslov problem, *Phys. Lett. A*, 2014, vol. 378, nos. 32–33, pp. 2389–2394.
- [14] Karavaev Yu. L., Kilin A. A. Nonholonomic dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform: Theory and experiments, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 295, pp. 158–167; see also: *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 2016, vol. 295, pp. 174–183.
- [15] Rocard Y. *L'instabilité en mécanique: Automobiles, avions, ponts suspendus*, Paris: Masson, 1954.
- [16] Fassò F., Sansonetto N. Conservation of energy and momenta in nonholonomic systems with affine constraints, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 4, pp. 449–462.
- [17] Fedorov Yu. N., García-Naranjo L. C. The hydrodynamic Chaplygin sleigh, *J. Phys. A*, 2010, vol. 43, no. 43, 434013, 18 pp.
- [18] Kozlov V. V. Dynamics of systems with nonintegrable constraints: 1, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 1982, vol. 37, nos. 3–4, pp. 27–34; see also: *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh.*, 1982, no. 3, pp. 92–100.
- [19] Kozlov V. V. Dynamics of systems with nonintegrable constraints: 2, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 1982, vol. 37, nos. 3–4, pp. 74–80; see also: *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh.*, 1982, no. 3, pp. 70–76.
- [20] Kozlov V. V. Dynamics of systems with nonintegrable constraints: 3, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 1983, vol. 38, no. 3, pp. 40–51; see also: *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh.*, 1983, no. 3, pp. 102–111.
- [21] Moshchuk N. K. A qualitative analysis of the motion of a heavy solid of revolution on an absolutely rough plane, *J. Appl. Math. Mech.*, 1988, vol. 52, no. 2, pp. 159–165; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1988, vol. 52, no. 2, pp. 203–210.
- [22] Neimark Ju. I., Fufaev N. A. *Dynamics of nonholonomic systems*, Trans. Math. Monogr., vol. 33, Providence, R.I.: AMS, 1972.
- [23] Levin M. A., Fufaev N. A. *The theory of deformable wheel rolling*, Moscow: Nauka, 1989 (Russian).
- [24] Chaplygin S. A. On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier theorem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 369–376; see also: *Mat. Sb.*, 1912, vol. 28, no. 2, pp. 303–314.

An inhomogeneous Chaplygin sleigh

Alexey V. Borisov¹, Ivan S. Mamaev²

^{1,2}Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences

ul. Gubkina 8, Moscow, 119991 Russia

¹borisov@rcd.ru, ²mamaev@rcd.ru

In this paper we investigate the dynamics of a system that is a generalization of the Chaplygin sleigh to the case of an inhomogeneous nonholonomic constraint. We perform an explicit integration and a sufficiently complete qualitative analysis of the dynamics.

MSC 2010: 37J60

Keywords: Chaplygin sleigh, inhomogeneous nonholonomic constraints, conservation laws, qualitative analysis, resonance

Received June 02, 2017, accepted July 06, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 625–639 (Russian)