ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 519.63/532.5

MSC 2010: 76D27, 76M25

Ограничение контактного угла в задаче о капле жидкости на вибрирующей подложке

А. А. Чернова

В данной работе изучается процесс колебания капли жидкости малого объема, лежащей на вибрирующей гидрофобной недеформируемой подложке. Исследование проводится в постановке вязкой несжимаемой жидкости на математической модели объема жидкости — Volume of Fluid (VoF). Изучены вопросы учета динамического изменения контактного угла в тройной точке жидкость/подложка/воздух, показана целесообразность применения моделей гистерезиса контактного угла для данных задач. Выявлен и описан механизм возбуждения поверхностных волн. Особое внимание уделяется топологическим особенностям формирующихся в капле внутренних течений. Подробно рассматривается связь между взаимодействием различных поверхностных эффектов, трансформацией внутренних течений, величиной ограничения изменения контактного угла и фазой колебания подложки. Выявлена зависимость степени деформации свободной поверхности, интенсивности поверхностных эффектов и частоты образования топологических особенностей внутренних течений от допустимого диапазона изменения угла смачивания. Полученные численные результаты согласуются с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: колебания капли жидкости, свободная поверхность, метод объема жидкости (Volume of Fluid — VoF), внутренние течения, контактный угол

Получено 17 января 2017 года

После доработки 10 марта 2017 года

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 16–38–00127 мол_а) и комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-7-1-11.

Чернова Алёна Алексеевна

alicaaa@gmail.com

Институт механики УрО РАН

426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, д. 34

1. Введение

Наличие в газовой фазе отдельных капель жидкости характерно для многих технических процессов, в силу этого задача о динамике свободной поверхности жидкости актуальна для решения как научных, так и технологических проблем [1–3]. Одной из таких задач в системе «тело – жидкость» является задача о вертикальных колебаниях капли жидкости, лежащей на вибрирующей жесткой подложке.

В экспериментальной гидродинамике в большинстве работ по изучению параметрического резонанса в жидкости, как правило, рассматривается сосуд, совершающий колебания [4, 5]. Частотный диапазон возбуждения гравитационных волн на свободной поверхности в капле жидкости экспериментально исследован в работах [6–9]. Работа [6] посвящена экспериментальному изучению вертикальных колебаний капли, расположенной на вибрирующей несмачиваемой подложке с малым гистерезисом контактного угла. В работе [10] рассматривается колебание капли жидкости объемом $100 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$, лежащей на нежесткой подложке, вибрирующей с ультразвуковыми частотами. Изучаются процессы атомизации капли и параметры, влияющие на скорость и интенсивность распыления. В работе [11] экспериментально исследуется межфазная динамика капли жидкости (в том числе поверхностные эффекты: осесимметричные стоячие и азимутные волны, образование и трансформация устойчивой узловой решетки волн, образование гребней на свободной поверхности), лежащей на вибрирующей с ультразвуковой частотой нежесткой диафрагме. Выявлены и указаны режимы колебаний, в том числе и амплитудно-частотные характеристики, на которых начинается процесс атомизации. В [12] приводятся результаты экспериментального исследования процесса распыления капли жидкости, свисающей с поверхности твердой недеформируемой вибрирующей пластины, в том числе и выявленные резонансные частоты колебаний пластины и минимальные значения амплитуд, при которых начинается процесс атомизации.

Экспериментальные исследования показывают, что внутренние течения в капле характеризуются явной трехмерностью, а одним из определяющих параметров является угол смачивания; параметры колебаний капли определяются вибрационным движением подложки. Подробные экспериментальные исследования процесса распыления жидкости с различных поверхностей не охватывают начальную стадию процесса распыления, а именно — поведение капли жидкости, лежащей на колеблющейся с малыми амплитудами и низкими частотами подложке. Изучению такой предварительной стадии явления распыления посвящены экспериментальные работы [7–9], где исследуются колебания жидкости сверхмалого объема ($5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$), лежащей на недеформируемой (твердой) вибрирующей с низкими частотами (до 800 Гц) и малыми амплитудами (до $22 \cdot 10^{-6} \text{ м}$) подложке.

Современные аналитические работы посвящены вопросам определения положения профиля свободной поверхности капли, как покоящейся [13], так и свободно колеблющейся [14, 15]. Результаты исследования динамики капли приводятся в работах [16–18]. В [16] изучаются колебания свободной поверхности капли при вращении подложки, а в [17] — динамика полусферической капли, расположенной на вертикально колеблющейся подложке, в рамках осесимметричного представления. В работе [18] изучаются вопросы получения (в рамках модели Хокинга [19] для трехфазной границы) амплитудно-частотных характеристик колебаний свободной поверхности симметричной капли идеальной жидкости, расположенной на вибрирующей подложке, и изучается процесс распространения поверхностных волн в рамках осесимметричной постановки.

Современные численные работы, изучающие динамику капли на вибрирующих поверхностях, отнюдь не многочисленны [5, 20–24]. В работе [23] методом конечных элементов с применением методов Галёркина и генерации адаптивной сетки исследуется динамика капли, свисающей с вибрирующего твердого стержня. В работе [22] численно изучается процесс колебания и распыления с поверхности твердого стержня одиночной капли жидкости объемом $30 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$. Предложенная в [22] математическая модель предполагает ряд физических допущений, таких как применение полусферической капли вместо равновесной, ограничение на движение контактной линии. При этом синусоидальный закон движения стержня и силы поверхностного натяжения включаются в используемую форму уравнения импульса. Отметим, что в [22] приводятся результаты решения только двумерной задачи. Работа [24] посвящена численному исследованию осесимметричных линейных вынужденных колебаний капли вязкой жидкости, в предположении о постоянстве краевого угла и фиксированном положении трехфазной линии, методом конечных разностей с использованием процедуры расщепления и неравномерной сетки; испарение жидкости с поверхности капли не учитывалось, а жидкость считалась изотермической.

Таким образом, востребованная и актуальная задача получения адекватной математической модели для описания процессов, протекающих в капле жидкости малого объема, расположенной на вибрирующей недеформируемой жесткой подложке, остается нерешенной. Данная работа посвящена численному исследованию внутренних течений и их влиянию на механизм зарождения и развития поверхностных волн в малом объеме жидкости — капле, расположенной на вибрирующей с низкими частотами недеформируемой подложке (дорезонансный режим колебаний). Отметим, что к методам решения данной задачи динамики жидкости предъявляются требования подробного разрешения тонкого слоя (в том числе и на тройной линии контакта газ/жидкость/подложка) и развитых свободных поверхностей. С учетом требований для решения задач динамики жидкости применим метод объема жидкости в ячейке (Volume of Fluid — VoF).

Работа построена следующим образом. В первом разделе рассматривается используемая математическая модель и представлена физическая постановка задачи. Во втором разделе описываются применяемые численные методы, схемы и алгоритмы. Третий раздел посвящен вопросам динамики капли жидкости, лежащей на вибрирующей недеформируемой поверхности. Рассматриваются моды колебания жидкости, приводятся данные об изменении высоты капли во времени, верифицируются предложенные вычислительные алгоритмы и математическая модель. Исследуется вопрос учета динамического изменения угла смачивания. С помощью численных экспериментов показано влияние динамического контактного угла на геометрические характеристики колеблющейся капли. Четвертый раздел посвящен описанию топологических особенностей внутренних течений в капле, а также вопросам влияния ограничения изменения краевого угла на внутренние течения в капле.

2. Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим задачу о динамике капли вязкой жидкости малого объема $V = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$, свободно лежащей в поле силы тяжести в воздушной среде на горизонтальной гидрофобной недеформируемой поверхности (см. рис. 1).

Подложка совершает вертикальные колебания по гармоническому закону

$$z_1 = A \sin(2\pi ft), \quad (2.1)$$

где $A = 22 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $f = 85 \text{ Гц}$.

Рис. 1. Расчетная область.

Обозначим Ω_1 область, занятую жидкостью, Ω_2 — область, занятую воздухом, Ω_0 — колеблющуюся поверхность (подложку), Γ_0 — поверхность раздела фаз, Γ_1 — атмосферную границу расчетной области. Отметим, что во время движения поверхность Γ_0 может менять форму.

Поскольку амплитуда скорости течений, вызванных колебаниями подложки, соизмерима со скоростью ее движения и, согласно (2.1), составляет порядка 0.013 м/с, то эффектами сжимаемости можно пренебречь [25].

Рассматриваемая в данной работе система является двухфазной. Будем обозначать нижним индексом $i = 1$ жидкую фазу, а нижним индексом $i = 2$ — воздушную. Движение i -ой фазы описывается уравнениями Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_i &= 0, \\ \frac{\partial \rho_i \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \rho_i \mathbf{u}_i &= -\nabla p_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \rho_i \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ρ_i — плотность i -ой фазы, $\mathbf{u}_i$ — поле скорости i -ой фазы, p_i — поле давления i -ой фазы, $\boldsymbol{\tau}_i = \mu_i (\nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^T)$ — тензорное поле вязких напряжений i -ой фазы, μ_i — динамическая вязкость i -ой фазы, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения.

На границе раздела сред Γ_0 выполняются условия динамического равновесия

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2) \mathbf{e} &= (p_1 - p_2 + \sigma K(1 - \cos \Theta)) \mathbf{e}, \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор нормали к поверхности Γ_0 , K — кривизна поверхности Γ_0 , σ — коэффициент поверхностного натяжения (для системы «вода–воздух» $\sigma = 0.7288$ Н/м), Θ — угол смачивания в тройной точке контакта.

Описание движения рассматриваемой системы на основе уравнений (2.2) с условиями динамического равновесия (2.3) влечет дополнительные алгоритмические трудности, связанные с необходимостью явного определения формы поверхности Γ_0 и перестроением расчетной сетки на каждом шаге интегрирования по времени. Существенные упрощения в вычислительной процедуре позволяет использовать метод Volume of Fluid (VoF), впервые описанный в работе [26].

Согласно методу VoF для моделирования движения двух несмешивающихся вязких сред вводится скалярная функция

$$\alpha(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2 \cup \Gamma_0, \end{cases}$$

имеющая смысл объемной концентрации жидкости. Внешняя нормаль и кривизна поверхности раздела фаз Γ_0 однозначно определяются как

$$\mathbf{e} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}, \quad K = \nabla \cdot \mathbf{e}, \quad (2.4)$$

а плотность и вязкость определяются, соответственно, как

$$\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\alpha, \quad \mu = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\alpha. \quad (2.5)$$

С учетом (2.3), (2.4) и (2.5) система уравнений (2.2) может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \sigma K \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} (1 - \cos \Theta) + \rho \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\mathbf{u}$ — поле скорости, p — поле давления, плотность ρ и вязкость μ определяются выражениями (2.5).

Согласно методу VoF для замыкания системы (2.6) используют уравнение вида

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0, \quad (2.7)$$

описывающие нестационарный перенос свойства α полем скорости $\mathbf{u}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (2.7) содержит только конвективные члены и описывает эволюцию разрывного скалярного поля α . При численном решении этот разрыв будет сглаживаться вследствие численной диссипации.

Второе уравнение системы (2.6) зависит от контактного угла Θ . В работе [27] было показано, что для корректного численного моделирования течений в капле жидкости малого объема необходимо учитывать динамическое изменение контактного угла. В рамках вышеописанной математической модели используется полуэмпирическая модель гистерезиса контактного угла [28, 29]

$$\Theta = \Theta_0 + (\Theta_A - \Theta_R) \operatorname{th} \left(\frac{u_W}{u_\Theta} \right), \quad (2.8)$$

где Θ_0 — статический контактный угол, Θ_A — максимально допустимое значение контактного угла, Θ_R — минимальное значение контактного угла, u_W — скорость движения твердой границы, u_Θ — масштаб скорости изменения контактного угла.

Граничные условия для записанных выше уравнений определим следующим образом:

- на открытой атмосферной границе Γ_1 : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$, $p = p_0$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль,
- на границе жидкость/подложка $\Omega_1 \cap \Omega_0$: $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$, $u_x = u_z = 0$, $u_y = u_{\Omega_0}$.

Таким образом, при заданных параметрах ρ_i , μ_i , σ , Θ_0 , Θ_A , Θ_R система уравнений (2.6), (2.7) с соотношениями (2.1), (2.5) и (2.8) полностью описывает движение рассматриваемой системы.

Согласно экспериментальной работе [8], статический угол смачивания (в случае неподвижной подложки) составляет $\Theta_0 = 115^\circ \pm 1^\circ$ для капли с высотой $h = 1.52 \cdot 10^{-3}$ м и диаметром контакта $D = 2.02 \cdot 10^{-3}$ м.

Необходимо отметить, что угол смачивания Θ определяется физико-химическими свойствами жидкости, свойствами материала подложки и гидродинамическими процессами, протекающими в капле, вследствие чего не является константой. Используемая математическая модель, согласно уравнению (2.8), предполагает изменение краевого угла в некотором заданном диапазоне. В работах [1, 20, 28–30] показано, что динамика капли жидкости существенно зависит именно от гистерезиса краевого угла (в данных работах под термином *гистерезис* понимается боковое ограничение угла смачивания).

Поэтому для описанной системы поставим следующие задачи:

- исследовать процесс колебания капли жидкости на вибрирующей подложке при различных боковых ограничениях краевого угла,
- оценить влияние величины допустимого диапазона изменения угла смачивания на динамику капли жидкости и реализующиеся в ней внутренние течения.

3. Численные схемы и алгоритмы

Решение системы уравнений (2.6), (2.7) осуществлялось на динамических сетках с помощью модуля `interDyMFoam`, входящего в состав Open Source пакета `OpenFOAM`. Расчетная сетка для конечно-объемной дискретизации, включающая 364 140 шестигранников, построена с помощью утилиты `blockMesh` пакета `OpenFOAM` и имеет осевое и радиальное сгущения. Движение узлов сетки, совпадающих с подложкой, определялось согласно (2.1). Для связывания уравнения неразрывности и уравнений количества движения в данной программе используется метод PISO [31].

Численное решение полученной системы уравнений (2.6) строится с применением методов контрольного объема для дискретизации исходных уравнений по пространству и Эйлера — по времени. Запишем аппроксимацию уравнений (2.6)

$$\sum_{f \in \mathcal{N}_M} \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{u}_f^{n+1} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\mathbf{u}_M^{n+1} - \mathbf{u}_M^n}{\Delta t} \rho_M V_M + \sum_{f \in \mathcal{N}_M} F_f \mathbf{u}_f^{n+1} - \sum_{f \in \mathcal{N}_M} \mu_M \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{u}^{n+1})_f = -(\nabla p)_M V_M,$$

где $\mathbf{u}_M^n$ — скорость в центре ячейки с номером M на n -м временном шаге, ρ_M — плотность в ячейке с номером M , μ_M — вязкость в ячейке с номером M , V_M — объем ячейки, $\mathbf{F}_f$ — конвективный поток через грань с номером f , $\mathcal{N}_M$ — множество номеров соседних ячеек, $\mathbf{S}_f$ — вектор внешней нормали к грани с номером f , по модулю равный площади этой грани.

Процедуру продвижения на один шаг интегрирования по времени можно записать в следующем виде:

1. По известному полю $\mathbf{u}$ находим α с помощью решения сеточных уравнений

$$\frac{\alpha_M^{n+1} - \alpha_M^n}{\Delta t} + \sum_{f \in \mathcal{N}_M} F_f(\alpha_M^{n+1}) + \sum_{f \in \mathcal{N}_M} (1 - \alpha)_M^n F_f^*(\alpha_M^n) = 0,$$

где

$$F^*(\alpha) = c_\alpha \max_{\Omega} \frac{|\mathbf{e} u_r \mathbf{S}|}{|\mathbf{S}|} \mathbf{e}.$$

Скалярный коэффициент c_α служит для управления искусственным сжатием решения в области разрыва для компенсации эффекта численной диффузии.

2. Определение полей скорости и давления с помощью процедуры PISO.

- (а) По значениям α и p определяем скорость $\mathbf{u}$. Будем считать, что на n -м шаге по времени известно поле давления p^n и соответствующее ему поле потоков через грани ячеек удовлетворяет условию консервативности.

Предиктор. Решается уравнение сохранения импульсов на основе имеющегося поля давления

$$A_0 \mathbf{u}^* = \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) - \nabla p^n + \mathbf{G}. \quad (3.2)$$

Здесь члены $\mathbf{H}(\mathbf{u})$, $A_0 \mathbf{u}$ представляют собой дискретизацию конвективных слагаемых и производной по времени, A_0 — центральный коэффициент в записи аппроксимации $\mathbf{u}$, $\mathbf{G}$ — результирующая объемных и массовых сил, действующих на жидкость.

- (б) Перестройка p и коррекция $\mathbf{u}$.

Корректор 1. Решается уравнение для первой поправки давления

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla (p^* - p^n) \right] = \nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) \right], \quad (3.3)$$

что дает возможность определить на основе значений $\mathbf{u}^*$, p^* потоки через грани ячеек F^* , удовлетворяющие условию консервативности.

- (с) Затем корректируется поле скорости по явной схеме

$$A_0 (\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*) = \mathbf{H}(\mathbf{u}^*) - \nabla (p^* - p^n). \quad (3.4)$$

Корректор 2. Решается уравнение для второй поправки давления:

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla (p^{**} - p^*) \right] = \nabla \cdot \left[\frac{1}{A_0} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*) \right]. \quad (3.5)$$

Действуя далее аналогично первому шагу корректора, получим поля p^{**} и $\mathbf{u}^{***}$, которые будем считать решением системы (2.6), (2.7) на следующем шаге по времени: p^{n+1} и $\mathbf{u}^{n+1}$ соответственно.

3. Если сходимость не достигнута, то повторить шаги 1 и 2.

Дискретизация конвективных слагаемых по пространству производится схемой Ван Лира второго порядка точности. Реконструкция потоков на гранях ячеек производится с использованием схемы TVD с ограничением градиентов [32], в которой аппроксимация строится на основе центральных разностей, а в качестве ограничителя используется функция Ван Лира minmod [33]. Полученная система алгебраических уравнений решается численно методом сопряженных градиентов с неполным диагональным предобуславливателем Холецкого.

4. Результаты численных экспериментов

4.1. Верификация математической модели и вычислительной процедуры

Для верификации предложенной математической модели и численной процедуры были смоделированы колебания капли воды, расположенной на вибрирующей с частотой 85 Гц и амплитудой 23.5 мкм недеформируемой подложке (рис. 1). Отметим, что изучение динамики жидкости требует знания формы и параметров капли, находящейся в положении равновесия. Вопросы получения равновесной конфигурации капли подробно рассмотрены в [34]. В результате моделирования получены формы вынужденных колебаний свободной поверхности капли (рис. 2).

Рис. 2. Формы капли для второй моды: а) экспериментальная [8], б) численная.

Из рисунка 2 видно, что расчетные формы колебаний свободной поверхности соответствуют экспериментальным: зафиксирована одна кольцевая линия узлов перегиба на свободной поверхности, соответствующая второй моде колебаний, что свидетельствует о корректности математической модели и вычислительной процедуры. Кроме того, полученные колебания свободной поверхности соответствуют второй моде вынужденных колебаний капли жидкости [8, 9, 20].

4.2. Динамика свободной поверхности капли

Рассмотрим изменение контактного угла в линии трехфазного контакта и его влияние на деформацию профиля разреза колеблющейся капли (рис. 3).

Рис. 3. Формы капли для второй моды в моменты времени $t = 0$ мс (черная кривая) и $t = 145.5$ мс (серая кривая).

Из рисунка 3 видно, что форма капли определяется величиной контактного угла. Так, увеличение диапазона допустимого изменения краевого угла $\Theta_A - \Theta_A$ с 2° до 46° приводит не только к более существенному увеличению диаметра контактного пятна (с 5 % до 14 %), но и к интенсификации поверхностных эффектов (рис. 3). Сопоставление полученных для различных диапазонов изменения угла смачивания форм колебаний свободной

жидкости позволяет выявить симметричность влияния допустимых значений: существенное увеличение верхнего предела изменения (Θ_A), равно как и уменьшение нижнего (Θ_R), приводит к получению близких форм колебаний свободной поверхности ($70^\circ \leq \Theta \leq 116^\circ$ и $114^\circ \leq \Theta \leq 160^\circ$, см. рис. 3).

Рассмотрим графики изменения высоты профиля разреза капли относительно начального уровня при вибрации подложки (рис. 4).

Рис. 4. Графики изменения высоты профиля разреза капли относительно начального уровня.

Качественно все полученные кривые, вне зависимости от заданного гистерезиса угла смачивания, соответствуют экспериментальной кривой [8] (рис. 4). Однако уменьшение допустимого диапазона изменения контактного угла приводит к значительному (до 56.5%) снижению амплитуды колебаний жидкости, что согласуется с данными аналитического и экспериментального исследования [30]. Отметим также, что зависимость высоты капли от времени, полученная при $70^\circ \leq \Theta \leq 116^\circ$, количественно близка к экспериментальной (отклонение полученных значений высоты от экспериментальной не превышает 5%).

Анализ полученных данных позволил выявить зависимость изменения величины локальных экстремумов высоты капли от ограничения краевого угла (рис. 5а, б), выявлена ось симметрии $\Theta = 115^\circ$. Таким образом, направление изменения ограничения угла смачивания (Θ_R или Θ_A) не существенно (рис. 5с).

Рис. 5. Графики изменения высоты капли: а) зависимость экстремумов высоты от Θ_R , б) зависимость экстремумов высоты от Θ_A , в) для различных боковых ограничений краевого угла.

Полученные зависимости позволяют выявить диапазон допустимого изменения угла смачивания $40^\circ \leq \Theta_A - \Theta_R \leq 50^\circ$, обеспечивающий наиболее корректное решение задачи. Отметим, что увеличение частоты колебаний приводит к усилению влияния краевого угла.

4.3. Топология внутренних течений

Для изучения структуры внутренних течений и ее зависимости от величины контактного угла были получены мгновенные распределения векторов скорости в капле для различных моментов времени. Векторные картины течений в поперечном сечении капли для первого и второго периода осцилляций подложки приведены на рисунке 6.

Рис. 6. Внутренние течения в капле, $\tilde{t} = t/T$.

Выявлено, что взаимодействие разнонаправленных капиллярных течений (как сформированных под действием массовых и поверхностных сил, так и обусловленных движением подложки) приводит к образованию в капле парных симметричных вихревых структур, локализованных вдоль оси симметрии капли, при этом топологические особенности течения в капле значительным образом определяются направлением движения подложки (рис. 6).

В начальные моменты подъема четко визуализируются парные вихри, подъем подложки сопровождается слиянием центральных вихревых структур. Если в момент времени $t = 0.75\tilde{t}$ (минимальное положение подложки) фиксируется 5 парных симметричных вихревых структур, то в момент времени $t = 0.775\tilde{t}$ выявлено уже только два укрупненных симметричных парных вихря. Кроме того, в момент времени $t = 0.775\tilde{t}$ фиксируется две четко выраженные линии стекания, четыре сепаратрисы потока и одна осевая особая точка типа седло. Наблюдаемое укрупнение вихрей связано с объединением нижних вихрей, вызванным обусловленной перемещением подложки перестройкой течений. Такое укрупнение вихрей демонстрирует некоторую инертность жидкости: внутренние течения жидкости с опозданием реагируют на изменение направления движения подложки и начинают изменение направления движения с нижних слоев жидкости.

В начале нового периода колебаний подложки, вдоль оси симметрии, в виду минимального влияния там поверхностных сил, формируется течение, ориентированное направлением движения подложки, которое транспортирует увеличивающиеся парные вихри в верхнюю часть капли. Такая трансформация вихревых структур приводит к существенному вытягиванию профиля капли в осевом направлении. Взаимодействие разнонаправленных

внутренних течений приводит к образованию циркуляционных зон, а взаимодействие разворачивающихся течений — к образованию седловой точки и линий стекания. Вследствие их взаимодействия часть капиллярных течений перестраивается в направлении действия распирающего давления и начинает движение к границе раздела фаз, параллельно подложке. Это, в свою очередь, приводит к увеличению диаметра контакта и, как следствие, к уменьшению высоты капли. Таким образом, в момент времени, соответствующий подъему подложки на максимальную высоту ($1.25\tilde{t}$, см. рис. 6), наблюдается вытягивание формы свободной поверхности капли одновременно по осевому и радиальному направлениям, при этом, как и в момент времени, соответствующий началу следующего периода, в капле устанавливается течение без топологических особенностей.

Со стороны свободной поверхности описываемый процесс сопровождается зарождением и развитием (продвижением) поверхностной гравитационной волны, местоположение которой определяется взаимодействием парного вихря с осевым течением и последующим разворотом части внутренних течений.

Аналогично вышеописанному протекают процессы трансформации внутренних течений в капле при движении подложки вниз. При этом наблюдается вырождение вихревых структур, сопровождаемое их смещением на периферийную область капли с дальнейшим расширением капли в радиальном направлении. А переориентация, в соответствии с движением подложки, осевого течения приводит к сплющиванию капли в осевом направлении.

Выявлено наличие переходного участка, соответствующего моменту времени, когда подложка начала движение вниз, после достижения максимальной высоты до прохождения нулевого (начального) положения. В силу инерции, внутреннее осевое течение еще не перестроилось, а течение в нижних слоях уже переориентировалось, и наблюдается образование нескольких (от 4-х до 8-ми) симметрично расположенных зон взаимодействия разнонаправленных течений, существенно вытягивающих каплю в осевом направлении. Таким образом, можно заключить, что возникновение и развитие поверхностных волн обусловлено локальными топологическими особенностями внутренних течений, их трансформацией и взаимодействием между собой. Влияние ограничения контактного угла на структуру внутренних течений показано на мгновенном распределении изотопов и векторов скорости (рис. 7).

Жесткое ограничение допустимого диапазона изменения краевого угла ($\Theta_A - \Theta_R \leq 30^\circ$) приводит к уменьшению не только амплитуд колебаний жидкости, но и к существенному упрощению топологии внутренних течений. Кроме того, распределение изотопов для изменения угла смачивания в диапазоне $90^\circ \leq \Theta \leq 116^\circ$ и $114^\circ \leq \Theta \leq 140^\circ$ практически не изменено, что демонстрирует инвариантность течения относительно направления изменения угла смачивания. При увеличении диапазона изменения контактного угла до значения $\Theta_A - \Theta_R \geq 30^\circ$ наблюдается существенная трансформация внутренних течений. Так, в момент времени $t = 2.375\tilde{t}$ ($70^\circ \leq \Theta \leq 116^\circ$ и $114^\circ \leq \Theta \leq 160^\circ$, см. рис. 7), когда подложка уже прошла верхнее положение и начала опускаться, наблюдается образование периферийных циркуляционных зон; при этом локализация разнонаправленных течений вблизи границы раздела фаз сопровождается образованием и перемещением поверхностных гравитационных волн. В момент времени $t = 2.75\tilde{t}$, соответствующий минимальному положению подложки, вытягивание периферийных точек фокуса приводит к деформации свободной поверхности, а их дальнейшая трансформация — к зарождению в момент времени $t = 3\tilde{t}$ периферийного, локализованного вблизи границы раздела сред, вихря и смежных с ним особых точек типа фокус и седло. Отметим, что при последующем подъеме подложки с начального до максимального положения точки фокуса трансформируются в локальные вихревые структуры. Как и для рассмотренного выше ограничения $\Theta_A - \Theta_R \leq 26^\circ$, струк-

Рис. 7. Внутренние течения в капле, $\tilde{t} = t/T$.

тура потока, характерная для $\Theta_A - \Theta_R \geq 30^\circ$, инвариантна к направлению изменения угла смачивания. Отметим, что выявленные зависимости между используемым ограничением контактного угла и характером внутренних капиллярных течений в капле (а также высотой профиля разреза капли) справедливы для любой частоты вибрации подложки.

5. Заключение

Проведенное исследование показало, что топологические особенности течения значительно образом определяются направлением движения подложки и диапазоном изменения контактного угла.

Показано, что в силу инертности жидкости изменение направления движения капиллярных течений начинается с нижних слоев и происходит с запаздыванием относительно изменения направления движения подложки.

Зафиксированы и описаны безвихревые режимы течения, показано, что они обеспечиваются только в периоды времени, соответствующие максимальному подъему подложки.

Выполненное сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными позволяет заключить, что используемые численные методы и алгоритмы адекватно описывают процессы передачи энергии от подложки к капле.

Автор благодарит Е. В. Ветчанина за ценные обсуждения результатов.

References

- [1] Nikolopoulos N. A., Theodorakakos A., Bergeles G. Normal impingement of a droplet onto a wall film: A numerical investigation, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2005, vol. 26, no. 1, pp. 119–132.
- [2] Fedorchenko A. I., Wang A.-B., Wang Y.-H. Effect of capillary and viscous forces on spreading of a liquid drop impinging on a solid surface, *Phys. Fluids*, 2005, vol. 17, no. 9, 093104, 8 pp.
- [3] Okumura K., Chevy F., Richard D., Quéré D., Clanet C. Water spring: A model for bouncing drops, *Europhys. Lett.*, 2003, vol. 62, no. 2, pp. 237–243.
- [4] Kalinichenko V. A., Nesterov S. V., So A. N. Faraday waves in a rectangular reservoir with local bottom irregularities, *Fluid Dynam.*, 2015, vol. 50, no. 4, pp. 535–542; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zidk. Gaza*, 2015, no. 4, pp. 83–91.
- [5] Ehrhorn J., Semke W. Numerical modeling of vibration induced atomization of liquids, in *Topics in Model Validation and Uncertainty Quantification: Vol. 5*, T. Simmermacher, S. Cogan, B. Moaveni, C. Papadimitriou (Eds.), Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, New York: Springer, 2013, pp. 243–253.
- [6] Noblin X., Buguin A., Brochard-Wyart F. Vibrated sessile drops: Transition between pinned and mobile contact line oscillations, *Eur. Phys. J. E*, 2004, vol. 14, no. 4, pp. 395–404.
- [7] Shin Y.-S., Lim H.-Ch. Shape oscillation and detachment conditions for a droplet on a vibrating flat surface, *Eur. Phys. J. E*, 2014, vol. 37, no. 8, Art. 74, 5 pp.
- [8] Kim H., Lim H.-Ch. Mode pattern of internal flow in a water droplet on a vibrating hydrophobic surface, *J. Phys. Chem. B*, 2015, vol. 119, no. 22, pp. 6740–6746.
- [9] Park Ch.-S., Kim H., Lim H.-Ch. Study of internal flow and evaporation characteristics inside a water droplet on a vertically vibrating hydrophobic surface, *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 2016, vol. 78, pp. 112–123.
- [10] James A. J., Vukasinovic B., Smith M. K., Glezer A. Vibration-induced drop atomization and bursting, *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 476, pp. 1–28.
- [11] Vukasinovic B., Smith M. K., Glezer A. Dynamics of a sessile drop in forced vibration, *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 587, pp. 395–423.
- [12] Kim H.-Y. Drop fall-off from the vibrating ceiling, *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, no. 2, pp. 474–477.
- [13] Kanchukoev V. Z. Determination of the liquid drop profile on a solid surface, *Tech. Phys. Lett.*, 2004, vol. 30, no. 1, pp. 45–47; see also: *Pisma Zh. Tekh. Fiz.*, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 12–16.
- [14] Zaslavskiy Yu. M. On eigenfrequency of non-axisymmetric oscillations of a liquid drop on a substrate, *Vestn. Nizhegorodsk. Univ.*, 2014, no. 4(1), pp. 62–65 (Russian).
- [15] Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyaev S. V. Non-axisymmetric oscillations of a hemispherical drop, *Fluid Dynam.*, 2004, vol. 39, no. 6, pp. 851–862; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zidk. Gaza*, 2004, no. 6, pp. 8–20.
- [16] Lebedev-Stepanov P. V., Karabut T. A., Chernyshov N. A., Rybak S. A. Investigation of the shape and stability of a liquid drop on a rotating substrate, *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, no. 3, pp. 320–325; see also: *Akust. Zh.*, 2011, vol. 57, no. 3, pp. 323–328.
- [17] Ivantsov A. O. Acoustic oscillations of semispherical drop, *Vestn. PGNIU*, 2012, no. 3, pp. 16–23 (Russian).
- [18] Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyaev S. V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate, *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, no. 1, 012101, 11 pp.
- [19] Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary, *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 253–266.
- [20] Li Y., Umemura A. Two-dimensional numerical investigation on the dynamics of ligament formation by Faraday instability, *Int. J. Multiph. Flow*, 2014, vol. 60, pp. 64–75.

- [21] Foote G. B. A numerical method for studying liquid drop behavior: Simple oscillation, *J. Comput. Phys.*, 1973, vol. 11, no. 4, pp. 507–530.
- [22] James A. J., Smith M. K., Glezer A. Vibration-induced drop atomization and the numerical simulation of low-frequency single-droplet ejection, *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 476, pp. 29–62.
- [23] Wilkes E. D., Basaran O. A. Drop ejection from an oscillating rod, *J. Colloid Interface Sci.*, 2001, vol. 242, no. 1, pp. 180–201.
- [24] Korenchenko A. E., Ilimbaeva A. Zh., Beskachko V. P. Numerical study of free vibrations of a sessile drop, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2011, no. 4, pp. 72–76 (Russian).
- [25] Schlichting H., Gersten K., Krause E., Oertel H. Jr. *Grenzschicht-Theorie*, 10th ed., Berlin: Springer, 2006.
- [26] Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.*, 1981, vol. 39, no. 1, pp. 201–225.
- [27] Chernova A. A., Kopysov S. P., Tonkov L. E. Simulation of a liquid drop on a vibrating hydrophobic surface, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, 012026, 7 pp.
- [28] Jiang T.-Sh., Soo-Gun O. H., Slattery J. C. Correlation for dynamic contact angle, *J. Colloid Interface Sci.*, 1979, vol. 69, no. 1, pp. 74–77.
- [29] Mourik S. Numerical modelling of the dynamic contact angle: *Masters thesis*, Groningen: Univ. of Groningen, 2002. 97 pp.
- [30] Li X., He G., Zhang X. Numerical simulation of drop oscillation in AC electrowetting, *China Phys. Mech. Astron.*, 2013, vol. 56, no. 2, pp. 383–394.
- [31] Issa R. I. Solution of implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting, *J. Comput. Phys.*, 1986, vol. 62, no. 1, pp. 40–65.
- [32] Toro E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction*, 3rd ed., Berlin: Springer, 2009. 724 pp.
- [33] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme: 3. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow, *J. Comput. Phys.*, 1977, vol. 23, no. 3, pp. 263–275.
- [34] Kuzmin I. M., Sarmakeeva A. S., Chernova A. A. Simulation of oscillations liquid droplet lying on a vibrating undeformable base, *CPM*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 515–523 (Russian).

Limitation of the contact angle in the problem of a drop of a liquid on a vibrating substrate

Alena A. Chernova

Institute of Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia
alicaaa@gmail.com

The article deals with the process of fluctuations of a liquid droplet of a small volume lying on a vibrating hydrophobic rigid substrate. The study is carried out by the numerical simulation method of Euler fluid volume (Volume of Fluid — VoF). We study problems of accounting for dynamic changes in the contact angle at the triple point of the liquid-substrate-to-air as well as the impact of changes in the range of the contact angle on the processes that accompany the forced oscillations of the drop. Particular attention is paid to topological features formed in a drop of internal flows. The connection between the interaction of different surface effects, transformation of internal flows, the size limit changes in the contact angle of the substrate and the phase fluctuations are considered in detail. All numerical results are compared with experimental data.

MSC 2010: 76D27, 76M25

Keywords: oscillations of a liquid droplet, free surface, volume of fluid method, internal flow, contact angle

Received January 17, 2017, accepted March 10, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 165–179 (Russian)