ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9
MSC 2010: 37G35

Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром

К. В. Шлюфман, Г. П. Неверова, Е. Я. Фрисман

Исследуются динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром. Показано, что в параметрическом пространстве уравнения имеются области мультистабильности, в которых в зависимости от начальных условий могут реализовываться принципиально различные динамические режимы. В частности, в этих областях возможно асимптотическое стремление либо к устойчивому циклу, либо к хаотическому аттрактору. Исследована синхронность колебаний 2-циклов и мальтузианского параметра модели. Показано, что колебания численности могут быть как синхронны, так и асинхронны колебаниям среды обитания. Изучены особенности структуры бассейнов притяжения для возможных устойчивых режимов.

Ключевые слова: рекуррентное уравнение, модель Рикера, периодический мальтузианский параметр, устойчивость, бифуркации, динамические режимы, фазовое пространство, мультистабильность, бассейны притяжения

Получено 03 апреля 2017 года
После доработки 25 мая 2017 года

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-29-02658 офи_м и Комплексной программы фундаментальных исследований «Дальний Восток».

Шлюфман Константин Владимирович

shlufman@mail.ru

Фрисман Ефим Яковлевич

frisman@mail.ru

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
679016, Россия, г. Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, д. 4

Неверова Галина Петровна

galina.nev@gmail.com

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5

Введение

Многие виды животных имеют несколько выраженных пиков размножения в ходе годового цикла (например, в весенний и осенний сезоны). Ясно, что экологическая ситуация и популяционные характеристики, такие как рождаемость и выживаемость, в эти сезоны могут заметно различаться. Другим примером могут служить животные, обитающие в периодически меняющихся экологических условиях: виды, имеющие четкие колебания численности, в частности двухгодичные. Такой режим динамики известен для тихоокеанской горбуши *Oncorhynchus gorbuscha*, у которой существует две репродуктивно изолированные линии четных и нечетных лет, порождающие двухлетний цикл [1]. Характер динамики численности таких видов удобно описывать и исследовать с помощью достаточно простых математических моделей, удачно отражающих большой спектр возможных динамических режимов. Для популяций лососевых такой моделью является хорошо известное уравнение Рикера; чтобы учесть периодичность изменений условий среды обитания, один из параметров этой модели следует считать периодическим.

В работе [2] на основе модифицированного уравнения Рикера изучается периодическое воздействие экологического лимитирования при постоянном мальтузианском параметре на динамику численности популяций с коротким жизненным циклом. Модель такого характера может быть использована для описания и анализа динамики популяций видов, численность которых зависит от циклически изменяющегося запаса кормовых ресурсов. Например, популяция белки: динамика ее численности коррелирует с урожайностью кедра, который обильно плодоносит раз в несколько лет. В зависимости от процессов, определяющих динамику численности, авторы выделяют три типа популяций: 1) популяции, динамика которых определяется воздействием факторов внешней среды, то есть «емкостью» экологической ниши, 2) популяции, динамика численности которых регулируется преимущественно за счет плотностно-зависимого лимитирования, 3) популяции, в которых факторы внешней среды либо запускают, либо ослабляют процессы саморегуляции [2]. В работе проведено численное и аналитическое исследование модели, получены оценки границ областей существования устойчивых и неустойчивых 2-циклов, обнаружена мультистабильность. Мультистабильность выражается в том, что при одних и тех же значениях параметров и разных начальных состояниях уравнение может выходить на разные режимы. Соответственно, вариация текущей численности популяции (начального условия) может привести к смене наблюдаемого динамического режима. Следует отметить, что существование мультистабильности в уравнении Рикера с периодическим параметром показано и теоретически доказано в целом ряде работ [3–10].

Данная работа посвящена исследованию динамических режимов модели Рикера с периодическим мальтузианским параметром и, в частности, возникающим эффектам мультистабильности. Следует отметить, что несмотря на большое количество работ, имеющих отношение к уравнению Рикера с периодическим параметром, полного и подробного исследования возникающих и сосуществующих динамических режимов в этих моделях до сих пор не проводилось. В данной публикации приводятся результаты, позволяющие заполнить некоторые из пробелов. Исследования такого характера позволят получить полное представление о существующих и сосуществующих динамических режимах в уравнении Рикера с периодическим параметром, что, в свою очередь, необходимо учитывать при анализе и прогнозе динамики популяций, законы развития которых могут быть описаны такой моделью.

Модель Рикера с периодическим мальтузианским параметром

Уравнение Рикера с периодическим мальтузианским параметром, позволяющее учитывать циклические воздействия (как экзогенной, так и эндогенной природы) на численность популяции, является модификацией модели «запас – пополнение» [11] и имеет вид

$$x_{n+1} = x_n \cdot \alpha_n \cdot e^{-\beta \cdot x_n}, \quad (1)$$

где переменная x_n интерпретируется как значение численности рассматриваемой популяции в момент времени $n = 0, 1, \dots$. Коэффициент α_n — периодический мальтузианский параметр ($\alpha_{n+k} = \alpha_n$ для любого $n \geq 0$, где k — период), который соответствует репродуктивному потенциалу популяции (скорость роста популяции «в пустоту») и определяется биологическими особенностями вида. Параметр β ($\beta > 0$) характеризует «емкость» экологической ниши популяции. Нетрудно показать, что из уравнения (1), без потери общности, с помощью замены переменной может быть исключен параметр β :

$$x_{n+1} = \alpha_n \cdot x_n \cdot e^{-x_n}. \quad (2)$$

Дальнейшее исследование модели (2) будет ориентировано на случай, когда период параметра α_n составляет два года, то есть $k = 2$; в этом случае полезен переход к новым параметрам α и ρ :

$$\alpha = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}, \quad \rho = \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{2}.$$

Тогда, если $\alpha_0 = \max(\alpha_n)$, уравнение (2) может быть записано в виде

$$x_{n+1} = x_n \cdot (\alpha + (-1)^n \cdot \rho) \cdot e^{-x_n}. \quad (3)$$

Параметр α в уравнении (3) соответствует среднему значению мальтузианского параметра, относительно которого происходят колебания, а коэффициент ρ — амплитуде колебаний. Так как мальтузианский параметр имеет смысл только при положительных значениях, величина $\alpha \pm \rho$ должна быть строго больше нуля. Отсюда возникает естественное условие $|\rho| < \alpha$.

Заметим, что полученное представление (3), равно как и (2), является неавтономным рекуррентным уравнением, которое может быть сведено к автономной системе путем расширения фазового пространства. В данном случае для увеличения размерности фазового пространства удобно ввести новую фазовую переменную ρ . Соответственно, уравнение (3) принимает вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot (\alpha + \rho_n) \cdot e^{-x_n}, \\ \rho_{n+1} = -\rho_n, \end{cases} \quad (4)$$

где $|\rho_n|$ — амплитуда колебаний мальтузианского параметра, причем $|\rho_n| < \alpha$.

Перенос ρ из пространства параметров в пространство фазовых переменных накладывает на поведение ρ следующее ограничение: переменная ρ_n меняет только знак, сохраняя свое значение по модулю.

Следует отметить, что сдвиг фазы периодического мальтузианского параметра для начального условия x_0 в уравнении (3) эквивалентен изменению знака переменной ρ при начальном условии (x_0, ρ_0) в системе (4).

Стационарные и периодические решения модифицированного уравнения Рикера: условия устойчивости и существования

Уравнение Рикера с мальтузианским параметром периода 2 (уравнение (3)) имеет тривиальное стационарное решение

$$x = 0, \quad (5)$$

которое существует при всех допустимых значениях параметров α ($\alpha > 0$) и ρ ($-\alpha < \rho < \alpha$) и не зависит от их значений. Решение (5) соответствует целому классу полутривиальных 2-циклов системы (4) с координатами $(0, \rho)$ и $(0, -\rho)$, включая тривиальное решение.

Кроме того, уравнение (3) может иметь и нетривиальное стационарное решение

$$x = \ln(\alpha), \quad (6)$$

но оно существует только при $\rho = 0$ и соответствует в этом случае полутривиальному решению

$$x = \ln(\alpha), \quad \rho = 0$$

системы (4). Следовательно, рассматриваемое уравнение Рикера с периодическим мальтузианским параметром (3) имеет стационарное нетривиальное решение только в случае, когда оно вырождается в классическое уравнение Рикера, то есть при $\rho = 0$. Таким образом, появление в уравнении Рикера колебаний мальтузианского параметра исключает существование нетривиальных стационарных решений.

Исследуем полученные стационарные решения на устойчивость.

Вопрос об устойчивости решения (6) достаточно хорошо рассмотрен в литературе [11, 12], где показано, что оно устойчиво при $1 < \alpha < e^2$.

Исследование устойчивости решения (5) неавтономного уравнения (3) удобно проводить с помощью эквивалентной автономной системы (4). Как уже указывалось, решению (5) соответствует целый класс полутривиальных 2-циклов. Каждый из этих циклов является стационарной точкой системы, полученной в результате двух последовательных итераций модели (4).

Рассмотрим уравнения оператора, полученные из системы (4) повторной итерацией

$$P^{(2)}(u) = P(P(u)), \quad (7)$$

где

$$P(u) = P \begin{pmatrix} x_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n, \alpha, \rho_n) \\ g(\rho_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \cdot (\alpha + \rho_n) \cdot e^{-x_n} \\ -\rho_n \end{pmatrix}.$$

Оператор $P^{(2)}(u)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ \rho_{n+2} \end{pmatrix} = P^{(2)} \begin{pmatrix} x_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(2)}(x_n, \alpha, \rho_n) \\ g^{(2)}(\rho_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \cdot (\alpha^2 - \rho_n^2) \cdot e^{-x_n - x_n \cdot (\alpha + \rho_n) \cdot e^{-x_n}} \\ \rho_n \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Устойчивость равновесия (5) определяется значениями собственных чисел, удовлетворяющих характеристическому многочлену системы (8):

$$\left(\frac{\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))}{\partial x} - \lambda \right) \cdot (1 - \lambda) = 0, \quad (9)$$

где

$$f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x \cdot (\alpha^2 - \rho^2) \cdot e^{-x-x \cdot (\alpha+\rho) \cdot e^{-x}}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))}{\partial x} = (\alpha^2 - \rho^2) \cdot e^{(-x-x \cdot (\alpha+\rho) \cdot e^{-x}) \cdot (x-1) \cdot (x \cdot (\alpha+\rho) \cdot e^{-x}-1)}. \quad (11)$$

Поскольку собственные числа действительны, нет смысла говорить о потере устойчивости решения (5) по сценарию Неймарка–Сакера, который может реализовываться только при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения. Один из корней уравнения (9) равен единице, $\lambda_1 = 1$, и является мультипликатором отображения для переменной ρ , поскольку оператор $P^{(2)}(u)$ (7) не изменяет значение переменной ρ .

Второй корень λ_2 равен производной $\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x$ в соответствующей стационарной точке $(0, \rho)$ или $(0, -\rho)$. Находя эту производную, получаем

$$\lambda_2 = \alpha^2 - \rho^2.$$

Тогда при $\lambda_2 = 1$ граница области устойчивости решения (5) определяется равенством

$$\alpha^2 - \rho^2 = 1. \quad (12)$$

Таким образом, в уравнении Рикера (3) при $\rho \neq 0$ с ростом значения бифуркационного параметра α при переходе через границу $\alpha^2 - \rho^2 = 1$ на смену потерявшему устойчивость тривиальному решению (5) приходит устойчивый 2-цикл. Элементы этого цикла могут быть найдены из уравнения, где правая часть представляет собой результат два раза подряд итерированного уравнения (3):

$$\bar{x} = f^{(2)}(\bar{x}, \alpha, \rho), \quad (13)$$

где $\bar{x} \neq 0$, а $f^{(2)}(x, \alpha, \rho)$ определяется формулой (11). Очевидно, что решением уравнения (13) является множество точек кривой

$$(\alpha^2 - \bar{\rho}^2) \cdot e^{-\bar{x}-\bar{x} \cdot (\alpha+\bar{\rho}) \cdot e^{-\bar{x}}} = 1,$$

где ρ принимает любые значения.

Заметим, что 2-циклы неавтономного уравнения (3) также являются 2-циклам автономной системы (4) и соответствуют паре стационарных точек (x_1, ρ) и $(x_2, -\rho)$ системы (8), полученной в результате двух последовательных итераций модели (4). Используя это, найдем границы области устойчивости 2-цикла.

Искомая область устойчивости 2-цикла формируется границей, потеря устойчивости через которую реализуется по сценарию Фейгенбаума, то есть при втором корне λ_2 характеристического многочлена (9), равном -1 ($\lambda_2 = -1$). Учитывая, что $\lambda_2 = \partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x$ и стационарные точки (x_1, ρ) или $(x_2, -\rho)$, при которых происходит потеря устойчивости, должны удовлетворять уравнению (13), искомая граница определяется системой

$$\begin{cases} \partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x = -1, \\ f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x. \end{cases}$$

Решение системы, полученное в параметрическом виде,

$$\rho^*(\alpha) = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2-x) \cdot e^x}{x \cdot (1-x)} + \frac{x \cdot (1-x)}{2-x} \cdot e^{\left(\frac{2-x}{1-x}\right)} \right], \\ \rho = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2-x) \cdot e^x}{x \cdot (1-x)} - \frac{x \cdot (1-x)}{2-x} \cdot e^{\left(\frac{2-x}{1-x}\right)} \right], \end{cases} \quad (14)$$

определяет в параметрическом пространстве (α, ρ) границу области устойчивости ненулевых стационарных решений системы (8).

Значение второго корня характеристического многочлена (9), равное 1 ($\lambda_2 = 1$), соответствует касательной бифуркации. Учитывая, что $\lambda_2 = \partial(f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x$ и что устойчивая особая точка (2-цикл уравнения (3)), которая рождается в результате касательной бифуркации, должна удовлетворять уравнению (13), получаем систему уравнений, соответствующую искомой границе:

$$\begin{cases} \partial(f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x = -1, \\ f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x, \end{cases} \quad (15)$$

где зависимость $f^{(2)}(x, \alpha, \rho)$ и производная $\partial(f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x$ определены формулами (10) и (11) соответственно. Решением системы (15) является параметрически заданная кривая, при переходе через которую возникают два 2-цикла, устойчивый и неустойчивый:

$$\begin{cases} \alpha_{bif} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^x}{x-1} + (x-1) \cdot e^{\left(\frac{x}{x-1}\right)} \right], \\ \rho_{bif} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^x}{x-1} - (x-1) \cdot e^{\left(\frac{x}{x-1}\right)} \right], \end{cases} \quad (16)$$

где $x > 1$, $x \neq 2$.

Найденные границы областей устойчивости тривиального решения и 2-циклов ((12), (14) и (16)) формируют вид параметрического портрета уравнения Рикера с мальтузианским параметром периода 2 и представлены на рисунке 1. Следует отметить, что более подробное исследование модели (3) на устойчивость представлено в работе [10].

Как видно на рисунке 1, область устойчивости тривиального решения задается следующими неравенствами: $-\alpha < \rho < \alpha$ и $\alpha^2 - \rho^2 < 1$. При переходе через границу (12) ($\alpha^2 - \rho^2 = 1$) происходит транскритическая бифуркация [13], в результате которой тривиальное равновесие и периодическое решение уравнения (3) обмениваются устойчивостью, то есть нулевое решение теряет устойчивость, а периодическое приобретает. Область локальной асимптотической устойчивости периодического решения уравнения (3) заключена между границами (12) и (14). График (16) является границей, по которой проходят касательные бифуркации. При переходе через нее возникает еще один устойчивый 2-цикл уравнения (3), область устойчивости которого формируется кривыми (14) и (16). Таким образом, линия (16) отделяет область «единственности» устойчивого 2-цикла от области мультистабильности, в которой могут сосуществовать два разных устойчивых 2-цикла. Следует отметить, что оба 2-цикла теряют устойчивость через удвоение периода (рис. 1).

Рис. 1. Параметрические области различных устойчивых решений уравнения (3): I — устойчивое тривиальное решение, II — устойчивый единственный 2-цикл (первый 2-цикл), III — два разных устойчивых 2-цикла, IV — сосуществуют устойчивый второй 2-цикл и динамические режимы, возникшие в результате бифуркаций первого 2-цикла.

По сути, на рисунке 1 представлено схематическое изображение части плоскости параметров уравнения (3) в области, называемой иногда «областью перекрестка» [14]. В этой области располагается точка сборки $(e^2, 0)$, в которой сходятся вместе линии складок поверхности, определяемой уравнением (13). Проекции линии складок на плоскость параметров (α, ρ) на рисунке 1 соответствуют линиям касательных бифуркаций (график решения системы (16)).

Отметим, что результаты проведенного дополнительного анализа показали, что устойчивый 2-цикл, возникший в результате касательной бифуркации, синхронен колебаниям мальтузианского параметра, а 2-цикл, получивший устойчивость в результате транскритической бифуркации, — асинхронен.

Бифуркации удвоения периода в уравнении Рикера с периодическим мальтузианским параметром

Известно, что в классическом уравнении Рикера переход к хаосу реализуется через серию бифуркаций удвоения периода: нетривиальное равновесие теряет устойчивость и в результате бифуркации удвоения периода рождается 2-цикл, который с ростом значений параметра также бифурцирует по сценарию Фейгенбаума. В итоге наблюдается цепочка изменений динамических режимов $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow \dots \rightarrow \text{хаос}$, при этом в области хаоса возникают окна периодичности (в частности, 3-цикл), которые также бифурцируют по сценарию удвоения периода [12]. В связи с этим возникает естественный вопрос: как

реализуется каскад бифуркаций удвоения периода в уравнении Рикера с периодическим мальтузианским параметром, с учетом того, что в модели сосуществуют два устойчивых 2-цикла? Для анализа происходящих бифуркаций рассмотрим графическое представление элементов циклов уравнения Рикера с периодическим мальтузианским параметром в зависимости от параметра α . Элементы как устойчивых, так и неустойчивых циклов могут быть найдены из уравнения вида

$$x = f^{(k)}(x), \quad (17)$$

где $f(x)$ — правая часть исследуемого уравнения, k — количество выполненных итераций рекуррентным уравнением, x — элемент цикла [14]. С помощью уравнения (17) можно находить элементы циклов, периоды которых одновременно и не превышают k , и делят k нацело. Для получения элементов циклов большей длины необходимо увеличение количества выполняемых итераций k .

Рассмотрим график решений уравнения (17) с функцией $f(x)$, соответствующей уравнению (3), при $k = 8$. Этого значения k достаточно, для того чтобы на начальном этапе проследить характер изменений числа элементов циклов. На следующем рисунке представлено графическое решение уравнения (17) в пространстве (α, x) для значений ρ , равных 0, 0.2 и 0.5.

Рис. 2. Графики решений уравнений (17) при фиксированных значениях параметра ρ .^a

При $\rho = 0$ (см. рис. 2a) уравнение (17) соответствует бифуркационной диаграмме классической модели Рикера, которая демонстрирует усложнение динамики по сценарию Фейгенбаума [12]. При $0 < \alpha < \sqrt{\rho^2 + 1} = 1$ устойчиво тривиальное равновесие, далее при $\alpha = \sqrt{\rho^2 + 1} = 1$ происходит транскритическая бифуркация, в результате которой нулевое решение теряет устойчивость, а нетривиальное равновесие становится устойчивым до $\alpha = \alpha_{bif} = e^2$. При $\alpha = \alpha_{bif} = e^2$ происходит бифуркация удвоения периода, и при $\alpha > \alpha_{bif} = e^2$ рождается устойчивый 2-цикл. Элементы 2-цикла располагаются на «вилке» по обе стороны от неустойчивого ненулевого равновесия. С дальнейшим ростом значений параметра α усложнение динамики реализуется по сценарию Фейгенбаума. Так, при $\alpha \approx 12.49$ 2-цикл теряет устойчивость, в результате чего от каждого из элементов 2-цикла появляются еще по 2 элемента, то есть рождается 4-цикл, и т. д. Следует отметить, что в результате каскада бифуркаций удвоения периода 4-цикл эволюционирует до 128-цикла в узком диапазоне значений $12.49 \leq \alpha \leq 14.79$. В силу того, что мы рассматриваем 8 раз итерированное отображение, циклы большей длины на рисунке 2 отсутствуют.

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1703005/>

Однако даже небольшое увеличение значения параметра ρ вносит существенные изменения в картину динамического поведения траекторий (решений) модели (3). Как видно на рисунке 2, при $\rho = 0.2$ из точки с координатами $(\sqrt{\rho^2 + 1}, 0)$ расходятся две кривые. Это говорит о том, что при потере устойчивости нулевого равновесия в результате транскритической бифуркации появляется устойчивый 2-цикл («первый 2-цикл»). Данный 2-цикл устойчив при условии, что $\sqrt{\rho^2 + 1} < \alpha < \rho^*(\alpha)$, где $\rho^*(\alpha)$ — граница (10). Следует отметить, что в диапазоне значений $\sqrt{\rho^2 + 1} < \alpha < \alpha_{bif}$ существует единственный 2-цикл (рис. 2). Однако при $\alpha = \alpha_{bif}$ ситуация изменяется. В уравнении (17) появляется еще одна пара элементов — это полуустойчивые особые точки, которые рождаются в результате касательной бифуркации. Дальнейший рост значений параметра α ведет к распаду каждой из них на устойчивую и неустойчивую. Соответственно, здесь в уравнении (3) возникают еще два 2-цикла, один из которых устойчивый («второй 2-цикл»), а другой неустойчивый («третий 2-цикл»). Дальнейший рост значений параметра α ведет к тому, что первый 2-цикл теряет устойчивость и возникает 4-цикл, который продолжает сосуществовать со вторым и третьим 2-циклами. Затем и второй 2-цикл теряет устойчивость, в результате чего рождается еще один 4-цикл. Теперь до следующей бифуркации удвоения периода сосуществуют два устойчивых 4-цикла и неустойчивый 2-цикл, и т. д., и т. д. При этом серия бифуркаций удвоения периода второго 2-цикла следует за серией бифуркаций первого (см. рис. 2b и рис. 2c).

Следует отметить, что описанная эволюция динамических режимов в связи с изменением значений параметров полностью согласуется с результатами исследования решений уравнения (3) на устойчивость: чем больше значение коэффициента ρ , тем при более высоких значениях параметра α возникает касательная бифуркация (см. рис. 2). Однако бифуркация удвоения периода первого 2-цикла, наоборот, происходит при более низких значениях α . Интересен тот факт, что при малых значениях полуамплитуды колебаний увеличение значения параметра α приводит к впечатляющему изменению амплитуды 2-цикла. Вначале амплитуда небольшая и медленно растет (кривые медленно расходятся) с ростом α . Однако при приближении α к e^2 и переходе через это значение амплитуда резко возрастает. Такое поведение амплитуды позволяет заключить, что здесь возникают резонансные явления, которые приводят к формированию 2-цикла с большей амплитудой.

Для более детального представления о возникающих и сосуществующих динамических режимах в уравнении Рикера с двухлетним периодическим мальтузианским параметром была построена карта динамических режимов. Для этого использовался известный метод сканирования, позволяющий обнаруживать как глобально, так и локально асимптотически устойчивые решения в условиях мультистабильности. В диапазоне $(0, \ln(\alpha + \rho)]$ последовательно с малым шагом перебирались начальные состояния x_0 уравнения (3) для каждой фиксированной пары значений параметров α и ρ на узлах прямоугольной равномерной сетки, покрывающей область $\{(\alpha, \rho) | 0 \leq \alpha \leq 17; 0 \leq \rho \leq 6.2\}$. Далее итерационным вычислением находилось решение, из которого исключается переходный режим, вызванный начальным состоянием x_0 . Оставшаяся часть решения использована для определения асимптотически устойчивого периодического решения, в бассейн притяжения которого попало выбранное начальное состояние x_0 . Таким образом, для каждой пары значений (α, ρ) накапливались сведения об имеющихся периодических и хаотических решениях уравнения (3), на которые оно выходит при разных начальных условиях x_0 . Карта динамических режимов, построенная по результатам сканирования, представлена на следующем рисунке (см. рис. 3). Следует отметить, что для простоты восприятия мелкие области устойчивости циклов с периодами 16 и более (продолжающих серию бифуркаций до появления хаоса) объединены в одну область.

Рис. 3. Карта устойчивых динамических режимов уравнения (3) в параметрическом пространстве (α, ρ) . Обозначения: *н. д.* — нерегулярная динамика; X_Y — область устойчивости X -цикла из Y -серии бифуркации удвоения периода; X_Y/Z_T — область мультистабильности двух локально устойчивых периодических решений: X -цикла из Y -серии бифуркации и Z -цикла из T -серии бифуркации; точки A , B , C и E , расположенные на оси $O\alpha$, являются точками бифуркаций классического уравнения Рикера. Линии бифуркации удвоения периода показаны тонкими сплошными, линия касательной бифуркации — пунктиром, а линия транскритической бифуркации — сплошной жирной.

Поясним карту на рисунке 3. В области 1 устойчиво нулевое стационарное решение. При выходе из нее (в сторону больших значений параметра α) на линии транскритической бифуркации тривиальное решение и первый 2-цикл обмениваются устойчивостью, то есть тривиальное решение теряет устойчивость, а первый 2-цикл ее приобретает. Область устойчивости этого 2-цикла состоит из частей 2_1 и $2_1/2_2$. В части 2_1 первый 2-цикл — единственно возможное устойчивое решение. В области $2_1/2_2$ первый 2-цикл делит фазовое пространство уравнения (3) со вторым устойчивым 2-циклом, возникшим в результате касательной бифуркации. Линии, на которых происходят касательные бифуркации, на карте динамических режимов показаны пунктиром. Они сходятся вместе в точке бифуркации коразмерности два — точке сборки $A(e^2, 0)$ ($e^2 \approx 7.38$).

Дальнейшая эволюция первого 2-цикла происходит по сценарию Фейгенбаума. В результате удвоения периода 2-цикл теряет устойчивость, и ему на смену приходит устойчивый 4-цикл. Область его устойчивости обозначена через 4_1 , $4_1/2_2$ и $4_1/4_2$. В части 4_1 бассейн притяжения 4-цикла заполняет всю область фазового пространства, соответствующую положительным значениям переменной x , а в частях $4_1/2_2$ и $4_1/4_2$ делит ее с устойчивыми циклами 2_2 и 4_2 соответственно.

Отметим, что область устойчивости второго 2-цикла проходит полосой, которая заключена между линией касательной бифуркации и линией бифуркации удвоения периода, исходящей из точки B . Данная полоса на карте состоит из частей $2_1/2_2$, $4_1/2_2$, $8_1/2_2$ и $n. \partial/2_2$. В каждой из них, кроме последней, второй 2-цикл сосуществует с одним из циклов первой серии бифуркаций удвоения периода.

Заметим, что область $2_1/2_2$ (устойчивости первого и второго 2-циклов) включает в себя интервал $(A, B) \approx (7.38, 12.49)$ оси абсцисс Oa , на котором устойчив 2-цикл классического уравнения Рикера [12].

Второй 2-цикл, так же как и первый, эволюционирует в хаос по сценарию Фейгенбаума. Возникающие в результате этой эволюции периодические решения в тексте упоминаются как «вторые». Их вытянутые области устойчивости представляют собой последовательность примыкающих друг к другу полос. Накладываясь друг на друга, области устойчивости первой и второй серий бифуркаций образуют различные сочетания мультистабильности. Поясним сказанное на примере второго 4-цикла. Его область устойчивости простирается вдоль области устойчивости второго 2-цикла и примыкает к ней по линии бифуркации удвоения периода. На карте ее части обозначены через $4_1/4_2$, $8_1/4_2$ и $n. \partial/4_2$. Заметим, что, подобно 2-циклам, области устойчивости обоих 4-циклов включают в себя интервал $(B, C) \approx (12.49, 14.24)$ оси абсцисс Oa , на котором устойчив 4-цикл классического уравнения Рикера [12].

Анализ представленной на рисунке 3 карты динамических режимов позволяет сделать следующие выводы. В рассматриваемой области параметрического пространства мультистабильность имеет место там, где находится область устойчивости циклов второй серии бифуркации. Мультистабильность проявляется в двух качественно разных сочетаниях. Первое сочетание — это два устойчивых периодических решения, одно из которых относится к первой серии бифуркаций, а второе — ко второй. Второе сочетание — это устойчивое периодическое решение второй серии бифуркаций и непериодическое решение, возникшее по сценарию Фейгенбаума в первой серии бифуркаций.

Хорошо известен тот факт, что в классической модели Рикера неоднократно возникают и бифурцируют по сценарию Фейгенбаума циклы нечетной длины: 3, 5, и т. д. Авторы работы [12] численно установили, что 3-цикл бифурцирует на интервалах $(15.985, 16.035)$ и $(22.25, 24.5)$, а 5-цикл — на $(18.51, 18.59)$. Для исследования эволюции названных циклов в модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром была построена карта динамических режимов в пространстве (α, ρ) для значений α от 0 до 25 и ρ от -25 до 25 (рис. 4).

На представленной карте рисунка 4 в области мультистабильности параметрического пространства (α, ρ) часть полосы устойчивости 2-цикла, появившегося в результате касательной бифуркации, и возникших из него по сценарию Фейгенбаума 4-циклов, 8-циклов и т. д., вырезана; поэтому на карте отчетливо видны узкие полосы области устойчивости 6- и 12-циклов (в оттенках красно-коричневого цвета), а также 10- и 20-циклов (в оттенках синего). Эти области берут свое начало от оси Oa из уже упомянутых в предыдущем абзаце очень узких интервалов. С ростом значения амплитуды колебаний мальтузианского параметра ρ рассматриваемые области изгибаются, как бы повторяя линию изгиба границы первой серии бифуркации 2-цикла. Затем они утолщаются и заканчиваются резким сужением до формы «усов», расходящихся в разные стороны. Благодаря своим формам такие области существования устойчивых циклов, расположенные внутри области хаоса, в литературе именуются «креветкоподобными» (shrimp-like) [15, 16].

Рис. 4. Карта динамических режимов, демонстрирующая эволюцию 3-цикла. Цифры соответствуют длинам наблюдаемых циклов, C — хаотическая динамика.

На карте динамических режимов имеется еще несколько достаточно крупных областей устойчивости 6-цикла. Одна из них содержит в себе интервал $(22.25, 24.5)$ оси Oa . Две другие располагаются симметрично относительно оси Oa при больших значениях амплитуды колебаний мальтузианского параметра ρ .

Визуальный анализ карты позволяет заключить, что при значениях полуамплитуды $\rho \neq 0$ бифуркация удвоения периода первого 2-цикла происходит при меньших значениях параметра α , чем у классического уравнения Рикера (при $\rho = 0$). При этом для второго 2-цикла, возникшего в результате касательной бифуркации, справедливо обратное утверждение: с ростом полуамплитуды этот цикл возникает при больших значениях, чем $\alpha = e^2$.

Отметим, что циклы нечетной длины возможны только при $\rho = 0$, а при $\rho \neq 0$ существуют только циклы четной длины (кратные периоду мальтузианского параметра). Можно сказать, что в случае, когда мальтузианский параметр колеблется с периодом 2, циклы нечетной длины не наблюдаются. Вместо них в уравнении (3) возникают циклы с удвоенным периодом, которые бифурцируют по сценарию Фейгенбаума: 6, 12, ..., 10, 20, ..., 14, 28, ..., и т. д. Графики некоторых 4-, 8- и 10-циклов уравнения (3) представлены на рисунке 5.

Визуальный анализ графиков на рисунке 5 позволяет заключить, что некоторые циклы уравнения (3) имеют особенности, отличающие их от циклов классического уравнения Рикера. Рассмотрим эти фрагменты по порядку.

Из всех изображенных на рисунках 5а–с 4-циклов только в случае (а) график имеет хорошо узнаваемую пилообразную форму, свойственную 4-циклам классического уравнения Рикера. В случае (б) решение отличается тем, что имеет локальный рост значения переменной x от меньшего к большему на интервале длиной в один период цикла, то есть располагается на четырех значениях. В случае (с) 4-цикл имеет два ярко выраженных локальных максимума, отличающихся по величине друг от друга почти в два раза, а локальные минимумы расположены в узком диапазоне значений переменной x . Другими словами,

Рис. 5. Графики фрагментов решений уравнения (3): (а) 4-цикла при $\rho = 2.7$ и $\alpha = 10.5$, (б) 4-цикла при $\rho = 7.37$ и $\alpha = 10.5$, (с) 4-цикла при $\rho = 10$ и $\alpha = 10.5$, (d) 8-цикла при $\rho = 5.68$ и $\alpha = 10.5$, (е) 8-цикла при $\rho = 6.5$ и $\alpha = 12$, (f) 8-цикла при $\rho = 8.7$ и $\alpha = 10.5$, (g) 10-цикла при $\rho = 0$ и $\alpha = 18.59$, (h) 10-цикла при $\rho = 5.7$ и $\alpha = 12$.

это означает, что при периодических изменениях мальтузианского параметра с большой амплитудой ($\rho = 10$ при $\alpha = 10.5$) система может демонстрировать разные приращения переменной за одну итерацию практически из одной и той же области малых значений переменной x .

У 8- и 10-циклов уравнения (3) (см. рис. 5d–f, h), как и у уже рассмотренных выше 4-циклов, отличительной чертой является рост на протяжении трех итераций подряд. Для сравнения на рисунке 5g представлен фрагмент 10-цикла классического уравнения Рикера при $\alpha = 18.59$.

Бассейны притяжения сосуществующих режимов

Как известно, явление мультистабильности сопряжено с делением фазового пространства на бассейны притяжения сосуществующих устойчивых решений. Чтобы получить представление о таком делении фазового пространства исследуемой модели (3), были построены карты бассейнов притяжения устойчивых решений системы (4) в плоскости (x, ρ) при фиксированных значениях α . Отметим, что плоскость (x, ρ) является фазовым пространством системы (4), но с учетом связи между моделями (4) и (3) представленные результаты исследования легко переносятся на уравнение (3).

Построение карт бассейнов притяжения выполнялось следующим способом. При выбранном значении α с мелким шагом в ограниченной области плоскости (x, ρ) перебирались

Рис. 6. Карты бассейнов притяжения системы (4) в фазовом пространстве (x, ρ) при фиксированных значениях параметра α : (a), (b) $\alpha = 9.5$, (c) $\alpha = 12$, (d) $\alpha = 13.5$. Индекс указывает на принадлежность режима к циклам серии бифуркаций удвоения периода первого или второго 2-цикла соответственно.

начальные состояния (x_0, ρ_0) и находились соответствующие решения системы (4). Каждое решение вычислялось на протяжении 5000 итераций, а по результатам последних 500 шагов определялся период предельного цикла. На карте бассейнов притяжения устойчивых решений точка (x_0, ρ_0) окрашивалась в заданный цвет в соответствии с полученным периодом (см. рис. 6).

Цифры на рисунке 6 соответствуют длинам наблюдаемых циклов. Индекс 1 указывает на принадлежность режима к циклам серии бифуркаций удвоения периода первого 2-цикла, а индекс 2 — на принадлежность режима к циклам серии бифуркаций второго 2-цикла, возникшего в результате касательной бифуркации.

На рисунке 6а представлена карта бассейнов притяжения при $\alpha = 9.5$. Интерпретируя полученную карту для уравнения (3), можно сказать следующее. Бассейны притяжения двух сосуществующих 2-циклов уравнения (3) для фиксированного значения $\rho_0 = \rho_{fix}$, не превышающего бифуркационного значения $\rho \approx 0.57$, представляют собой последовательность чередующихся интервалов на прямой $\rho_0 = \rho_{fix}$, исходящей из точки $(0, \rho_0)$ в плоскости (x_0, ρ_0) . Это означает, что при одной и той же амплитуде ρ колебаний мальтузианского параметра при разных начальных x_0 в уравнении (3) могут наблюдаться два разных 2-цикла. При этом с увеличением амплитуды колебаний интервалы, соответствующие областям притяжения второго 2-цикла, сужаются, а бассейн притяжения первого 2-цикла

расширяется. Превышение амплитудой ρ бифуркационного значения (16) приводит к исчезновению областей притяжения второго 2-цикла, и, как следствие, во всем фазовом пространстве остается только один устойчивый первый 2-цикл.

Отметим, что линейная шкала, использованная на рисунке 6a, не позволяет в области малых значений переменной x (меньше, чем $x = 0.3$) обозначить границы бассейнов притяжения 2-циклов. Для демонстрации расположения границ рассматриваемых в области значений x (меньше, чем 0.3) на рисунке 6b использована нелинейная шкала, заданная обратным оператором правой части уравнения (3) при $\rho = 0$. С учетом выбранного масштабирования также наблюдается периодичность областей притяжения второго 2-цикла.

На рисунке 6c при $\alpha = 12$ карта содержит бассейны трех динамических режимов: второго 2-цикла, первого 2-цикла и первого 4-цикла (результат бифуркации удвоения периода первого 2-цикла). При $\alpha = 13.5$ (рис. 6d) количество динамических режимов на карте существенно увеличивается. Так, здесь наблюдаются все режимы из серии бифуркаций удвоения периода первого 2-цикла, также второй 2-цикл и возникающий из него 4-цикл. Для упрощения восприятия рисунка бассейны притяжения циклов длиной более 8 объединены в одну область «16-цикл и более». Из рисунка 6d видно, что с увеличением амплитуды ρ колебаний мальтузианского параметра у первой серии бифуркаций удвоения периода происходит увеличение периода цикла до наступления хаоса. Что касается бифуркаций второго 2-цикла, то здесь с ростом ρ наблюдается обратный порядок бифуркации: происходит уменьшение длины цикла с 4-х до 2-х. Как и ранее, бассейн притяжения режимов, рожденных в результате бифуркаций второго 2-цикла, с увеличением абсолютного значения ρ заметно сужается.

Из рисунка 6 видно, что с ростом значения параметра α наблюдается усложнение структуры карт бассейнов притяжения: увеличивается число возможных динамических режимов. Однако, интерпретируя все эти карты для уравнения (3), можно сказать следующее. В целом структура бассейнов притяжения при любом фиксированном значении амплитуды ρ колебаний мальтузианского параметра α остается прежней: возможно сосуществование только двух динамических режимов.

Отметим, что в большинстве случаев в системе (4) в результате переходного режима выход на тот или иной устойчивый динамический режим зависит и от значения начального условия x_0 , и от фазы колебаний мальтузианского параметра ρ_0 . Однако существуют такие значения начального состояния x_0 , при которых возможен выход только на один устойчивый режим, не зависящий от фазы мальтузианского параметра ρ_0 . Проиллюстрируем сказанное с помощью рисунка 7. Этот рисунок можно получить из рисунка 6a, сгибая его по оси абсцисс и затем складывая его вдвое. На этом рисунке жирными сплошными линиями обозначены границы областей притяжения локально устойчивого второго 2-цикла в пространстве (x, ρ) . В результате получаются области с двойной штриховкой, которые и обозначают мультистабильность для соответствующих значений начального состояния x_0 . Для них фаза мальтузианского параметра определяет выход решения на один из двух сосуществующих режимов: первый и второй 2-циклы. В областях, отмеченных одинарной штриховкой, притягивает к себе только первый 2-цикл.

Поясним сказанное. Пусть точки $M(x_M, \rho_M)$ и $N(x_N, \rho_N)$ расположены в фазовом пространстве (x, ρ) так, как показано на рисунке 7. Координаты точки M означают, что рассматривается решение уравнения Рикера (3) с амплитудой колебаний мальтузианского параметра $\rho = \rho_M$ и начальным условием $x_0 = x_M$. Нахождение этой точки на рисунке 7 в области одинарной штриховки означает, что решение уравнения асимптотически стремится к устойчивому первому 2-циклу. Местоположение точки в области двойной штриховки

Рис. 7. Области мультистабильности уравнения Рикера при $\alpha = 9.5$ в пространстве $(x, |\rho|)$.

означает возможность выхода решения на один из двух локально устойчивых 2-циклов. При этом выход на тот или иной 2-цикл определяет фаза мальтузианского параметра, приходящаяся на x_0 .

Заключение

В параметрическом пространстве аналитически получены границы областей устойчивости тривиального решения и 2-циклов уравнения Рикера с мальтузианским параметром периода 2. Общая граница этих областей определяется транскритической бифуркацией, в результате которой названные режимы обмениваются устойчивостью. В результате касательной бифуркации, в дополнение к уже существующему устойчивому режиму, возникает еще один устойчивый 2-цикл. Таким образом, в параметрическом пространстве уравнения формируется область мультистабильности, в которой сосуществуют два устойчивых цикла. Дальнейшая потеря устойчивости режимов происходит по сценарию Фейгенбаума.

Существование в области мультистабильности, при одних и тех же значениях параметров, устойчивого режима (цикла конечной длины) и неустойчивого режима (цикла бесконечной длины) указывает на возможность наблюдать в природе как регулярную, так и нерегулярную динамику численности при одних и тех же периодически изменяющихся условиях среды. При этом, как показали результаты исследования, причиной смены динамического режима может быть не только вариация значений начального условия, но и флуктуация значений коэффициента, характеризующего фазу мальтузианского параметра.

Установлено, что возникший в результате касательной бифуркации 2-цикл синхронен колебаниям мальтузианского параметра, а 2-цикл, получивший устойчивость в результате транскритической бифуркации, — асинхронен. Это свидетельствует о том, что 2-циклы колебаний численности в периодически изменяющейся среде (с периодом 2) могут быть как синхронны, так и асинхронны колебаниям среды обитания. Показано, что у второго 2-цикла

бассейн притяжения в фазовом пространстве представлен периодически расположенными областями, причем с увеличением амплитуды колебаний мальтузианского параметра эти области сужаются, уступая место бассейну первого 2-цикла.

Обнаружено, что начальные состояния уравнения Рикера с мальтузианским параметром периода 2 в условиях мультистабильности можно разделить на два типа. К первому типу относятся состояния, из которых возможен переход, в зависимости от фазы мальтузианского параметра, либо к режимам, возникшим в результате серии бифуркаций первого 2-цикла, либо к режимам, возникшим из серии бифуркаций второго 2-цикла. Для второго типа начальных состояний, независимо от фазы мальтузианского параметра, притягивающими устойчивыми решениями являются первый 2-цикл и режимы, рожденные в результате потери им устойчивости по сценарию Фейгенбаума.

References

- [1] Kaev A. M. Temporal structure of migration flow in pink salmon *Oncorhynchus gorbuscha* in the sea of Okhotsk, *Izv. TINRO*, 2002, vol. 130, nos. 1–3, pp. 904–920 (Russian).
- [2] Ashikhmina E. V., Izrail'sky Yu. G., Frisman E. Ya. Dynamics of the Ricker model with periodical parameter variation, *Vestn. Dalnevost. Otd. RAN*, 2004, no. 5, pp. 19–28 (Russian).
- [3] Sacker R. J., von Bremen H. F. A conjecture on the stability of the periodic solutions of Ricker's equation with periodic parameters, *Appl. Math. Comput.*, 2010, vol. 217, no. 3, pp. 1213–1219.
- [4] Zhou Zh., Zou X. Stable periodic solutions in a discrete logistic equation, *Appl. Math. Lett.*, 2003, vol. 16, no. 2, pp. 165–171.
- [5] Kon R. Attenuant cycles of population models with periodic carrying capacity, *J. Difference Equ. Appl.*, 2005, vol. 11, nos. 4–5, pp. 423–430.
- [6] Sacker R. J. A note on periodic Ricker maps, *J. Difference Equ. Appl.*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 89–92.
- [7] Elaydi S. N., Luís R., Oliveira H. Towards a theory of periodic difference equations and its application to population dynamics, in *Dynamics, Games and Science: Vol. 1*, M. M. Peixoto et al. (Eds.), Springer Proc. Math., vol. 1, Heidelberg: Springer, 2011, pp. 287–321.
- [8] AlSharawi Z., Angelos J., Elaydi S., Rakesh L. An extension of Sharkovsky's theorem to periodic difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, vol. 316, no. 1, pp. 128–141.
- [9] AlSharawi Z., Angelos J., Elaydi S. Existence and stability of periodic orbits of periodic difference equations with delays, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, vol. 18, no. 1, pp. 203–217.
- [10] Shlufman K. V., Neverova G. P., Frisman E. Ya. Two-cycles of the Ricker model with the periodic Malthusian parameter: Stability and multistability, *Nelin. Dinam.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 553–565 (Russian).
- [11] Ricker W. E. *Computation and interpretation of biological statistics of fish populations*, Bulletin of the Fisheries Research Board of Canada, No 191, Ottawa: Department of the Environment Fisheries and Marine Service, 1975.
- [12] Skalet'skaya E. I., Frisman E. Ya., Shapiro A. P. *Discrete models of population dynamics and optimization of exploitation*, Moscow: Nauka, 1979 (Russian).
- [13] Chow Sh.-N., Li Ch., Wang D. *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [14] Kuznetsov S. P. *Dynamical chaos*, 2nd ed., Moscow: Fizmatlit, 2006 (Russian).
- [15] Gallas J. Dissecting shrimps: Results for some one-dimensional physical models, *Phys. A*, 1994, vol. 202, nos. 1–2, pp. 196–223.
- [16] Gomez F., Stoop R. L., Stoop R. Universal dynamical properties preclude standard clustering in a large class of biochemical data, *Bioinformatics*, 2014, vol. 30, no. 17, pp. 2486–2493.

Dynamic modes of the Ricker model with periodic Malthusian parameterKonstantin V. Shlufman¹, Galina P. Neverova², Efim Ya. Frisman³^{1,3}Institute for Complex Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of RAS
ul. Sholom-Aleikhem 4, Birobidzhan, 679016, Russia²Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS
ul. Radio 5, Vladivostok, 690041, Russia¹shlufman@mail.ru, ²galina.nev@gmail.com, ³frisman@mail.ru

The paper studies dynamic modes of the Ricker model with the periodic Malthusian parameter. The equation parametric space is shown to have multistability areas in which different dynamic modes are possible depending on the initial conditions. In particular, the model trajectory can asymptotically tend either to a stable cycle or to a chaotic attractor. Oscillation synchronization of the 2-cycles and the Malthusian parameter of the model are studied. Fluctuations in population size and environmental factors can be either synchronous or asynchronous. The structural features of attraction basins in phase space are investigated for possible stable dynamic modes.

MSC 2010: 37G35

Keywords: recurrence equation, Ricker model, periodic Malthusian parameter, stability, bifurcation, dynamic modes, phase space, basins of attraction, multistability

Received April 03, 2017, accepted May 25, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 363–380 (Russian)