УДК: 515.16
MSC 2010: 57R30

Слоения коразмерности один на трехмерной сфере со счетным семейством компактных слоев-аттракторов

Н. И. Жукова

В работе представлена явная конструкция континуального семейства гладких, попарно неизоморфных слоений коразмерности один на стандартной трехмерной сфере, каждое из которых имеет счетное множество компактных слоев-аттракторов, диффеоморфных тору. Как доказано С. П. Новиковым, каждое гладкое слоение коразмерности один на трехмерной стандартной сфере содержит компоненту Рибба. Изменяя это слоение только в компоненте Рибба указанным в работе способом, мы получаем континуальное семейство попарно неизоморфных слоений, содержащих счетное множество компактных слоев-аттракторов, диффеоморфных тору, совпадающее с исходным слоением вне данной компоненты Рибба.

Ключевые слова: слоение Рибба, компонента Рибба, аттрактор слоения, категория слоений

1. Основные понятия и результаты

Под изоморфизмами слоений мы понимаем изоморфизмы в категории слоений $\mathcal{Fol}$, объектами которой являются гладкие слоения, а морфизмами — гладкие отображения, переводящие слои в слои.

Пусть (M, F) — произвольное слоение. Напомним, что слоение называется *собственным*, если каждый его слой является вложенным подмногообразием в M .

Подмножество $U \subset M$ называется *насыщенным*, если оно является объединением слоев этого слоения.

Получено 17 октября 2017 года
После доработки 03 декабря 2017 года

Данная работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 17-11-01041.

Жукова Нина Ивановна
nzhukova@hse.ru
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

Определение 1. Пусть (M, F) — произвольное слоение. Непустое замкнутое насыщенное подмножество M многообразия M называется аттрактором, если существует такое открытое подмножество $\mathcal{U}$ в M , содержащее M , что замыкание любого слоя из $\mathcal{U}$ содержит M .

Для аттрактора M существует единственное подмножество $\mathcal{U}$, обладающее указанными в определении 1 свойствами, оно называется *бассейном аттрактора M* и обозначается через $\mathcal{U} = \mathcal{U}(M)$.

Подробная информация о слоениях представлена в [2]. Слоение Рибба во внутренности заполненного тора (или полнотория) называется *компонентой Рибба*.

Известно, что на стандартной трехмерной сфере существует семейство мощности континуума неизоморфных гладких слоений класса C^∞ . Основным результатом данной работы является явная конструкция континуального семейства попарно неизоморфных C^∞ -гладких слоений на $\mathbb{S}^3$, имеющих счетное семейство компактных слоев-аттракторов, диффеоморфных тору. Отметим, что, как правило, известные примеры слоений на компактных многообразиях содержат лишь конечное число компактных слоев.

Теорема 1. На трехмерной стандартной сфере $\mathbb{S}^3$ существует множество $\mathcal{T}$ мощности континуума попарно неизоморфных гладких собственных слоений $(\mathbb{S}^3, F_\alpha)$ коразмерности один со счетным семейством компактных слоев, диффеоморфных тору $\mathbb{T}^2$ и являющихся аттракторами.

Как доказано С. П. Новиковым [1] (см. также [2, глава 6, §25]), каждое гладкое класса C^r , $r \geq 2$, слоение $(\mathbb{S}^3, F)$ коразмерности один на трехмерной стандартной сфере содержит компоненту Рибба M . Изменяя слоение $(\mathbb{S}^3, F)$ только в компоненте Рибба M способом, указанным в доказательстве теоремы 1, мы получаем континуальное семейство слоений $(\mathbb{S}^3, F_\alpha)$, удовлетворяющее следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $(\mathbb{S}^3, F)$ — произвольное слоение класса гладкости C^r , $r \geq 2$, коразмерности один на трехмерной стандартной сфере $\mathbb{S}^3$. Тогда существует компонента Рибба $M \subset \mathbb{S}^3$ и семейство $\mathcal{T}$ мощности континуума C^r -гладких попарно неизоморфных слоений $(\mathbb{S}^3, F_\alpha)$, $\alpha \in J$, коразмерности один, обладающих следующими свойствами:

(i) для любого $\alpha \in J$ выполняется равенство

$$(\mathbb{S}^3 \setminus M, F_\alpha|_{\mathbb{S}^3 \setminus M}) = (\mathbb{S}^3 \setminus M, F|_{\mathbb{S}^3 \setminus M}),$$

(ii) слоение $(\mathbb{S}^3, F_\alpha)$, $\alpha \in J$ имеет счетное множество компактных слоев, диффеоморфных тору $\mathbb{T}^2$, являющихся аттракторами.

2. Доказательство теоремы 1

Далее для простоты сужение любого слоения F на подмножество слоеного многообразия обозначаем той же буквой F .

2.1. Построение слоения $(\mathbb{S}^3, F_\alpha)$

Пусть

$$A = \{\alpha = \{i_m\}_{m=1}^\infty \mid i_m \in \{0, 1\}, m \in \mathbb{N}\}$$

— множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Множество A имеет мощность континуума.

Для каждого элемента $\alpha = \{i_m\}_{m=1}^\infty \in A$ построим слоение $(S^3, \mathbb{F}^{(\alpha)})$ следующим образом.

Поскольку $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, то, разрезав эту сферу по тору $\mathbb{T}^2 = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1/2\}$, мы получим два полнотория $S_+^3 := \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1|^2 \leq 1/2\}$ и $S_-^3 := \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_2|^2 \leq 1/2\}$. Предположим, что в трехмерной сфере задано ориентированное слоение Рибба (S^3, F) . Тогда имеем два ориентированных слоения Рибба в полноториях (S_+^3, F) и (S_-^3, F) . Изменим слоение (S_+^3, F) следующим образом.

Разобьем отрезок $[0, 2]$ точками $1, 1 + 1/2^m, m \in \mathbb{N}$, на счетное семейство отрезков $[0, 1]$, $I_m = [1 + 1/2^m, 1 + 1/2^{m-1}]$, $m \in \mathbb{N}$. На интервале $I_m^0 = (1 + 1/2^m, 1 + 1/2^{m-1})$, $m \in \mathbb{N}$, определим гладкую класса C^∞ функцию

$$f_m(t) = \operatorname{tg}(2^m \pi(t - 1 - 3/2^{m+1})).$$

Положим

$$f_m^{(\alpha)}(t) = (-1)^{i_m} f_m(t), \quad t \in I_m^0,$$

для $\alpha = \{i_m\}_{m=1}^\infty \in A$. Пусть

$$f_0^{(\alpha)}(t) = e^{\frac{t^2}{1-t^2}} - 1, \quad t \in (-1, 1) \quad \forall \alpha \in A.$$

Сначала для любого $\alpha \in A$ в двумерном цилиндре с краем $\mathbb{M} = (0, 2] \times \mathbb{R}^1$ определим слоение $(\mathbb{M}, \mathbb{F}^{(\alpha)})$, касательное к краю. Пусть $\mathbb{L}_\infty = \{1\} \times \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{L}_m = \{1 + 1/2^{m-1}\} \times \mathbb{R}^1$, $m \in \mathbb{N}$, — слои, проходящие через точки $(1, 0)$ и $(1 + 1/2^{m-1}, 0)$, $m \in \mathbb{N}$, соответственно.

Слоями слоения $\mathbb{F}^{(\alpha)}|_{I_m^0 \times \mathbb{R}^1}$, $m \in \mathbb{N}$, назовем множества

$$\mathbb{L}_{m,\beta}^{(\alpha)} = \{(t, f_m^{(\alpha)}(t) + \beta) \mid t \in I_m^0\},$$

где β — произвольное фиксированное действительное число.

Пусть $\mathbb{F}^{(\alpha)}|_{(-1,1) \times \mathbb{R}^1} = \{\mathbb{L}_{0,\beta}^{(\alpha)} \mid \beta \in \mathbb{R}^1\}$, где

$$\mathbb{L}_{0,\beta}^{(\alpha)} = \{(t, f_0^{(\alpha)}(t) + \beta) \mid -1 < t < 1\}$$

и β — произвольное фиксированное действительное число, а $\mathbb{F}^{(\alpha)}|_{(0,1) \times \mathbb{R}^1}$ — сужение слоения $\mathbb{F}^{(\alpha)}|_{(-1,1) \times \mathbb{R}^1}$.

Для $\alpha = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$ слоение $(\mathbb{M}, \mathbb{F}^{(\alpha)})$ изображено на рисунке 1.

Построим теперь слоение $F^{(\alpha)}$ в трехмерном цилиндре $\overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1$ с краем, где $\overline{D}_2^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$, следующим образом. Пусть $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Будем считать двумерные цилиндры $L_\infty = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ и $L_m = \mathbb{S}_m^1 \times \mathbb{R}^1$, $\mathbb{S}_m^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + 1/2^{m-1}\}$, $m \in \mathbb{N}$, слоями слоения $F^{(\alpha)}$. Обозначим через $\mathbb{C}_m^0$ открытое кольцо $\left\{z \in \mathbb{C} \mid 1 + \frac{1}{2^m} < |z| < 1 + \frac{1}{2^{m-1}}\right\}$.

В произведении $\mathbb{C}_m^0 \times \mathbb{R}^1$ определим слоение $F_m^{(\alpha)} = \{L_{m,\beta}^{(\alpha)} \mid \beta \in \mathbb{R}^1\}$ со слоями

$$L_{m,\beta}^{(\alpha)} = \{(z, f_m^{(\alpha)}(|z|) + \beta) \mid |z| \in \mathbb{C}_m^0\}.$$

Положим $F^{(\alpha)}|_{\mathbb{C}_m^0 \times \mathbb{R}^1} := F_m^{(\alpha)}$. Пусть $F_\infty^{(\alpha)} = \{L_{\infty,\beta}^{(\alpha)} \mid \beta \in \mathbb{R}^1\}$, где

$$L_{\infty,\beta}^{(\alpha)} = \{(z, f_0^{(\alpha)}(|z|) + \beta) \mid |z| < 1\}.$$

Рис. 1. Слоение $(\mathbb{M}, \mathbb{F}^{(\alpha)})$ при $\alpha = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$.

При этом $F^{(\alpha)}|_{D_1^2 \times \mathbb{R}^1} := F_\infty^{(\alpha)}$ — слоение в открытом заполненном цилиндре $D_1^2 \times \mathbb{R}^1$. Таким образом, мы построили слоение $(\overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1, F^{(\alpha)})$ в трехмерном цилиндре $\overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1$ с краем, касательное к краю.

Действие

$$\mathbb{Z} \times \overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1, (n, z, t) \mapsto (z, t + n)$$

группы целых чисел $\mathbb{Z}$ на цилиндре $\overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1$ определяет фактор-отображение $\psi: \overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \overline{D}_2^2 \times \mathbb{S}^1 = (\overline{D}_2^2 \times \mathbb{R}^1)/\mathbb{Z}$ на полноторий. Образы слоев слоения $(\overline{D}_1^2 \times \mathbb{R}^1, F^{(\alpha)})$ при фактор-отображении ψ образуют слоение Роба в полнотории $(\overline{D}_1^2 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{F}^{(\alpha)})$.

Обозначим через $\varphi: (\overline{D}_1^2 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{F}^{(\alpha)}) \rightarrow (\mathbb{S}_+^3, F)$ изоморфизм слоений Роба в указанных полноториях. Рассмотрим диффеоморфизм $k: \overline{D}_2^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{D}_1^2 \times \mathbb{S}^1$, заданный равенством $k(z, t) = (z/2, t)$, $(z, t) \in \overline{D}_2^2 \times \mathbb{S}^1$. отождествим полноторий $\overline{D}_2^2 \times \mathbb{S}^1$ с $\mathbb{S}_+^3$ посредством диффеоморфизма $f := \varphi \circ k: \overline{D}_2^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}_+^3$.

Положим по определению $(\mathbb{S}_+^3, \mathcal{F}^{(\alpha)}) := (f(\overline{D}_2^2 \times \mathbb{S}^1), f(\mathcal{F}^{(\alpha)}))$, где $f(\mathcal{F}^{(\alpha)})$ — слоение со слоями $f(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \in \mathcal{F}^{(\alpha)}$.

Вернем слоеный полноторий $(\mathbb{S}_+^3, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ в $\mathbb{S}^3$, оставив слоение $(\mathbb{S}_+^3, F)$ неизменным. Получим новое слоение $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$, где $\mathbb{F}_\alpha|_{\mathbb{S}_-^3} = F|_{\mathbb{S}_-^3}$ и $\mathbb{F}_\alpha|_{\mathbb{S}_+^3} = \mathcal{F}^{(\alpha)}$. Из построения вытекает, что это слоение — собственное, то есть все его слои — вложенные подмногообразия в сфере $\mathbb{S}^3$.

Заметим, что $\{K_m = f(L_m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ — счетное семейство компактных слоев слоения $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$, каждый слой K_m диффеоморфен двумерному тору $\mathbb{T}^2$ и является аттрактором с бассейном $\mathcal{U}_m = f(\mathbb{C}_m^0 \times \mathbb{R}^1 \cup L_m \cup \mathbb{C}_{m-1}^0 \times \mathbb{R}^1)$ при $m \geq 2$ и $\mathcal{U}_1 = f(\mathbb{C}_1^0 \times \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{S}_-^3)$.

Подчеркнем, что слоение $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$ имеет единственный компактный слой, не являющийся аттрактором $K_\infty = f(L_\infty)$, диффеоморфный тору $\mathbb{T}^2$.

2.2. C^∞ -гладкость и попарная неизоморфность слоений из $\mathcal{T}$

Так как $y = \operatorname{tg}(t)$ — гладкая класса C^∞ функция, а $|d^k f_m^\alpha(t)/dt^k| \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$ и всех $t \in I_m$, то построенное слоение $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$ является гладким класса C^∞ .

Докажем, что для любой пары различных элементов $\alpha, \tilde{\alpha} \in A$, слоения $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$ и $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}})$ не изоморфны.

Предположим, что существуют две последовательности α и $\tilde{\alpha}$, для которых слоения $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$ и $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}})$ изоморфны, то есть существует диффеоморфизм $h: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, являющийся изоморфизмом этих слоений.

Все объекты, относящиеся к слоению $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}})$, будем обозначать с волной. Слой K , рассматриваемый как точка пространства слоев $X_\alpha := \mathbb{S}^3/\mathbb{F}_\alpha$ слоения $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$, обозначаем через $[K]$. Как известно, проекция на пространство слоев $p_\alpha: \mathbb{S}^3 \rightarrow X_\alpha$ является непрерывным и открытым отображением, поэтому диффеоморфизм h индуцирует гомеоморфизм пространств слоев $\hat{h}: X_\alpha \rightarrow \widetilde{X}_\alpha$, удовлетворяющий равенству $\hat{h} \circ p_\alpha = p_{\tilde{\alpha}} \circ h$. Поскольку h отображает компактный слой в компактный, то $\hat{h}(K) = \tilde{K} \subset X_{\tilde{\alpha}}$, где $K = \{[K_\infty], [K_m] \mid m \in \mathbb{N}\}$ и $\tilde{K} = \{[\tilde{K}_\infty], [\tilde{K}_m] \mid m \in \mathbb{N}\}$ — множества всех компактных слоев слоений $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$ и $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}})$ соответственно. Так как $\hat{h}$ отображает предельную точку множества K в предельную точку множества $\tilde{K}$, то $\hat{h}([K_\infty]) = [\tilde{K}_\infty]$, поэтому $h(K_\infty) = \tilde{K}_\infty$.

Заметим, что $h|_{\mathbb{S}_+^3}: (\mathbb{S}_+^3, \mathbb{F}_\alpha) \rightarrow (\mathbb{S}_+^3, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}})$ и $h|_{\mathbb{S}_-^3}: (\mathbb{S}_-^3, \mathbb{F}_\alpha) \rightarrow (\mathbb{S}_-^3, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}})$ — изоморфизмы слоений Роба в соответствующих полноториях, каждое из которых имеет единственный компактный слой, поэтому $h(K_1) = \tilde{K}_1$. Структура слоений $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_\alpha)$, $(\mathbb{S}^3, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}})$ и инвариантность компактности слоев при диффеоморфизме h влекут за собой выполнение равенств $h(K_m) = \tilde{K}_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$h|_{\mathcal{U}_1}: \mathcal{U}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_1, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{U}_1$ и $\tilde{\mathcal{U}}_1$ — бассейны слоев-аттракторов K_1 и $\tilde{K}_1$, — изоморфизм указанных слоений. Отсюда вытекает, что $i_1 = \tilde{i}_1$.

Пусть $W_m := \mathcal{U}_1 \cup K_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup K_m \cup \mathcal{U}_m$ и $\tilde{W}_m := \tilde{\mathcal{U}}_1 \cup \tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{\mathcal{U}}_{m-1} \cup \tilde{K}_m \cup \tilde{\mathcal{U}}_m$, где $\mathcal{U}_n$ и $\tilde{\mathcal{U}}_n$ — бассейны слоев-аттракторов K_n и $\tilde{K}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq m$, соответственно. Повторяя предыдущие аргументы, мы получаем

$$h|_{W_m}: (W_m, \mathbb{F}_\alpha) \rightarrow (\tilde{W}_m, \mathbb{F}_{\tilde{\alpha}}) \quad (2.2)$$

— изоморфизм индуцированных слоений при любом $m \in \mathbb{N}$. Из (2.1) и (2.2) вытекает, что $i_m = \tilde{i}_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$, следовательно, $\alpha = \tilde{\alpha}$.

References

- [1] Novikov S. P. Topology of foliations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1967, vol. 14, pp. 268–304; see also: *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1965, vol. 14, no. 5, pp. 248–278.
- [2] Tamura I. *Topology of foliations: An introduction*, Providence, R.I.: AMS, 1992.

Foliations of codimension one on a three-dimensional sphere with a countable family of compact attractor leaves

Nina I. Zhukova

National Research University Higher School of Economics
ul. Bolshaja Pecherskaja 25/12, Nizhny Novgorod, 603155, Russia
nzhukova@hse.ru

In this paper we present an explicit construction of a continuum family of smooth pairwise nonisomorphic foliations of codimension one on a standard three-dimensional sphere, each of which has a countable set of compact attractors which are leaves diffeomorphic to a torus. As it was proved by S. P. Novikov, every smooth foliation of codimension one on a standard three-dimensional sphere contains a Reeb component. Changing this foliation only in the Reeb component by the method presented, we get a continuum family of smooth pairwise nonisomorphic foliations containing a countable set of compact attractor leaves diffeomorphic to a torus which coincides with the original foliation outside this Reeb component.

MSC 2010: 57R30

Keywords: Reeb foliation, Reeb component, attractor of a foliation, category of foliations

Received October 17, 2017, accepted December 03, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 579–584 (Russian)