ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36

MSC 2010: 70E17, 70E50, 70H09, 70H14

Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса

М. В. Беличенко, О. В. Холостова

Рассматривается движение волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает заданное высокочастотное периодическое движение малой амплитуды в трехмерном пространстве. Исследуется приближенная автономная система уравнений движения, записанная в форме канонических уравнений Гамильтона. Решен вопрос о существовании и числе стационарных вращений волчка вокруг оси динамической симметрии. Проведено исследование устойчивости отвечающих этим вращениям положений равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы при фиксированном значении постоянной циклического интеграла, зависящей от угловой скорости вращения. Для случаев движения точки подвеса, допускающих стационарные вращения вокруг вертикали, проведен подробный линейный и нелинейный анализ устойчивости этих вращений и вращений вокруг наклонных осей. Для ряда других случаев движения точки подвеса проведен линейный анализ устойчивости.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, «спящий» волчок, высокочастотные вибрации, стационарные вращения, устойчивость

Получено 4 ноября 2016 года

После доработки 10 декабря 2016 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No 14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Беличенко Михаил Валериевич

tuzemec1@rambler.ru

Холостова Ольга Владимировна

kholostova_o@mail.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125993, Россия, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., д. 4

1. Введение

Исследование динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, центр масс которого расположен на оси симметрии, восходит к работам Ж. Лагранжа, описавшего свой знаменитый случай интегрируемости в 1788 году во втором томе «Аналитической механики» [1]. Частные движения волчка Лагранжа — регулярные прецессии — впервые рассмотрены в работах [2, 3]. В [2] исследована устойчивость регулярной прецессии по отношению к углу нутации; устойчивость по отношению к угловым скоростям прецессии и собственного вращения рассмотрена в статье [4]. Устойчивость другого частного движения волчка — вращения вокруг оси динамической симметрии, расположенной вертикально («спящего» волчка), рассмотрена в работе [5]. Динамика классического волчка Лагранжа с неподвижной точкой подробно описана во всех классических и современных монографиях по динамике твердого тела (см., например, книги [6–10]).

Актуальным — как с теоретической точки зрения, так и в прикладных технических задачах — является исследование динамики волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает заданное движение. В монографии [11] выводятся уравнения движения волчка Лагранжа в невырождающихся переменных в случае, когда точка его подвеса совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости, а к волчку приложен произвольный внешний момент. В работе [12] предложены кватернионные уравнения движения динамически симметричного твердого тела с точкой подвеса, движущейся произвольным образом в пространстве; при этом к телу приложен произвольный внешний момент. В статье [13] обсуждается возможность стабилизации «спящего» волчка Лагранжа в одной из областей неустойчивости за счет вертикальных гармонических колебаний точки подвеса. В работе [14] для системы двух гироскопов Лагранжа показана возможность сделать ранее неустойчивые вращения устойчивыми за счет вибрации точки подвеса, получены ограничения на амплитуду и частоту колебаний точки подвеса и на угловую скорость вращения гироскопов.

В цикле статей [15–19] методами гамильтоновой механики исследуется динамика волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания. В этом случае, как и в случае волчка Лагранжа с неподвижной точкой, в системе имеются две циклические координаты, поэтому решение задачи может быть сведено к рассмотрению приведенной системы с одной степенью свободы. В статье [15] в предположении, что амплитуда колебаний точки подвеса волчка мала, решен вопрос об устойчивости периодических движений волчка, рождающихся из его регулярной прецессии, при резонансе в вынужденных колебаниях и при его отсутствии. В работах [16–18] рассмотрена динамика волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает высокочастотные вертикальные колебания малой амплитуды. Исследуется вопрос о существовании, бифуркации и устойчивости высокочастотных периодических движений волчка, близких к его регулярной прецессии. В статье [19] дается полное и строгое решение задачи об устойчивости «спящего» волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания произвольной частоты и амплитуды.

В статье [20] рассмотрена динамика волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает высокочастотные периодические или условно-периодические вибрации малой амплитуды в трехмерном пространстве. Изучаются такие случаи вибрации, которые допускают в системе две циклические координаты (как в случае волчка с неподвижной точкой). Исследование проведено в рамках полученной ранее в [21, 22] системы приближенных автономных дифференциальных уравнений движения типа уравнений Эйлера–Пуассона. Решен вопрос

о существовании и устойчивости ряда частных движений волчка Лагранжа — стационарных вращений вокруг вертикальных и наклонных осей, регулярных прецессий.

В данной работе исследуется общий случай высокочастотных периодических движений точки подвеса волчка в трехмерном пространстве. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения, записанной в форме канонических уравнений Гамильтона, решается вопрос о существовании и числе стационарных вращений волчка вокруг оси динамической симметрии. Проводится исследование устойчивости отвечающих этим вращениям положений равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы при фиксированном значении постоянной циклического интеграла, зависящей от угловой скорости вращения. Для случаев движения точки подвеса, допускающих стационарные вращения вокруг вертикали, проведен подробный линейный и нелинейный анализ устойчивости этих вращений, а также вращений вокруг наклонных осей. В частности, получены необходимые и для части области изменения параметров достаточные условия устойчивости «спящего» волчка Лагранжа, являющиеся обобщением известного условия Маиевского–Четаева. Для ряда других случаев движения точки подвеса, включающих в себя произвольные (в рамках сделанных предположений) движения в горизонтальной или вертикальной плоскости, вдоль наклонной прямой, а также для части движений в наклонной плоскости и для других вариантов, проведен линейный анализ устойчивости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела с геометрией масс, соответствующей случаю Лагранжа (волчок Лагранжа), в однородном поле тяжести. Пусть точка закрепления (подвеса) O тела совершает периодическое, с частотой Ω , движение. В неподвижной системе координат O_*XYZ с осью O_*Z , направленной вертикально вверх, радиус-вектор $\mathbf{O}_*\mathbf{O}$ задается проекциями $\mathbf{O}_*\mathbf{O} = (u(t), v(t), w(t))^T$, причем средние по времени значения этих проекций равны нулю. Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$ с осями, параллельными неподвижным осям, а также связанную с волчком систему координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вдоль оси его динамической симметрии. Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно $OXYZ$ будем задавать с помощью углов Эйлера ψ, θ, φ .

Пусть m — масса тела, A и C — экваториальный и осевой моменты инерции для точки O , l — расстояние от точки подвеса до центра масс G волчка. Кинетическая и потенциальная энергии волчка вычисляются по формулам

$$T = \frac{1}{2} mV_O^2 + m\mathbf{V}_O \cdot \mathbf{V}_{Gr} + T_r, \quad \Pi = mg(l \cos \theta + w(t)). \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{V}_O$ — скорость точки O , $\mathbf{V}_{Gr} = \omega \times \mathbf{OG}$ и T_r — относительные (в системе координат $OXYZ$) скорость центра масс волчка и его кинетическая энергия, ω — вектор угловой скорости тела. Величина T_r определяется выражением

$$T_r = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2. \quad (2.2)$$

Здесь и далее точка над символом означает дифференцирование по времени t .

Уравнения движения волчка будем записывать в форме канонических уравнений Гамильтона, принимая за обобщенные координаты углы ψ, θ, φ . Введем сопряженные с ними импульсы по формулам

$$P_\psi = \partial T / \partial \dot{\psi}, \quad P_\theta = \partial T / \partial \dot{\theta}, \quad P_\varphi = \partial T / \partial \dot{\varphi} \quad (2.3)$$

и, используя соотношения (2.1), (2.2), составим гамильтониан

$$H = P_\psi \dot{\psi} + P_\theta \dot{\theta} + P_\varphi \dot{\varphi} - T + \Pi.$$

При этом второе слагаемое в функции кинетической энергии из (2.1) вычисляется с учетом кинематических уравнений Эйлера и выражений для направляющих косинусов осей связанной системы координат [23], а входящие в гамильтониан величины $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ выражены через импульсы с помощью соотношений (2.3).

Сделаем в полученном гамильтониане унивалентную каноническую замену переменных

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= \psi, & \hat{\theta} &= \theta, & \hat{\varphi} &= \varphi, & \hat{P}_\psi &= P_\psi - ml(\dot{u} \cos \psi + \dot{v} \sin \psi) \sin \theta, \\ \hat{P}_\theta &= P_\theta - ml[(\dot{u} \sin \psi - \dot{v} \cos \psi) \cos \theta - \dot{w} \sin \theta], & \hat{P}_\varphi &= P_\varphi,\end{aligned}$$

задаваемую производящей функцией

$$S = \psi \hat{P}_\psi + \theta \hat{P}_\theta + \varphi \hat{P}_\varphi + ml[(\dot{u} \sin \psi - \dot{v} \cos \psi) \sin \theta + \dot{w} \cos \theta].$$

Преобразованный гамильтониан запишется в виде (слагаемые, являющиеся функциями времени, отброшены)

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{P}_\varphi^2}{2C} + \frac{\hat{P}_\theta^2}{2A} + \frac{(\hat{P}_\psi - \hat{P}_\varphi \cos \hat{\theta})^2}{2A \sin^2 \hat{\theta}} + mgl \cos \hat{\theta} - \\ &- ml[(\ddot{u}(t) \sin \hat{\psi} - \ddot{v}(t) \cos \hat{\psi}) \sin \hat{\theta} + \ddot{w}(t) \cos \hat{\theta}].\end{aligned}\quad (2.4)$$

В системе с гамильтонианом (2.4) координата $\hat{\varphi}$ циклическая, и отвечающий ей импульс $\hat{P}_\varphi$ постоянен. Далее движения системы будем рассматривать при фиксированном значении величины $\hat{P}_\varphi$.

Пусть наибольшее отклонение h точки подвеса волчка от точки O_* мало по сравнению с приведенной длиной $L = A/ml$, а частота Ω ее колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\omega_* = \sqrt{g/L}$. Положим

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{L} \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad \frac{\omega_*}{\Omega} = \varepsilon^2 k, \quad h\Omega \sim 1. \quad (2.5)$$

Введем безразмерное «время» $\tau = \Omega t$ и представим компоненты радиус-вектора точки подвеса в виде $u(t) = hU(\tau)$, $v(t) = hV(\tau)$, $w(t) = hW(\tau)$. Затем осуществим в гамильтониане (2.4) каноническую замену переменных по формулам

$$\hat{\theta} = x_1, \quad \hat{\psi} = x_2, \quad \hat{P}_\theta = \varepsilon A \Omega X_1, \quad \hat{P}_\psi = \varepsilon A \Omega X_2 \quad (2.6)$$

и положим $\hat{P}_\varphi = \varepsilon A \Omega p$ ($p = \text{const}$). Преобразованный гамильтониан запишем в виде (здесь и далее штрих означает дифференцирование по τ)

$$\begin{aligned}H &= \varepsilon H_1 + \frac{\varepsilon^3}{6} H_3, \quad H_3 = 6k^2 \cos x_1, \\ H_1 &= \frac{X_1^2}{2} + \frac{(X_2 - p \cos x_1)^2}{2 \sin^2 x_1} - [(U'' \sin x_2 - V'' \cos x_2) \sin x_1 + W'' \cos x_1].\end{aligned}\quad (2.7)$$

Найдем далее близкую к тождественной каноническую замену переменных $x_1, x_2, X_1, X_2 \rightarrow y_1, y_2, Y_1, Y_2$, исключаящую из гамильтониана явно входящее «время» τ в слагаемых до порядка ε^3 включительно. Такая замена может быть получена, например, при помощи метода Депри – Хори [24]. Расчеты показывают, что эта замена имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + O(\varepsilon^2), & x_2 &= y_2 + O(\varepsilon^2), \\ X_1 &= Y_1 + \varepsilon[(-U' \sin y_2 + V' \cos y_2) \cos y_1 + W' \sin y_1] + O(\varepsilon^2), \\ X_2 &= Y_2 - \varepsilon(U' \cos y_2 + V' \sin y_2) \sin y_1 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Невыписанные в (2.8) слагаемые в дальнейшем не потребуются.

Преобразованный гамильтониан будет иметь вид

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon K_1 + \frac{\varepsilon^3}{6} K_3 + O(\varepsilon^4), \\ K_1 &= \frac{Y_1^2}{2} + \frac{(Y_2 - p \cos y_1)^2}{2 \sin^2 y_1}, \\ K_3 &= 6k^2 \cos y_1 - 3 \left\{ \left[(\langle U'^2 \rangle - \langle W'^2 \rangle) \sin^2 y_2 + (\langle V'^2 \rangle - \langle W'^2 \rangle) \cos^2 y_2 \right] \sin^2 y_1 + \right. \\ &\quad \left. + \sin 2y_1 (\langle U'W' \rangle \sin y_2 - \langle V'W' \rangle \cos y_2) - \langle U'V' \rangle \sin 2y_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где угловые скобки обозначают операцию усреднения по τ от указанного в них выражения. Слагаемое $O(\varepsilon^4)$ в (2.9) 2π -периодично по τ .

Отбросим в гамильтониане (2.9) слагаемое $O(\varepsilon^4)$ и получим приближенный гамильтониан, отвечающий автономной системе. Решения последней аппроксимируют решения полной неавтономной системы с погрешностью порядка $\varepsilon^{4-\gamma}$ на интервале времени τ порядка $\varepsilon^{-\gamma}$. Следуя [22], будем далее считать, что $\gamma = 5/2$.

В приближенном гамильтониане осуществим замену переменных, обратную замене (2.6),

$$\tilde{\theta} = y_1, \quad \tilde{\psi} = y_2, \quad \tilde{P}_\theta = \varepsilon A \Omega Y_1, \quad \tilde{P}_\psi = \varepsilon A \Omega Y_2, \quad (2.10)$$

и вернемся к размерному времени t и размерному параметру $\tilde{P}_\varphi = \varepsilon A \Omega p = \hat{P}_\varphi$. В результате приближенный размерный гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\tilde{P}_\theta^2}{2A} + \frac{(\tilde{P}_\psi - \tilde{P}_\varphi \cos \tilde{\theta})^2}{2A \sin^2 \tilde{\theta}} + \Pi(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}), \\ \Pi(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}) &= \Pi_g + \Pi_v, \quad \Pi_g = mgl \cos \tilde{\theta}, \\ \Pi_v &= -\frac{m^2 l^2}{2A} [(a_1 \sin^2 \tilde{\psi} + a_2 \cos^2 \tilde{\psi}) \sin^2 \tilde{\theta} + (a_{XZ} \sin \tilde{\psi} - a_{YZ} \cos \tilde{\psi}) \sin 2\tilde{\theta} - a_{XY} \sin 2\tilde{\psi}]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Последнее слагаемое в (2.11) представляет собой потенциальную энергию, складывающуюся из гравитационного Π_g и вибрационного Π_v потенциалов [21, 22, 25]. В выражении для Π_v введены обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= a_X - a_Z, & a_2 &= a_Y - a_Z, \\ a_X &= \langle \dot{u}^2 \rangle, & a_Y &= \langle \dot{v}^2 \rangle, & a_Z &= \langle \dot{w}^2 \rangle, & a_{XY} &= \langle \dot{u}\dot{v} \rangle, & a_{YZ} &= \langle \dot{v}\dot{w} \rangle, & a_{XZ} &= \langle \dot{u}\dot{w} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь угловыми скобками обозначены средние значения по t стоящих в них функций. Отметим, что выбором осей O_*X и O_*Y всегда можно добиться того, чтобы выполнялось соотношение $a_{XY} = 0$.

Учитывая описанную выше связь между решениями полной системы с гамильтонианом (2.9) и отвечающей ей приближенной системы, а также принимая во внимание соотношения (2.5) и проведенные замены переменных (2.6), (2.8) и (2.10), заключаем, что на интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1/2}$ решения автономной системы с приближенным гамильтонианом (2.11) связаны с решениями исходной неавтономной системы с гамильтонианом (2.4) соотношениями вида

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= \tilde{\psi} + O(\varepsilon^{3/2}), & \hat{\theta} &= \tilde{\theta} + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \hat{P}_\psi &= \tilde{P}_\psi - ml[(\dot{\psi} \cos \tilde{\psi} + \dot{\psi} \sin \tilde{\psi}) \sin \tilde{\theta}] + O(\varepsilon^{1/2}), \\ \hat{P}_\theta &= \tilde{P}_\theta + ml[(-\dot{\psi} \sin \tilde{\psi} + \dot{\psi} \cos \tilde{\psi}) \cos \tilde{\theta} + \dot{\psi} \sin \tilde{\theta}] + O(\varepsilon^{1/2}).\end{aligned}$$

Дальнейшее исследование будем проводить, оставаясь в рамках приближенной автономной системы с гамильтонианом (2.11); знак тильда над переменными будем опускать.

Рассмотрим отвечающую (2.11) приведенную систему с двумя степенями свободы. Эта система имеет частные решения (положения равновесия), описываемые соотношениями

$$\psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad P_\psi = P_\varphi \cos \theta_0, \quad P_\theta = 0 \quad (P_\varphi = C\omega = \text{const}). \quad (2.12)$$

Постоянные значения θ_0 и ψ_0 являются стационарными точками потенциальной энергии $\Pi(\psi, \theta)$ и удовлетворяют соотношениям $\Pi'_\theta = 0$, $\Pi'_\psi = 0$, сводящимся к уравнениям

$$\begin{aligned}\sin \theta + \frac{ml}{Ag} [(a_1 \sin^2 \psi + a_2 \cos^2 \psi) \sin \theta \cos \theta + (a_{XZ} \sin \psi - a_{YZ} \cos \psi) \cos 2\theta] &= 0, \\ \sin \theta [(a_1 - a_2) \sin \theta \cos \psi \sin \psi + (a_{XZ} \cos \psi + a_{YZ} \sin \psi) \cos \theta] &= 0.\end{aligned} \quad (2.13)$$

Данным решениям (в рамках приближенной системы) отвечают стационарные вращения волчка вокруг оси динамической симметрии, сохраняющей неизменное положение в теле и в системе координат $OXYZ$. Угловая скорость ω вращения может быть произвольной, без ограничения общности будем считать ее положительной.

Цель работы — решить вопрос о существовании и бифуркации указанных решений, а также исследовать их устойчивость по отношению к переменным ψ , θ , P_ψ и P_θ при фиксированных значениях величины P_φ . В случае произвольного (в рамках сделанных допущений) движения точки подвеса волчка данная задача зависит от пяти параметров: четырех вибрационных параметров, определяемых законом движения точки подвеса, и угловой скорости стационарного вращения. В общем случае решение задачи представляет значительные трудности. Далее будет рассмотрен ряд частных случаев движения точки подвеса.

В силу второго из уравнений (2.13) имеется частное решение $\sin \theta = 0$, для которого ось стационарного вращения занимает вертикальное положение («спящий» волчок Лагранжа). Так как в этих случаях углы ψ и φ не определены, система (2.13) совместна только при условии $a_{XY} = a_{YZ} = a_{XZ} = 0$; этот случай будет рассмотрен в разделе 4. В разделе 5 исследуется случай движения точки подвеса вдоль произвольной наклонной прямой, а в разделе 6 — случай $a_{XY} = a_{XZ} = 0$.

Отметим, что ранее в работе [20] исследование стационарных вращений волчка Лагранжа с вибрирующим подвесом при аналогичных предположениях было проведено для случая

«вибрационной симметрии»

$$a_X = a_Y, \quad a_{XY} = a_{YZ} = a_{XZ} = 0.$$

В этом случае в системе имеются две циклические координаты (углы прецессии и собственного вращения), как в случае волчка Лагранжа с неподвижной точкой подвеса. Получены достаточные условия устойчивости стационарных вращений путем построения связки первых интегралов приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанных в форме модифицированных уравнений Эйлера – Пуассона.

3. Схема исследования

Пусть сначала $\sin \theta_0 \neq 0$. Введем возмущения по формулам

$$q_1 = \theta - \theta_0, \quad q_2 = \psi - \psi_0, \quad p_1 = P_\theta, \quad p_2 = P_\psi - C\omega \cos \theta_0.$$

Квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения запишется в виде

$$H_2 = \frac{C^2\omega^2 + A\Pi''_{\theta\theta}}{2A} q_1^2 + \frac{\Pi''_{\psi\psi}}{2} q_2^2 + \frac{1}{2A} p_1^2 + \frac{1}{2A \sin^2 \theta_0} p_2^2 + \Pi''_{\psi\theta} q_1 q_2 + \frac{C\omega}{A \sin \theta_0} q_1 p_2, \quad (3.1)$$

$$\Pi''_{\theta\theta} = -mgl \cos \theta - \frac{m^2 l^2}{A} [(a_1 \sin^2 \psi + a_2 \cos^2 \psi) \cos 2\theta - 2(a_{XZ} \sin \psi - a_{YZ} \cos \psi) \sin 2\theta],$$

$$\Pi''_{\psi\theta} = -\frac{m^2 l^2}{A} [(a_1 - a_2) \cos 2\theta \cos \psi \sin \psi + (a_{XZ} \cos \psi + a_{YZ} \sin \psi) \sin 2\theta],$$

$$\Pi''_{\psi\psi} = -\frac{m^2 l^2}{A} \sin \theta [(a_1 - a_2) \sin \theta \cos 2\psi + (a_{YZ} \cos \psi - a_{XZ} \sin \psi) \cos \theta].$$

Достаточные условия устойчивости будем искать как условия знакоопределенности квадратичной формы H_2 , сводящиеся к системе неравенств

$$\Pi''_{\psi\psi} > 0, \quad \Delta = \Pi''_{\theta\theta} \Pi''_{\psi\psi} - (\Pi''_{\psi\theta})^2 > 0. \quad (3.2)$$

При выполнении условий (3.2) соответствующее положение равновесия приведенной системы является точкой минимума потенциальной энергии $\Pi(\theta, \psi)$, а угловая скорость стационарного вращения может быть произвольной.

Характеристическое уравнение системы линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \quad (3.3)$$

Его коэффициенты и дискриминант $d = a^2 - 4b$ вычисляются по формулам

$$a = \frac{A(\Pi''_{\psi\psi} + \Pi''_{\theta\theta} \sin^2 \theta_0) + C^2\omega^2 \sin^2 \theta_0}{A^2 \sin^2 \theta_0}, \quad b = \frac{\Delta}{A^2 \sin^2 \theta_0},$$

$$d = \frac{C^4}{A^4} \omega^4 + \frac{2C^2(\Pi''_{\psi\psi} + \Pi''_{\theta\theta} \sin^2 \theta_0)}{A^3 \sin^2 \theta_0} \omega^2 + \frac{(\Pi''_{\psi\psi} - \Pi''_{\theta\theta} \sin^2 \theta_0)^2 + 4(\Pi''_{\psi\theta})^2 \sin^2 \theta_0}{A^2 \sin^4 \theta_0}. \quad (3.4)$$

Если выполняются неравенства

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d > 0, \quad (3.5)$$

то корни $\pm i\omega_j$ ($j = 1, 2$; $\omega_1 > \omega_2$) уравнения (3.3) чисто мнимые и исследуемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Неравенства (3.5) задают необходимые условия устойчивости.

Отметим, что из условий (3.2) сразу следуют неравенства (3.5), то есть достаточные условия устойчивости являются также и необходимыми. Опишем случаи, когда выполняются только необходимые условия устойчивости. В силу условия $b > 0$ получаем, что должны выполняться неравенства

$$\Pi''_{\psi\psi} < 0, \quad \Delta > 0, \quad (3.6)$$

означающие, что положение равновесия является точкой максимума потенциальной энергии. Величина d из (3.4) представляет собой квадратный относительно ω^2 трехчлен, его старший коэффициент и свободный член положительны, а дискриминант равен $16\Delta/A^6 \sin^2 \theta_0 > 0$. Таким образом, квадратный трехчлен имеет два вещественных корня одного знака; в силу рассматриваемых условий $\Pi''_{\psi\psi} < 0$, $\Pi''_{\theta\theta} < 0$ эти корни положительные.

Линейный коэффициент a характеристического уравнения (3.3) положителен при условии $\omega^2 > -A(\Pi''_{\psi\psi} + \Pi''_{\theta\theta} \sin^2 \theta_0)/(C^2 \sin^2 \theta_0)$. Левая граница указанного интервала является точкой минимума квадратного трехчлена d и, следовательно, лежит в области его отрицательных значений.

Таким образом, решения системы $a > 0$, $d > 0$ лежат правее большего из двух корней функции d и задаются неравенством

$$\omega^2 > \frac{A}{C^2 \sin^2 \theta_0} \left[-(\Pi''_{\psi\psi} + \Pi''_{\theta\theta} \sin^2 \theta_0) + 2\sqrt{\Delta \sin^2 \theta_0} \right]. \quad (3.7)$$

Соотношения (3.6), (3.7) составляют необходимые условия устойчивости исследуемого положения равновесия приведенной системы.

При изменении знака неравенства (3.7) на противоположный, а также при выполнении условия $\Delta < 0$ (случай седловой точки функции $\Pi(\theta, \psi)$) положение равновесия приведенной системы неустойчиво.

В случае $\sin \theta_0 = 0$ следует перенаправить оси систем координат O_*XYZ и $OXYZ$ и внести соответствующие изменения в гамильтониан, после чего исследование проводится аналогичным образом.

В областях выполнения только необходимых условий устойчивости в ряде случаев проводится нелинейный анализ, использующий известные методы исследования устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [24].

Гамильтониан возмущенного движения представляется в виде

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (3.8)$$

где H_k ($k = 2, 3, 4, \dots$) — совокупность слагаемых степени k относительно возмущений.

Сначала осуществляется линейная унивалентная каноническая замена переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow q'_1, q'_2, p'_1, p'_2$, приводящая квадратичную часть H_2 к нормальной форме вида

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \omega_1 (q_1'^2 + p_1'^2) - \frac{1}{2} \omega_2 (q_2'^2 + p_2'^2). \quad (3.9)$$

Далее при помощи близкого к тождественному канонического преобразования $q'_1, q'_2, p'_1, p'_2 \rightarrow q''_1, q''_2, p''_1, p''_2$ нормализуются формы третьей и четвертой степеней.

Пусть в системе отсутствуют резонансы третьего и четвертого порядков. Тогда в «полярных» координатах φ_j, r_j ($j = 1, 2$), задаваемых формулами

$$q_j'' = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad p_j'' = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2),$$

нормализованный гамильтониан имеет вид

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}). \quad (3.10)$$

Если при этом выполняется неравенство

$$D = c_{20} \omega_2^2 + c_{11} \omega_1 \omega_2 + c_{02} \omega_1^2 \neq 0, \quad (3.11)$$

то исследуемое положение равновесия приведенной системы устойчиво по Ляпунову. Случай вырождения $D = 0$ требует рассмотрения в гамильтониане возмущенного движения слагаемых выше четвертой степени относительно возмущений; такое исследование в работе не проводится.

При наличии резонанса третьего порядка ($\omega_1 = 2\omega_2$) в выражение (3.10) нормализованного гамильтониана добавляется слагаемое вида $k_3 \sqrt{r_1} r_2 \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)$. Если резонансный коэффициент k_3 отличен от нуля, то рассматриваемое решение неустойчиво; если же $k_3 = 0$ и одновременно выполнено условие $c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0$, то имеет место устойчивость по Ляпунову.

В случае резонанса четвертого порядка ($\omega_1 = 3\omega_2$) в (3.10) добавляется слагаемое вида $k_4 r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)$. Если выполняется условие

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}|k_4|, \quad (3.12)$$

то положение равновесия приведенной системы устойчиво по Ляпунову; при выполнении неравенства с противоположным знаком имеет место неустойчивость.

4. Случай $a_{XY} = a_{YZ} = a_{XZ} = 0$

Рассмотрим сначала случай $a_{XY} = a_{YZ} = a_{XZ} = 0$, для которого ось стационарного вращения волчка может быть вертикальной. Этот случай охватывает, в частности, движение точки подвеса вдоль вертикальной или горизонтальной прямой, а также произвольное (в рамках сделанных допущений) движение в горизонтальной плоскости.

Кроме двух положений равновесия на вертикали $\theta_0 = 0$ (перевернутый «спящий» волчок) и $\theta_0 = \pi$ (висящий «спящий» волчок), приведенная система может иметь положения равновесия, для которых ось динамической симметрии волчка наклонена к вертикали (боковые равновесия). Для боковых равновесий первого типа ось волчка располагается в плоскости OXZ и при этом

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \theta_0 = -\frac{Ag}{mla_1} \quad \left(|a_1| > \frac{Ag}{ml} \right). \quad (4.1)$$

Для боковых равновесий второго типа ось волчка лежит в плоскости OYZ и

$$\psi_0 = 0, \quad \cos \theta_0 = -\frac{Ag}{mla_2} \quad \left(|a_2| > \frac{Ag}{ml} \right). \quad (4.2)$$

4.1. Исследование достаточных и необходимых условий устойчивости

4.1.1. Вертикальные равновесия

Рассмотрим сначала положения равновесия, для которых $\sin \theta_0 = 0$. Для устранения неопределенности в гамильтониане (2.11) будем в этом разделе считать, что оси O_*Y и OY неподвижной и поступательно движущейся систем координат направлены вертикально вверх. Вместо параметров a_1 и a_2 из гамильтониана (2.11) введем аналогичные параметры

$$b_1 = a_Z - a_Y, \quad b_2 = a_X - a_Y.$$

Без ограничения общности полагаем, что $a_Z > a_X$ (то есть $b_1 > b_2$).

При сделанном выборе осей выражение для потенциальной энергии в (2.11) следует переписать в виде (знак тильда над символами опускаем)

$$\Pi(\theta, \psi) = -mgl \cos \psi \sin \theta - \frac{m^2 l^2 \sin^2 \theta}{2A} [(b_2 - b_1) \sin^2 \psi - b_1 \cos^2 \psi]. \quad (4.3)$$

Для рассматриваемых вертикальных равновесий вторые частные производные потенциальной энергии имеют вид

$$\Pi''_{\theta\theta} = \frac{m^2 l^2}{A} \left(-b_1 \mp \frac{Ag}{ml} \right), \quad \Pi''_{\psi\psi} = \frac{m^2 l^2}{A} \left(-b_2 \mp \frac{Ag}{ml} \right), \quad \Pi''_{\theta\psi} = 0, \quad (4.4)$$

а коэффициенты a и b характеристического уравнения (3.3) определяются выражениями

$$a = \frac{C^2 \omega^2 - m^2 l^2 (b_1 + b_2) \mp 2mlAg}{A^2}, \quad b = \frac{m^2 l^2}{A^4} (mlb_1 \pm Ag)(mlb_2 \pm Ag). \quad (4.5)$$

В (4.4) и (4.5) верхний и нижний знаки относятся, соответственно, к верхнему ($\psi_0 = \pi$, $\theta_0 = \pi/2$) и нижнему ($\psi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$) равновесиям.

Из приведенных выражений и результатов раздела 3 следует, что если выполнены условия

$$a_X + \frac{Ag}{ml} < a_Z + \frac{Ag}{ml} < a_Y, \quad (4.6)$$

то *верхнее положение равновесия* на вертикали, соответствующее перевернутому «спящему» волчку, устойчиво при любом значении угловой скорости. Если вибрационные параметры связаны соотношением

$$a_X + \frac{Ag}{ml} < a_Y < a_Z + \frac{Ag}{ml}, \quad (4.7)$$

то стабилизация перевернутого «спящего» волчка невозможна, он всегда неустойчив. Если выполняются неравенства

$$a_Y < a_X + \frac{Ag}{ml} < a_Z + \frac{Ag}{ml}, \quad (4.8)$$

то для значений угловых скоростей из диапазона

$$C\omega > \sqrt{ml} \left(\sqrt{Ag + ml(a_Z - a_Y)} + \sqrt{Ag + ml(a_X - a_Y)} \right) \quad (4.9)$$

стационарное вращение устойчиво в линейном приближении (выполняются только необходимые условия устойчивости), а при изменении знака неравенства в (4.9) на противоположный имеем неустойчивость.

Таким образом, если вибрационный параметр a_Y (среднее значение квадрата вертикальной составляющей скорости точки подвеса волчка) будет наибольшим или наименьшим по величине из трех параметров $a_X + Ag/(ml)$, a_Y , $a_Z + Ag/(ml)$, то перевернутый волчок, соответственно, устойчив или его можно стабилизировать выбором угловой скорости вращения; если этот параметр является по величине средним из трех, то стабилизация невозможна.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть точка подвеса волчка совершает движение в горизонтальной плоскости ($a_Y = 0$), условия (4.6) и (4.7) не выполняются. Рассматриваемое стационарное вращение устойчиво (в линейном приближении), если угловая скорость вращения удовлетворяет условию (4.9) (при $a_Y = 0$), и неустойчиво в противном случае.

В случае «вибрационной симметрии» ($a_X = a_Z$) достаточные (и одновременно необходимые) условия устойчивости имеют вид

$$a_Y > a_X + \frac{Ag}{ml}, \quad (4.10)$$

а только необходимые условия — вид

$$a_Y < a_X + \frac{Ag}{ml}, \quad C^2\omega^2 > 4ml[Ag + ml(a_X - a_Y)]. \quad (4.11)$$

Из соотношений (4.10) и (4.11) следует, что второе неравенство в (4.11) является необходимым условием устойчивости при любом знаке величины $Ag + ml(a_X - a_Y)$. Ранее в работе [20] другим путем показано, что это неравенство является достаточным условием устойчивости перевернутого «спящего» волчка в рассматриваемом случае.

При движении точки подвеса волчка вдоль вертикали ($a_X = a_Z = 0$) достаточные и только необходимые условия устойчивости имеют, соответственно, вид (см. также [19])

$$a_Y > \frac{Ag}{ml} \quad \text{и} \quad a_Y < \frac{Ag}{ml}, \quad C^2\omega^2 > 4ml(Ag - mla_Y). \quad (4.12)$$

При отсутствии вибраций ($a_X = a_Y = a_Z = 0$) второе неравенство (4.12) переходит в классическое условие Маиевского–Четаева устойчивости перевернутого «спящего» волчка Лагранжа с неподвижной точкой подвеса

$$C^2\omega^2 > 4Amgl.$$

Рассмотрим *нижнее положение равновесия* на вертикали, соответствующее висящему «спящему» волчку Лагранжа. При выполнении условия

$$a_X < a_Z < a_Y + \frac{Ag}{ml} \quad (4.13)$$

имеем устойчивость при любом значении угловой скорости вращения. Если удовлетворяется неравенство

$$a_X < a_Y + \frac{Ag}{ml} < a_Z,$$

то стабилизация стационарного вращения невозможна. Неравенства

$$\begin{aligned} a_Y + \frac{Ag}{ml} < a_X < a_Z, \\ C\omega > \sqrt{ml} \left(\sqrt{ml(a_Z - a_Y) - Ag} + \sqrt{ml(a_X - a_Y) - Ag} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

составляют только необходимые условия устойчивости; при изменении знака второго из них на противоположный имеем неустойчивость.

Аналогично предыдущему случаю заключаем, что для устойчивости или возможности стабилизации висящего волчка параметр $a_Y + Ag/(ml)$ должен быть наибольшим или наименьшим из трех параметров a_X , $a_Y + Ag/(ml)$, a_Z ; если этот параметр средний по величине из трех, то стабилизация невозможна.

В частном случае, когда точка подвеса волчка совершает движение в горизонтальной плоскости ($a_Y = 0$), могут реализоваться все перечисленные варианты. Если точка подвеса движется вдоль горизонтальной прямой ($a_X = a_Y = 0$), то при выполнении условия

$$a_Z < \frac{Ag}{ml}$$

висящий «спящий» волчок устойчив, а при выполнении неравенства противоположного знака — неустойчив при всех угловых скоростях.

При наличии «вибрационной симметрии» ($a_X = a_Z$) могут выполняться как достаточные

$$a_X < a_Y + \frac{Ag}{ml},$$

так и только необходимые

$$a_X > a_Y + \frac{Ag}{ml}, \quad C^2\omega^2 > 4ml[ml(a_X - a_Y) - Ag]$$

условия устойчивости.

При движении точки подвеса волчка вдоль вертикали ($a_X = a_Z = 0$), а также при отсутствии вибрации ($a_X = a_Y = a_Z = 0$) висящий «спящий» волчок Лагранжа всегда устойчив, так как в этом случае выполняются достаточные условия (4.13).

4.1.2. Боковые равновесия

Вернемся к рассмотрению гамильтониана (2.11) (при $a_{XY} = a_{XZ} = a_{YZ} = 0$) и проведем исследование устойчивости боковых равновесий (4.1) и (4.2) приведенной системы. Аналогично предыдущему рассмотрению, будем считать, что $a_X > a_Y$ (т.е. $a_1 > a_2$).

Для боковых равновесий первого типа вторые частные производные функции потенциальной энергии имеют вид

$$\Pi''_{\theta\theta} = \frac{m^2 l^2 a_1^2 - A^2 g^2}{A a_1}, \quad \Pi''_{\theta\psi} = 0, \quad \Pi''_{\psi\psi} = \frac{a_1 - a_2}{A a_1^2} (m^2 l^2 a_1^2 - A^2 g^2). \quad (4.15)$$

В области существования данного равновесия, определенной в (4.1), справедливо неравенство $\Pi''_{\psi\psi} > 0$, поэтому вопрос об устойчивости решает знак величины a_1 в производной $\Pi''_{\theta\theta}$: при $a_1 > 0$ имеем устойчивость, а при $a_1 < 0$ — неустойчивость.

С учетом области существования найдем, что достаточные условия устойчивости задаются неравенством

$$a_X > a_Z + \frac{Ag}{ml},$$

а условия неустойчивости — неравенством

$$a_Z > a_X + \frac{Ag}{ml}.$$

Таким образом, для данных равновесий (ось волчка лежит в плоскости OXZ) в случае устойчивости вибрационный параметр a_X должен быть наибольшим по величине из трех параметров a_X , a_Y , $a_Z + Ag/(ml)$, а в случае неустойчивости — средним по величине.

Для боковых равновесий второго типа вторые частные производные функции $\Pi(\theta, \psi)$ вычисляются по формулам (4.15), в которых параметры a_1 и a_2 поменялись местами, а равновесное значение θ_0 определяется вторым соотношением в (4.2). В области существования этого равновесия (см. (4.2)) имеем $\Pi''_{\psi\psi} < 0$, и вопрос об устойчивости определяется знаком величины a_2 в производной $\Pi''_{\theta\theta}$: при $a_2 > 0$ имеем неустойчивость, при $a_2 < 0$ равновесие может быть стабилизировано за счет угловой скорости вращения.

С учетом области существования, получаем условия неустойчивости в виде

$$a_Y > a_Z + \frac{Ag}{ml}$$

и необходимые условия устойчивости в виде

$$a_Z > a_Y + \frac{Ag}{ml}, \quad C\omega > ml\sqrt{a_X - a_Y} + \sqrt{\frac{m^2 l^2 (a_Z - a_Y)^2 - A^2 g^2}{a_Z - a_Y}}. \quad (4.16)$$

Для этих равновесий (ось волчка в плоскости OYZ) имеем неустойчивость, если параметр a_Y является средним по величине из трех параметров a_X , a_Y и $a_Z + Ag/(ml)$; если этот параметр наименьший из трех, то равновесие может быть стабилизировано.

В частном случае, когда точка подвеса волчка движется в горизонтальной плоскости ($a_Z = 0$), для равновесия первого типа в области его существования выполняются достаточные условия устойчивости, а для равновесия второго типа — условия неустойчивости. При движении точки подвеса волчка по горизонтальной прямой OX боковое равновесие первого типа устойчиво в области существования, боковое равновесие второго типа не существует.

В случае «вибрационной симметрии» $a_X = a_Y$ появляется вторая циклическая координата ψ , приведенная система имеет одну степень свободы, ее потенциальная энергия определяется выражением

$$\Pi(\theta) = mgl \cos \theta - \frac{m^2 l^2}{2A} a_1 \sin^2 \theta.$$

В этом случае боковые равновесия первого и второго типов сливаются в семейство боковых равновесий, для которых угол ψ может принимать произвольное значение, а угол θ определяется вторым соотношением в (4.1). Несложный анализ показывает, что необходимые и достаточные условия устойчивости равновесий из данного семейства определяются неравенством

$$C^2 \omega^2 > \frac{m^2 l^2 (a_Z - a_Y)^2 - A^2 g^2}{a_Z - a_Y},$$

что совпадает с результатом работы [20].

4.2. Нелинейный анализ устойчивости

Проведем теперь нелинейный анализ устойчивости рассматриваемых положений равновесия приведенной системы в тех областях, где выполняются только необходимые условия устойчивости.

4.2.1. Вертикальные положения

Введем в гамильтониане (2.11) с потенциальной энергией (4.3) безразмерные параметры, импульсы и время по формулам (частота ω_* определена в разделе 2)

$$\beta_1 = \frac{mlb_1}{Ag}, \quad \beta_2 = \frac{mlb_2}{Ag} \quad (\beta_1 > \beta_2),$$

$$P_\psi = A\omega_* P_1, \quad P_\theta = A\omega_* P_2, \quad P_\varphi = A\omega_* \gamma \quad (\gamma = \text{const}), \quad \tau = \omega_* t. \quad (4.17)$$

Гамильтониан системы перепишется в виде

$$H = \frac{P_2^2}{2} + \frac{(P_1 - \gamma \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} - \cos \psi \sin \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} [(\beta_2 - \beta_1) \sin^2 \psi - \beta_1 \cos^2 \psi].$$

Область (4.8), (4.9) выполнения только необходимых условий устойчивости для верхнего положения в безразмерных параметрах запишется следующим образом:

$$\beta_1 > \beta_2 > -1, \quad \gamma > \gamma_1(\beta_1, \beta_2) = \sqrt{\beta_1 + 1} + \sqrt{\beta_2 + 1}; \quad (4.18)$$

область (4.14) для нижнего положения примет вид

$$\beta_1 > \beta_2 > 1, \quad \gamma > \sqrt{\beta_1 - 1} + \sqrt{\beta_2 - 1}. \quad (4.19)$$

Гамильтониан возмущенного движения в окрестности рассматриваемых равновесий имеет вид (3.8), где

$$H_2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 - \beta_1 \mp 1)q_1^2 + \frac{1}{2}(\mp 1 - \beta_2)q_2^2 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 \mp \gamma p_2 q_1, \quad H_3 = 0,$$

$$H_4 = \left(\frac{1}{6}\beta_1 + \frac{1}{3}\gamma^2 \pm \frac{1}{24}\right)q_1^4 + \left(\frac{1}{2}\beta_2 \pm \frac{1}{4}\right)q_1^2 q_2^2 + \left(\frac{1}{6}\beta_2 \pm \frac{1}{24}\right)q_2^4 + \frac{1}{2}p_2^2 q_1^2 \mp \frac{5}{6}\gamma p_2 q_1^3.$$

Здесь и далее в этом разделе верхние знаки соответствуют верхнему положению, а нижние — нижнему.

Линейная унивалентная каноническая замена переменных вида

$$q_1 = \kappa_1(\beta_2 \pm 1 + \omega_1^2)q'_1 - \kappa_2(\beta_2 \pm 1 + \omega_2^2)q'_2, \quad q_2 = \pm \kappa_1 \gamma \omega_1 p'_1 \pm \kappa_2 \gamma \omega_2 p'_2,$$

$$p_1 = \kappa_1 \omega_1(\beta_2 \pm 1 + \omega_1^2)p'_1 + \kappa_2 \omega_2(\beta_2 \pm 1 + \omega_2^2)p'_2, \quad p_2 = \kappa_1 \gamma(\beta_2 \pm 1)q'_1 - \kappa_2 \gamma(\beta_2 \pm 1)q'_2,$$

$$\kappa_1^{-2} = \omega_1[\beta_2^2 - (g^2 - \omega_1^2 \mp 1 + \beta_1)\beta_2 - (-g^2 + \beta_1)\omega_1^2 \mp g^2 \mp \beta_1],$$

$$\kappa_2^{-2} = \omega_2[-\beta_2^2 + (g^2 - \omega_2^2 \mp 1 + \beta_1)\beta_2 + (-g^2 + \beta_1)\omega_2^2 \pm g^2 \pm \beta_1]$$

приводит квадратичные части H_2 гамильтонианов к нормальной форме (3.9). Здесь ω_1 и ω_2 — собственные частоты малых колебаний, определяемые из уравнения (3.3) при учете соотношений (4.5).

Далее проведем нормализацию в слагаемых четвертой степени. При отсутствии резонанса четвертого порядка гамильтониан приводится к виду (3.10), причем коэффициенты c_{jk} определяются формулами

$$c_{20} = \frac{\kappa_1^4}{16} [(4\beta_2 \pm 1)\omega_1^4\gamma^4 + 2\omega_1^2(4\omega_1^2 \mp 1)(\beta_2 \pm 1 + \omega_1^2)^2\gamma^2 + (\beta_2 \pm 1 + \omega_1^2)^4(4\beta_1 \pm 1)],$$

$$c_{11} = \frac{\kappa_1^2\kappa_2^2}{4} \left[\omega_1^2\omega_2^2(4\beta_2 \pm 1)\gamma^4 + ((8\omega_2^2 \pm 7 + 8\beta_2)\omega_2^2\omega_1^4 + ((8\beta_2 \pm 7)\omega_2^4 + (4 + 8\beta_2^2 \pm 12\beta_2)\omega_2^2 \mp (\beta_2 \pm 1)^2)\omega_1^2 \mp \omega_2^2(\beta_2 \pm 1)^2)\gamma^2 + (\beta_2 \pm 1 + \omega_2^2)^2(\beta_2 \pm 1 + \omega_1^2)^2(4\beta_1 \pm 1) \right].$$

Коэффициент c_{02} получается из c_{20} при замене ω_1 на ω_2 и κ_1 на κ_2 .

Устойчивость может быть нарушена на поверхности вырождения $D = 0$ (величина D определена в (3.11)). Расчеты показывают, что для нижнего равновесия поверхность вырождения в области (4.19) его устойчивости в линейном приближении отсутствует. Для верхнего равновесия в области (4.18) имеется поверхность вырождения, ее уравнение представляется в виде

$$(4\beta_1 + 4\beta_2^2\beta_1 + 14\beta_2\beta_1 + 4\beta_2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + 4\beta_1^2\beta_2)\gamma^4 + (60\beta_2^2 - 2\beta_1^3 + 122\beta_1^2\beta_2 + 104\beta_2 - 2\beta_2^3 + 60\beta_1^2 - 8\beta_2^3\beta_1 + 48 + 80\beta_1^2\beta_2^2 + 122\beta_2^2\beta_1 + 104\beta_1 - 8\beta_1^3\beta_2 + 216\beta_2\beta_1)\gamma^2 + (4\beta_2^2\beta_1 + \beta_2^2 + 10\beta_2 + 4\beta_1^2\beta_2 + 20\beta_2\beta_1 + \beta_1^2 + 6 + 10\beta_1)(\beta_2 - \beta_1)^2 = 0. \quad (4.20)$$

Пусть в системе реализуется резонанс четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$. Резонансные поверхности существуют в обеих рассматриваемых областях (4.18) и (4.19) устойчивости в линейном приближении вертикальных равновесий. Уравнения резонансных поверхностей имеют вид

$$\gamma^2 = \beta_1 + \beta_2 \pm 2 + \frac{10}{3} \sqrt{(\beta_1 \pm 1)(\beta_2 \pm 1)}, \quad (4.21)$$

а резонансные коэффициенты k_4 в соответствующих резонансных слагаемых определяются выражениями

$$k_4 = \frac{\kappa_1\kappa_2^3}{12} \left[3(4\beta_2 \pm 1)\omega_2^4\gamma^4 - 6(3\omega_2^2 \mp 1 - \beta_2)(\beta_2 \pm 1 + \omega_2^2)(4\omega_2^2 \pm 1)\omega_2^2\gamma^2 - (9\omega_2^2 + \beta_2 \pm 1)(4\beta_1 \pm 1)(\beta_2 \pm 1 + \omega_2^2)^3 \right].$$

Для *нижнего равновесия* на поверхности резонанса четвертого порядка выполнено условие (3.12) и, таким образом, в области (4.19) нижнее равновесие приведенной системы устойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим область (4.18), отвечающую *верхнему равновесию* приведенной системы. Будем строить сечения области (4.18) и указанных поверхностей плоскостями $\beta_1 = \beta_1^* = \text{const}$ при различных значениях β_1^* ($\beta_1^* > -1$) и представлять результаты в плоскости параметров β_2 ($-1 < \beta_2 < \beta_1^*$) и γ . В каждом таком сечении исследуемая область ограничена вертикальными прямыми $\beta_2 = -1$ и $\beta_2 = \beta_1^*$ и частью кривой $\gamma = \gamma_1(\beta_1^*, \beta_2)$ (см. (4.18)), показанными на рисунке 1 тонкими сплошными линиями. Кривые вырождения представлены пунктирными линиями. Резонансные кривые изображены сплошными полужирными линиями на участках устойчивости и точечными линиями на участках неустойчивости. Рисунки 1a, b, c соответствуют случаям $-1 < \beta_1^* \leq -1/2$ (a), $-1/2 < \beta_1^* \leq -9/20$ (b), $\beta_1^* > -9/20$ (c).

Рис. 1. Нелинейный анализ в области устойчивости в линейном приближении (верхнее равновесие).

В каждом исследуемом сечении имеется кривая резонанса четвертого порядка, с концами в угловой точке и на правой вертикальной границе области (рис. 1). Кривые вырождения существуют при $\beta_1^* > -1/2$ (рис. 1b, c), при этом для значений β_1^* из интервала $-1/2 < \beta_1^* < 0$ они ограничены (см. рис. 1b), а при $\beta_1^* \geq 0$ имеют вертикальную асимптоту (см. рис. 1c).

При $-1/2 < \beta_1^* < -9/20$ кривая вырождения и резонансная кривая не пересекаются, при $\beta_1^* = -9/20$ они имеют общую точку $\beta_2 = -9/20$, $\gamma = 2\sqrt{11/15}$ на правой границе исследуемой области, а при $\beta_1^* > -9/20$ две кривые пересекаются в точке, лежащей внутри области (рис. 1c).

Для значений $-1 < \beta_1^* < -9/20$ на резонансных кривых имеет место устойчивость, при $\beta_1^* > -9/20$ появляются участки неустойчивости, включающие в себя точку пересечения резонансной кривой и кривой вырождения.

Более полную информацию об эволюции области неустойчивости в исследуемых сечениях дает рисунок 2. Здесь показана проекция области неустойчивости, имеющейся на резонансной поверхности (в трехмерном пространстве параметров), на плоскость (β_1, β_2) . Границей области в этой плоскости служит кривая (полужирная линия на рисунке 2), задаваемая уравнением $(c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02})^2 = 27k_4^2$, в которое подставлены приведенные выше коэффициенты нормальной формы, после чего при помощи соотношения (4.21) (где выбран верхний знак) исключена величина γ . При $\beta_1 \rightarrow \infty$ граничная кривая имеет две горизонтальные асимптоты $\beta_1 = -0.587\dots$ и $\beta_1 = -0.781\dots$. Пунктирной линией на рисунке 2 показана проекция кривой пересечения резонансной поверхности и поверхности вырождения, ее уравнение получается в результате проведения той же подстановки (4.21) в уравнение (4.20).

Рис. 2. Проекция области неустойчивости при резонансе четвертого порядка на плоскость (β_1, β_2) .

4.2.2. Боковое равновесие второго типа

В гамильтониане (2.11) введем безразмерные параметры

$$\alpha_1 = \frac{mla_1}{Ag}, \quad \alpha_2 = \frac{mla_2}{Ag} \quad (\alpha_1 > \alpha_2),$$

а также безразмерные импульсы и время по формулам (4.17).

Гамильтониан (2.11) примет вид

$$H = \frac{P_2^2}{2} + \frac{(P_1 - \gamma \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} (\alpha_1 \sin^2 \psi + \alpha_2 \cos^2 \psi).$$

Область выполнения только необходимых условий (4.16) в безразмерных параметрах определяется соотношениями

$$\alpha_2 < -1, \quad \gamma > \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2} + \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - 1}{|\alpha_2|}}.$$

Гамильтониан возмущенного движения имеет вид (3.8), где

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{p_1^2}{2} + \frac{\alpha_2^2 p_2^2}{2(\alpha_2^2 - 1)} + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_2 \gamma^2 - 1}{2\alpha_2} q_1^2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^2 - 1)}{2\alpha_2^2} q_2^2 + \frac{\gamma q_1 p_2}{\sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}}, \\ H_3 &= \frac{p_2^2 q_1}{\alpha_2 \sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}^3} + \frac{3\alpha_2 \gamma p_2 q_1^2}{2(\alpha_2^2 - 1)} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^2 - 1)}{\alpha_2^3 \sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}} q_1 q_2^2 + \frac{1 + \alpha_2 \gamma^2 - \alpha_2^2}{2\alpha_2^2 \sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}} q_2^3, \\ H_4 &= \frac{-4\alpha_2^4 + 8\gamma^2 \alpha_2^3 + 11\alpha_2^2 + 7\gamma^2 \alpha_2 - 7}{24\alpha_2(\alpha_2^2 - 1)} q_1^4 - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^2 - 2)}{2\alpha_2^2} q_1^2 q_2^2 + \\ &\quad - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^2 - 1)}{6\alpha_2^2} q_2^4 + \frac{\alpha_2^2(\alpha_2^2 + 2)}{2(\alpha_2^2 - 1)^2} p_2^2 q_1^2 + \frac{(5\alpha_2^2 + 7)\gamma}{6\alpha_2^2 \sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}^3} p_2 q_1^3. \end{aligned}$$

Линейная унивалентная каноническая замена переменных по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= \kappa_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2 + \omega_1^2) q_1' - \kappa_2 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2 + \omega_2^2) q_2', \\ q_2 &= -\frac{\kappa_1 \omega_1 \gamma \alpha_2}{\sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}} p_1' - \frac{\kappa_2 \omega_2 \gamma \alpha_2}{\sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}} p_2', \\ p_1 &= \kappa_1 \omega_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2 + \omega_1^2) p_1' + \kappa_2 \omega_2 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2 + \omega_2^2) p_2', \\ p_2 &= -\frac{\kappa_1 \gamma (\alpha_2^2 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2 \sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}} q_1' + \frac{\kappa_2 \gamma (\alpha_2^2 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2 \sqrt{1 - 1/\alpha_2^2}} q_2', \\ \kappa_1^{-2} &= [(\gamma^2 - \alpha_1) \alpha_2^2 + (\alpha_1^2 + (\omega_1^2 - \gamma^2) \alpha_1 + \omega_1^2 \gamma^2 + 1) \alpha_2 - \omega_1^2 - \alpha_1] \omega_1 \alpha_2, \\ \kappa_2^{-2} &= -[(\gamma^2 - \alpha_1) \alpha_2^2 + (\alpha_1^2 + (\omega_2^2 - \gamma^2) \alpha_1 + \omega_2^2 \gamma^2 + 1) \alpha_2 - \omega_2^2 - \alpha_1] \omega_2 \alpha_2, \end{aligned}$$

где ω_1 и ω_2 — собственные частоты малых линейных колебаний приведенной системы в окрестности исследуемого равновесия, приводит квадратичную часть H_2 к нормальной форме (3.9).

Далее проведена нелинейная нормализация в слагаемых H_3 и H_4 , при этом рассмотрены нерезонансный случай и случаи резонансов третьего и четвертого порядков. Уравнения соответствующих резонансных поверхностей в пространстве параметров α_1 , α_2 , γ имеют вид

$$\gamma^2 = \frac{\alpha_2 \alpha_1 - 2\alpha_2^2 + 1}{\alpha_2} - \frac{5}{2\alpha_2} \sqrt{\alpha_2(\alpha_2^2 - 1)(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\gamma^2 = \frac{\alpha_2 \alpha_1 - 2\alpha_2^2 + 1}{\alpha_2} - \frac{10}{3\alpha_2} \sqrt{\alpha_2(\alpha_2^2 - 1)(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

В силу громоздкости выражения для коэффициентов c_{jk} нормальной формы, резонансных коэффициентов k_3 и k_4 , а также уравнение поверхности вырождения здесь не приводятся.

Проиллюстрируем полученные результаты, показывая сечения исследуемой области плоскостями $\alpha_2 = \alpha_2^* = \text{const}$ (рис. 3).

Рис. 3. Нелинейный анализ в области устойчивости в линейном приближении (боковое равновесие второго типа).

В этих сечениях область ограничена слева прямой $\alpha_1 = \alpha_2^*$ и снизу кривой $\gamma = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2^*)$, изображенными тонкими сплошными линиями. Пунктирной и штрихпунктирной линиями показаны, соответственно, кривая вырождения и кривая резонанса третьего порядка; на последней исследуемое стационарное вращение неустойчиво. Полуштриховой и точечной линиями, как и на рисунке 1, изображены зоны устойчивости и неустойчивости на кривой резонанса четвертого порядка. Резонансные кривые третьего и четвертого порядков и кривая вырождения при всех α_2^* не имеют точек пересечения.

Рис. 4. Проекция области неустойчивости при резонансе четвертого порядка на плоскость α_1 , α_2 .

При $\alpha_2^* < -3.53$ рассматриваемое равновесие для всех точек кривой резонанса четвертого порядка устойчиво по Ляпунову (рис. 3а). Для значений $-3.35 < \alpha_2^* < -1$ на этой резонансной кривой имеется область неустойчивости (рис. 3б). Проекция области неустойчивости при резонансе четвертого порядка на плоскость параметров α_1 , α_2 показана на рисунке 4 полуштриховой кривой. «Угловые» точки области неустойчивости имеют координаты $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = -3.47$, $\alpha_2 = -3.53$ и $\alpha_1 = 5.52$, $\alpha_2 = -1.17$.

5. Случай движения точки подвеса вдоль наклонной прямой

Рассмотрим теперь случай, когда точка подвеса волчка Лагранжа совершает периодическое движение вдоль прямой, лежащей в плоскости O_*YZ и составляющей с горизонталью угол α ($\alpha \in (0; \pi/2)$). Среднее значение квадрата скорости точки O вдоль прямой обозначим через V , тогда

$$a_Y = V \cos^2 \alpha, \quad a_Z = V \sin^2 \alpha, \quad a_{YZ} = V \cos \alpha \sin \alpha, \quad a_X = a_{XY} = a_{XZ} = 0.$$

Для этих значений вибрационных параметров ось стационарного вращения волчка находится также в плоскости O_*YZ , ее положения описываются (см. (2.13)) условием $\psi_0 = 0$ и уравнением

$$\sin \theta_0 = -\beta \sin 2(\theta_0 - \alpha), \quad \beta = \frac{mlV}{2Ag}. \quad (5.1)$$

При $\psi_0 = 0$ выражения для вторых частных производных потенциальной энергии системы таковы:

$$\begin{aligned} \Pi''_{\theta\theta} &= -mgl(\cos \theta_0 + 2\beta \cos 2(\theta_0 - \alpha)), \\ \Pi''_{\psi\theta} &= 0, \quad \Pi''_{\psi\psi} = \frac{m^2 l^2 V}{A} \cos \alpha \sin \theta_0 \sin(\theta_0 - \alpha). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Уравнение (5.1) аналогично соответствующему уравнению, полученному ранее при исследовании относительных равновесий плоского математического маятника в случае высокочастотных гармонических колебаний точки подвеса вдоль наклонной прямой [26]. Для его исследования рассмотрим функцию

$$\pi(\theta) = mgl \left(\cos \theta + \frac{\beta}{2} \cos 2(\theta - \alpha) \right), \quad (5.3)$$

получающуюся из выражения для потенциальной энергии $\Pi(\theta, \psi)$ при подстановке $\psi = 0$. Точки экстремума функции $\pi(\theta)$ определяются условием (5.1), характер их устойчивости меняется при переходе через значение $\pi''_{\theta\theta} = \Pi''_{\theta\theta}|_{\psi=0} = 0$.

На рисунке 5а в плоскости параметров β, α ($\beta > 0, 0 < \alpha < \pi/2$) выделена область 2, в которой функция (5.3) имеет две точки экстремума (точку максимума и точку минимума)

$$\theta_0 = \theta_{01} \in (0; \alpha), \quad \theta_0 = \theta_{02} \in (\pi/2 + \alpha; \pi), \quad (5.4)$$

и область 4, где эта функция имеет четыре точки экстремума (две точки максимума и две точки минимума)

$$\theta_0 = \theta_{01}, \quad \theta_0 = \theta_{02}, \quad \theta_0 = \theta_{03,04} \in (\pi + \alpha; 3\pi/2 + \alpha). \quad (5.5)$$

Соответствующие графики функции $\pi(\theta)$ представлены на рисунках 5b и 5с.

Бифуркационная кривая на рисунке 5а задается уравнениями (5.1) и

$$\cos \theta_0 + 2\beta \cos 2(\theta_0 - \alpha) = 0, \quad (5.6)$$

в которых величина θ_0 рассматривается как параметр. Ось симметрии $\alpha = \pi/4$ этой кривой пересекает ее в точке с абсциссой $\beta = 1$.

Рассмотрим знаки функции $\Pi''_{\psi\psi}$ из (5.2). Нетрудно показать, что для значений θ_0 , удовлетворяющих уравнению (5.1), знаки входящих в эту функцию множителей $\sin \theta_0$ и $\sin(\theta_0 - \alpha)$ меняются только при переходе через границы $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ рассматриваемой части плоскости параметров, для каждого положения равновесия они фиксированы.

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма и графики потенциальной энергии.

Учитывая соотношения (5.4) и (5.5), найдем, что для корней θ_{02} и θ_{04} справедливо неравенство $\Pi''_{\psi\psi} > 0$, а для корней θ_{01} и θ_{03} — неравенство противоположного знака.

Отсюда, учитывая характер экстремумов функции $\pi(\theta)$, заключаем, что корень θ_{02} в областях 2 и 4 и корень θ_{04} в области 4 соответствуют точкам минимума потенциальной энергии $\Pi(\theta, \psi)$, и для отвечающих им стационарных вращений выполняются достаточные условия устойчивости.

Корень θ_{01} в областях 2 и 4 соответствует точке максимума $\Pi(\theta, \psi)$, и стационарное вращение устойчиво в линейном приближении при выполнении условия (3.7), вычисленного с учетом соотношения $\Delta = \Pi''_{\theta\theta}\Pi''_{\psi\psi}$ и выражений (5.2). Корень θ_{03} в области 4 отвечает седловой точке потенциальной энергии и неустойчивому стационарному вращению.

6. Случай $a_{XY} = a_{XZ} = 0$

Рассмотрим случай, когда равны нулю два из трех средних значений смешанных произведений компонент скорости вибрации. Этот случай включает в себя, например, произвольное (в рамках сделанных допущений) движение точки подвеса волчка в вертикальной плоскости. Сюда же относится случай движения точки подвеса в наклонной плоскости, в предположении, что среднее значение произведения проекций ее скорости на направление линии наибольшего ската плоскости и на перпендикулярное к ней направление в плоскости равно нулю. Будем считать далее, что $a_{XY} = a_{XZ} = 0$ и, без ограничения общности, что $a_{YZ} > 0$.

Для дальнейшего исследования введем безразмерный параметр β и вспомогательные углы α ($\alpha \in (0; \pi/2)$) и δ ($\delta \in (0; \pi)$) по формулам

$$\beta = \frac{ml\sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_{YZ}^2}}{2Ag}, \quad \cos 2\alpha = \frac{a_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_{YZ}^2}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2a_{YZ}}{\sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_{YZ}^2}},$$

$$\cos \delta = \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + a_{YZ}^2}}, \quad \sin \delta = \frac{a_{YZ}}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + a_{YZ}^2}}.$$

В рассматриваемом случае существуют два типа стационарных вращений волчка Лагранжа. Для вращений первого типа ось вращения лежит в плоскости OYZ ($\psi_0 = 0$),

а угол θ_0 ее наклона к вертикали определяется из уравнения, которое при выбранных обозначениях совпадает с (5.1). Число и расположение корней этого уравнения описаны в разделе 5.

Выражения вторых частных производных $\Pi''_{\theta\theta}$ и $\Pi_{\psi\theta}$ в этом случае задаются формулами из (5.2), а

$$\Pi''_{\psi\psi} = \frac{m^2 l^2}{A} \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + a_{YZ}^2} \sin \theta_0 \sin(\theta_0 - \delta). \quad (6.1)$$

Анализ знака выражения для $\Pi''_{\theta\theta}$ совпадает с проведенным в разделе 5 и иллюстрируется рисунком 5. При анализе знака $\Pi''_{\psi\psi}$ в (6.1) заметим, что, как и в случае, рассмотренном в разделе 5, величина $\sin \theta_0$ в силу уравнения (5.1) обращается в нуль только на границах $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ изменения параметра α . Внутри исследуемой области изменения параметров величина $\sin(\theta_0 - \delta)$ может обратиться в нуль; с учетом уравнения (5.1), получаем уравнение

$$\beta = \pm \sin \delta / \sin 2(\delta - \alpha),$$

описывающее соответствующее геометрическое место точек — поверхность в трехмерном пространстве параметров α, β, δ . В сечениях $\delta = \text{const}$ имеем кривые $\beta = \beta(\alpha)$, изображенные на рисунке 6 тонкими пунктирными линиями. Для каждого фиксированного значения δ одна из ветвей этой кривой имеет точку касания с бифуркационной кривой (5.1), (5.6) (показанной полужирными линиями), другая ветвь может иметь от нуля до двух точек пересечения с бифуркационной кривой. При $\delta = \pi/2$ в рассматриваемой области есть одна ветвь кривой $\beta = \beta(\alpha)$, имеющая общую точку касания с бифуркационной кривой при $\beta = 1, \alpha = \pi/4$. На рисунках 6а–f показаны случаи взаимного расположения кривых при $\delta \in (0; \pi/4)$ (а), $\delta = \pi/4$ (б), $\delta \in (\pi/4; \pi/2)$ (с), $\delta \in (\pi/2; 3\pi/4)$ (d), $\delta = 3\pi/4$ (е) и $\delta \in (3\pi/4; \pi)$ (f). Исследу-

Рис. 6. Бифуркационные диаграммы при различных значениях δ .

емая область изменения параметров β, α разделяется этими кривыми на области, обозначенные цифрами 1–10.

В полученных областях проверены условия выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости, а также условия неустойчивости. Результаты исследования приведены в таблице 1. Символы «Д. у.» и «Н. у.» в ячейках таблицы означают выполнение для соответствующих области и корня достаточных и только необходимых условий устойчивости; к последним следует добавить ограничение (3.7) (при учете соотношений (5.2) и (6.1)) на угловую скорость стационарного вращения. Символы «Неуст.» означают неустойчивость соответствующего решения при любом значении угловой скорости, $\nexists$ — отсутствие корня в данной области.

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости решений первого типа

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ_{01}	Н. у.	Неуст.	Н. у.	Н. у.	Н. у.	Н. у.	Н. у.	Неуст.	Н. у.	Н. у.
θ_{02}	Д. у.	Д. у.	Неуст.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Неуст.
θ_{03}	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	Неуст.	Неуст.	Н. у.	Н. у.	Неуст.	Н. у.	Н. у.
θ_{04}	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	Д. у.	Д. у.	Неуст.	Неуст.	Д. у.	Д. у.	Неуст.

Из найденных результатов следует, что хотя число равновесных точек приведенной системы в случаях, рассмотренных здесь и в предыдущем разделе, совпадает и определяется выбором точки плоскости параметров, расположенной слева или справа от схожих бифуркационных кривых, характер их устойчивости в этих двух случаях существенно различается; совпадение наблюдается только в областях 1, 4 и 5 (рис. 6). Отметим при этом, что для значений параметров из каждой из десяти областей на рисунке 6 имеется по крайней мере одно равновесное значение угла наклона оси волчка к вертикали и диапазон изменения угловой скорости, которым отвечает устойчивое в линейном приближении стационарное вращение волчка.

Рассмотрим теперь стационарное вращение второго типа. Для него величины θ_0 и ψ_0 задаются соотношениями

$$\cos \theta_0 = -\frac{Ag(a_1 - a_2)}{ml(a_1^2 - a_1a_2 - a_{YZ}^2)}, \quad \cos \psi_0 = -\frac{a_{YZ} \cos \theta_0}{(a_1 - a_2) \sin \theta_0},$$

описывающими два положения оси вращения, симметричных относительно плоскости OYZ . Область существования этих вращений определяется неравенством

$$\kappa = \frac{Ag}{ml} \leq \frac{|a_1^2 - a_1a_2 - a_{YZ}^2|}{\sqrt{a_{YZ}^2 + (a_1 - a_2)^2}}. \quad (6.2)$$

Вторые частные производные потенциальной энергии и величина Δ из (3.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi''_{\theta\theta} &= \frac{m^2 l^2 e_1}{A \sin^2 \theta_0 (\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 - a_{YZ}^2)^3}, \quad \Pi''_{\theta\psi} = \frac{m^2 l^2 a_{YZ} \sin \psi_0}{A}, \\ \Pi''_{\psi\psi} &= -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2) e_2}{A (\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 - a_{YZ}^2)^2}, \quad \Delta = -\frac{e_2 e_3^2}{A^2 (a_1^2 - a_1 a_2 - a_{YZ}^2)^5 m^2 l^2 \sin^2 \theta_0}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= (\alpha_1 - \alpha_2)^3 \kappa^4 - 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 - a_{YZ}^2) \kappa^2 + \alpha_1(\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 - a_{YZ}^2)^3, \\
e_2 &= A^2 g^2 [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + a_{YZ}^2] - m^2 l^2 (\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 - a_{YZ}^2)^2, \\
e_3 &= A^2 g^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - m^2 l^2 (\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 - a_{YZ}^2)^2.
\end{aligned}$$

В силу условия (6.2), справедливо неравенство $e_2 < 0$ и, как нетрудно проверить, неравенство $e_3 > 0$. Поэтому знаки величин $\Pi''_{\theta\theta}$ и Δ (или, что равносильно, величин $\Pi''_{\psi\psi}$ и Δ) определяются знаками двух комбинаций $a_1^2 - a_1 a_2 - a_{YZ}^2$ и $a_1 - a_2$ вибрационных параметров.

Опираясь на результаты раздела 3, находим, что достаточные условия устойчивости стационарного вращения второго типа имеют вид

$$a_1^2 - a_1 a_2 - a_{YZ}^2 > 0, \quad a_1 - a_2 > 0.$$

Только необходимые условия устойчивости задаются неравенствами

$$a_1^2 - a_1 a_2 - a_{YZ}^2 > 0, \quad a_1 - a_2 < 0,$$

к которым следует присоединить ограничение (3.7) (с учетом выражений (6.3)) на величину угловой скорости; при нарушении (3.7) имеем неустойчивость.

Неустойчивость имеет место также, если величина $a_1^2 - a_1 a_2 - a_{YZ}^2$ отрицательна, что соответствует седловой точке функции потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия приведенной системы.

References

- [1] Lagrange J. L. *Mécanique analytique*, Paris: Desaint, 1788.
- [2] Routh E. J. *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being part II of a treatise on the whole subject*, 6th ed., New York: Dover, 1955.
- [3] Tournaire L.-M. Mémoire sur la rotation des corps pesant, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1860, vol. 50, no. 1, pp. 476–481.
- [4] Skimel' V. N. On the problems of stability of motion of a solid rigid body about a stationary point, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1956, vol. 20, no. 1, pp. 130–132 (Russian).
- [5] Chetaev N. G. On stability of rotation of a rigid body with a single fixed point in the Lagrangean case, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1954, vol. 18, no. 1, pp. 123–124 (Russian).
- [6] Rose N. V. *Rigid body dynamics*, Leningrad: Kubuch, 1932.
- [7] Grammel R. *Der Kreisel: Seine Theorie und seine Anwendungen*, 2nd ed., Berlin: Springer, 1950.
- [8] Magnus K. *Kreisel: Theorie und Anwendungen*, Berlin: Springer, 1971.
- [9] Gorr G. A., Kudryashova L. W., Stepanova L. A. *Classical problems of rigid body dynamics: Development and present state*, Kiev: Naukova Dumka, 1978 (Russian).
- [10] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Dynamics of a rigid body: Hamiltonian methods, integrability, chaos*, 2nd ed., Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).
- [11] Zhuravlev V. Ph., Klimov D. M. *Applied methods in oscillation theory*, Moscow: Nauka, 1988 (Russian).
- [12] Chelnokov Yu. N. Motion of a heavy symmetric rigid body with a mobile point of a support, *Mech. Solids*, 1990, vol. 25, no. 4, pp. 1–7; see also: *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1990, vol. 25, no. 4, pp. 3–10.
- [13] Koshlyakov V. N. Structural transformations of dynamical systems with gyroscopic forces, *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 751–756; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 774–780.
- [14] Savchenko Ya. A., Kanibolotskiy V. V. On the stability of a unbalanced system of two Lagrange's gyroscopes with a vibrating suspension point, *Mekh. Tverd. Tela*, 1991, no. 2, pp. 101–104 (Russian).

- [15] Kholostova O. V. On the periodic motion of Lagrange's top with vibrating suspension, *Mech. Solids*, 2002, no. 1, pp. 26–38; see also: *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 2002, no. 1, pp. 34–48.
- [16] Kholostova O. V. The dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 741–750; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 785–796.
- [17] Kholostova O. V. A case of periodic motion for a Lagrange gyroscope with a vibrating suspension, *Dokl. Phys.*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 690–693; see also: *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2000, vol. 375, no. 5, pp. 627–630.
- [18] Kholostova O. V. On a case of periodic motions of the Lagrangian top with vibrating fixed point, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1999, vol. 4, no. 4, pp. 81–93.
- [19] Kholostova O. V. The stability of a «sleeping» lagrange for with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, 2000, vol. 64, no. 5, pp. 821–831; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2000, vol. 64, no. 5, pp. 858–868.
- [20] Markeev A. P. On the motion of a heavy dynamically symmetric rigid body with vibrating suspension point, *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 373–379; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2012, no. 4, pp. 3–10.
- [21] Markeev A. P. On the theory of motion of a rigid body with a vibrating suspension, *Dokl. Phys.*, 2009, vol. 54, no. 8, pp. 392–396; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2009, vol. 427, no. 6, pp. 771–775.
- [22] Markeyev A. P. The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 75, no. 2, 132–139; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 193–203.
- [23] Markeev A. P. *Theoretical mechanics*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2007 (Russian).
- [24] Markeev A. P. *Libration points in celestial mechanics and space dynamics*, Moscow: Nauka, 1978 (Russian).
- [25] Yudovich V. I. Vibrodynamics and vibrogeometry in mechanical systems with constraints, *Uspekhi Mekh.*, 2006, vol. 4, no. 3, pp. 26–158 (Russian).
- [26] Kholostova O. V. On motions of a pendulum with a vibrating suspension point, *Teor. Mekh.*, 2003, no. 24, pp. 157–167 (Russian).

On the stability of stationary rotations in the approximate problem of motion of Lagrange's top with a vibrating suspension point

Michail V. Belichenko¹, Olga V. Kholostova²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe sh. 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia

¹tuzemec1@rambler.ru, ²kholostova_o@mail.ru

We consider the motion of Lagrange's top with a suspension point performing the specified high-frequency periodic motion with small amplitude in three-dimensional space. The approximate autonomous system of equations of motion written in the form of canonical Hamiltonian equations is investigated. The problem of the existence and number of stationary rotations of the top about its dynamical symmetry axis is solved. The study of stability of the corresponding equilibrium positions of the reduced two-degree-of-freedom system for fixed values of the cyclic integral constant depending on the angular velocity of rotation is carried out. For suspension points' motions allowing for stationary rotations about the vertical, a detailed linear and nonlinear stability analysis of these rotations and rotations about inclined axes is carried out. For a number of other cases of the suspension point motions a linear stability analysis is carried out.

MSC 2010: 70E17, 70E50, 70H09, 70H14

Keywords: Lagrange's top, «sleeping» top, high-frequency vibrations, stability

Received November 4, 2016, accepted December 10, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 81–104 (Russian)