ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.539.2

MSC 2010: 70K43, 37E99

Стационарная и нестационарная динамика системы двух гармонически связанных маятников

М. А. Ковалева, В. В. Смирнов, Л. И. Маневич

Представлен анализ нелинейной динамики маятников с гармонической связью без ограничений на амплитуды колебаний. Данная модель является базовой в ряде областей механики и физики (кристаллы парафинов, молекулы ДНК и др.). Получены стационарные решения уравнений движения, соответствующие нелинейным нормальным модам (ННМ). Выявлена инверсия частотных характеристик ННМ при увеличении амплитуды колебаний. В предположении о резонансном взаимодействии ННМ введен медленный масштаб времени, определяющий характерные времена энергообмена между маятниками. Существенно нестационарный процесс полного энергообмена описан в терминах предельных фазовых траекторий (ПФТ), для которых получено эффективное аналитическое представление. Найдены явные выражения пороговых значений безразмерных параметров, соответствующие неустойчивости ННМ и переходу (в параметрическом пространстве) от полного энергообмена между маятниками к локализации энергии. Полученные аналитические результаты подтверждены построением сечений Пуанкаре исходной системы.

Ключевые слова: существенно нелинейные системы, связанные маятники, нелинейные нормальные моды, предельные фазовые траектории

Получено 31 октября 2016 года

После доработки 28 января 2017 года

Авторы благодарят Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку (грант № 16-33-60186 мол_а_дк).

Ковалева Маргарита Алексеевна

makovaleva@chph.ras.ru

Смирнов Валерий Валентинович

vvs@polymer.chph.ras.ru

Маневич Леонид Исакович

manevitchleonid3@gmail.com

Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук

119991, г. Москва, ул. Косыгина, д. 4

1. Введение

Система гармонически связанных маятников является адекватной физической моделью для таких систем, как кристаллы парафинов, ферромагнитные цепи, органические молекулы, включая ДНК [1, 2]. В настоящей работе рассмотрена простейшая модель этого типа — система двух идентичных маятников, связанных гармоническим потенциалом. Проведенный анализ может быть далее обобщен на случай цепей конечной длины. На примере моделей Ферми–Паста–Улама и Клейна–Гордона [3, 4] было ранее показано, что в условиях резонанса естественно возникают когерентные домены (кластеры), слабое взаимодействие между которыми определяет процессы энергообмена и локализации энергии в колебательной цепи. Динамика таких кластеров также описывается моделью с двумя степенями свободы.

Динамике связанных осцилляторов посвящено большое число публикаций. Помимо ранних классических работ, отраженных в монографиях [5–10] и более поздних работах [11–13], можно отметить, в частности, поиск периодических движений и циклов в сложных системах, содержащих слабо связанные подсистемы [14–16], с доказательствами существования и устойчивости 2π -периодических решений для широкого класса задач, но без конструктивного построения таких решений. Отметим также работы, описывающие численно режимы, существующие в системах идентичных осцилляторов с различными типами связей [17, 18]. Особое место занимает серия работ по синхронизации, основанных на фазовом приближении [19, 20]. Эти исследования базируются на предположении о неизменности или малых изменениях амплитуды колебаний. Анализ устойчивости нормальных колебаний и нахождение аналитических решений в окрестности положения равновесия системы двух связанных маятников с малой или произвольной линейной связью представлены в работах [21–23]. При наличии сильных амплитудных модуляций весьма эффективным оказывается подход, рассматривающий как нелинейные нормальные моды (ННМ), так и предельные фазовые траектории (ПФТ) [3, 4, 24–29]. Так, в этом случае удастся получить аналитическое описание сложных нестационарных режимов в терминах негладких функций.

В рассматриваемом случае, в отличие от многих работ, посвященных взаимодействующим нелинейным осцилляторам, нелинейность как самих маятников, так и связи между ними не предполагается малой, что означает принципиальную неприменимость методов исследования, предполагающих квазилинейность и наличие соответствующего малого параметра. Для преодоления этой трудности был предложен полуобратный метод [30]. С использованием этого метода и концепции ПФТ ранее была рассмотрена система двух идентичных линейно связанных маятников при произвольных амплитудах колебаний [31]. Описаны аналитически как стационарный, так и нестационарный топологические переходы, приводящие к качественному изменению динамического поведения системы. Настоящая работа продолжает исследование применительно к более сложному случаю, когда уже нельзя предполагать линейной связь между маятниками.

2. Комплексные уравнения движения

Рассматривается система двух гармонически связанных идентичных маятников, функция Гамильтона которых имеет вид

$$H = \sum_{j=1,2} \left(\frac{1}{2} I \left(\frac{dq_j}{dt_1} \right)^2 + mgl (1 - \cos(q_j)) + \beta_1 (1 - \cos(q_j - q_{3-j})) \right),$$

$I = ml^2$ — момент инерции, m — масса, l — длина подвеса математического маятника, β_1 — жесткость крутильной связи между маятниками, q_j — угол поворота j -го маятника относительно нижнего устойчивого положения равновесия.

Введем замену временной переменной: $t = \omega_0 t_1$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ — частота линейных колебаний маятника. Тогда безразмерная функция Гамильтона принимает вид

$$H = \sum_{j=1,2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dq_j}{dt} \right)^2 + (1 - \cos(q_j)) + \beta (1 - \cos(q_j - q_{3-j})) \right),$$

где параметр $\beta = \beta_1/(m l^2)$ характеризует связь между маятниками.

Соответствующие уравнения движения записываются следующим образом:

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} + \beta \sin(q_j - q_{3-j}) + \sin(q_j) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.1)$$

Определим комплексные переменные как линейные комплексные комбинации скоростей и перемещений:

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{dq_j}{dt} + i \sqrt{\omega} q_j \right), \quad q_j = -\frac{i}{\sqrt{2\omega}} (\psi_j - \psi_j^*), \quad \frac{dq_j}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\omega}} (\psi_j + \psi_j^*), \quad j = 1, 2,$$

где ω — пока не определенная резонансная частота колебаний.

После подстановки в уравнения движения и разложения потенциала по степеням аргумента преобразуем систему (2.1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \psi_j + \frac{\omega}{2} (\psi_j + \psi_j^*) + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega}} \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{-i}{\sqrt{2\omega}} \right)^{2k+1} (\psi_j - \psi_{3-j} - c.c.)^{2k+1} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{-i}{\sqrt{2\omega}} \right)^{2k+1} (\psi_j - c.c.) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следует заметить, что такое преобразование является точным при условии, что гармонические члены представлены именно бесконечными рядами.

Предположение о близости системы к резонансу на частоте ω означает существование медленного масштаба времени. Представим решения в виде

$$\psi_j = \varphi_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2,$$

где значения φ_j зависят от «медленного» времени $\tau_1 = st$, а малый параметр $s \ll 1$ характеризует ширину (по частоте) рассматриваемой резонансной области, то есть близость частот синфазной и антифазной ННМ. Усредняя уравнения движения по быстрому времени t и исключая секулярные члены, приводящие к бесконечному росту решений, получаем следующие уравнения в медленном времени:

$$i \frac{d}{d\tau_1} \varphi_j - \frac{\omega}{2} \varphi_j + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{\omega}} |\varphi_j - \varphi_{3-j}| \right) \frac{\varphi_j - \varphi_{3-j}}{|\varphi_j - \varphi_{3-j}|} + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{\omega}} |\varphi_j| \right) \frac{\varphi_j}{|\varphi_j|} = 0, \quad (2.3)$$

$$j = 1, 2.$$

3. Стационарная задача: нелинейные нормальные моды

Стандартной процедурой для исследования стационарной динамики является поиск нелинейных нормальных мод.

При реализации ННМ условия (следующие из определения комплексной переменной ψ_j)

$$\varphi_j = \text{const} = \sqrt{X} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} Q; \quad \varphi_j = \pm \varphi_{3-j}, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где знак «+» соответствует синфазной, а «−» – антифазной ННМ, Q — амплитуда колебаний, приводят в случае синфазной моды к стационарному уравнению:

$$-\frac{\omega}{2} \varphi_j + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{\omega}} |\varphi_j| \right) \frac{\varphi_j}{|\varphi_j|} = 0.$$

Тогда с учетом (3.1) частота синфазной моды может быть найдена из соотношения

$$-\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\omega X}} J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{\omega}} X \right) = -\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\omega Q} J_1(Q) = 0,$$

или

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{Q} J_1(Q)}. \quad (3.2)$$

Частота антифазной моды может быть найдена из тех же уравнений, но при условии

$$\varphi_j = -\varphi_{3-j},$$

$$-\frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left(2\sqrt{\frac{2}{\omega}} X \right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{\omega}} X \right) = -\frac{\omega}{2} + \frac{\beta}{\omega Q} J_1(2Q) + \frac{1}{\omega Q} J_1(Q) = 0.$$

Тогда частота антифазной моды будет выражаться так:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{2}{Q} (\beta J_1(2Q) + J_1(Q))}. \quad (3.3)$$

Заметим, что при малых значениях параметра связи частота антифазной ННМ приближается к частоте синфазной ННМ. Сравнение аналитических выражений с численными результатами для частот синфазной и антифазной мод приведено на рисунке 1. Как видно, согласие оказывается хорошим при начальных условиях, соответствующих начальному возбуждению вплоть до $Q = 9/10\pi$. Как и следовало ожидать, частоты колебаний уменьшаются с ростом интенсивности начального возбуждения («мягкая» нелинейность). Главный качественный эффект, который проявляется в стационарной динамике — инверсия частот ННМ при достаточно больших амплитудах колебаний, в отличие от стандартной ситуации, которая проявляется, например в модели Френкеля – Конторовой (с линейной связью между маятниками): при достаточно больших амплитудах частота антифазной ННМ становится меньше частоты синфазной ННМ [27] (рис. 1).

Кроме того, следует отметить, что наше предположение о близости частот обеих мод оказывается верным в широком диапазоне параметров и начальных условий. Полученный результат говорит о применимости полуобратного метода, позволившего ввести медленный масштаб времени, связанный с малой разностью частот взаимодействующих мод. Дальнейший анализ подтверждает применимость используемого приближения.

Рис. 1. Сравнение аналитического решения с численными результатами для частот синфазной (красный) и антифазной (черный) мод.^a Сплошные кривые соответствуют аналитическим выражениям (3.2), (3.3), точки — результаты численного моделирования при $\beta = 0.1$.

4. Нестационарная динамика: анализ на фазовой плоскости

Для асимптотической системы (2.3) помимо гамильтониана существует еще один интеграл движения:

$$X = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = \frac{\omega}{2} Q = \text{const}.$$

В квантовой механике такая величина называется интегралом чисел заполнения. Используя дополнительный интеграл, можно редуцировать фазовое пространство системы до двумерного, введя относительные амплитуды и фазы колебаний маятников. Однако физически значимыми являются не абсолютные значения фаз, а только их разность [21–27], поэтому описание динамики системы может быть представлено в терминах «угловых» переменных θ и $\Delta = \delta_1 - \delta_2$:

$$\varphi_1 = \sqrt{X} \cos(\theta) e^{i\delta_1}, \quad \varphi_2 = \sqrt{X} \sin(\theta) e^{i\delta_2}.$$

Такое преобразование позволяет получить систему уравнений на плоскости:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{Q\beta J_1 (Q\sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}) \sin \Delta}{2\sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}}, \\ \sin 2\theta \dot{\Delta} &= Q (J_1 (Q \cos \theta) \sin \theta - J_1 (Q \sin \theta) \cos \theta) + \\ &+ \frac{Q\beta J_1 (Q\sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}) \cos \Delta \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\Delta = \delta_1 - \delta_2$ — разность фаз маятников, точка обозначает дифференцирование по медленному времени.

Гамильтониан системы принимает вид

$$H_\theta = -J_0 (Q \cos \theta) - J_0 (Q \sin \theta) - \beta J_0 (Q\sqrt{1 - \cos \Delta \sin 2\theta}) - \frac{1}{2} Q J_1 (Q).$$

Фазовые портреты системы представлены на рисунке 2.

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1701007/>

Рис. 2. Фазовая плоскость (Δ, θ) для $Q = \pi/2$ и различных значений параметра связи: (а) $\beta = 0.3$, (б) $\beta = 0.139$, (с) $\beta = 0.0812$, (д) $\beta = 0.06$.

Фазовая плоскость разбивается на периодические ячейки, поэтому достаточно рассмотреть одну ячейку фазового пространства: $(\Delta \in [-\pi/2, 3\pi/2], \theta \in [0, \pi/2])$. Значение $\theta = 0$ соответствует концентрации энергии на одном маятнике, $\theta = \pi/2$ — на другом, $\theta = \pi/4$ — равному распределению энергии.

При относительно больших значениях параметра связи β (рис. 2а) фазовая плоскость содержит только две стационарные точки, соответствующие ННМ: синфазная мода ($\Delta = 0, \theta = \pi/4$) и антифазная мода ($\Delta = \pi, \theta = \pi/4$). Предельная фазовая траектория (ПФТ) — траектория, проходящая через точку $(\Delta = \pi, \theta = 0)$ в начальный момент времени (выделена красной штриховой линией). В рассматриваемом случае она показывает возможность полного переноса энергии от одного маятника на другой и обратно. В исходной системе такая траектория соответствует полному периодическому обмену энергией между маятниками — биениям.

При ослаблении связи между маятниками происходит бифуркация синфазной ННМ, она теряет устойчивость, рождаются две новые несимметричные моды с преимущественной локализацией энергии на одном из маятников, разделенные сепаратрисой. Порог неустой-

чивости синфазной ННМ определяется соотношением

$$\beta_{in} = -\frac{1}{2} J_0 \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{Q} J_1 \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.2)$$

Однако глобальной перестройки фазовой плоскости не происходит. При начальных условиях, соответствующих возбуждению одного маятника, полная передача энергии все еще возможна. При совпадении сепаратрисы и ПФТ происходит перестройка фазовой плоскости, полная передача возбуждения с первого маятника на второй уже невозможна. Этот факт может быть использован как критерий «нестационарной» локализации энергии на первом маятнике. Условие совпадения ПФТ и сепаратрисы на фазовой плоскости дает следующее соотношение, связывающее величину параметра связи и амплитуду начального возбуждения:

$$\beta_{loc} = \frac{\left(-1 - J_0(Q) + 2J_0 \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \right)}{(-1 + J_0(Q))}. \quad (4.3)$$

Поскольку ПФТ играет ключевую роль в понимании эволюции фазового пространства, мы рассмотрели ее подробнее в двух случаях — до перехода, соответствующего локализации энергии на одном маятнике, и после перестройки фазовой плоскости. В первом случае амплитуда ПФТ по переменной θ равна $\pi/2$, то есть соответствует полному энергообмену. Такой процесс может быть описан аналитически в негладком базисе (см. рис. 3а). Сам негладкий базис определяется следующим образом: $\tau(t) = \arcsin(\sin(\pi t/2))$, $e(t) = (\sin(\pi t)) / |\sin(\pi t)|$ [32]. Тогда переменная θ в нулевом приближении имеет вид пилообразной функции времени $\tau(\tau_1/a)$, а переменная Δ — ее производная (в терминах теории обобщенных функций) — вид $e(\tau_1/a)$ (см. рис. 3а):

$$\begin{aligned} \theta &= A\tau, \\ \Delta &= \left(\frac{\pi}{2} - B \sin(2A\tau) \right) e. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Параметры решения определяются из условия $\theta|_{\tau=1} = \frac{\pi}{2}$: $A = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{2A}{Q\beta J_1(Q)}$, $B = \frac{aQ(Q - 2J_1(Q))}{16A}$.

Сравнение приближенного аналитического решения и точного, полученного при численном интегрировании уравнений (4.1), представлено на рисунке 3б.

После того как происходит столкновение с сепаратрисой, ПФТ размыкается, ее амплитуда по переменной θ не может превышать значение $\pi/4$. В таком случае аналитическое представление становится другим:

$$\begin{aligned} \theta &= A \sin(\pi\tau) + \dots, \\ \Delta &= \pi \left(\frac{1}{2} - \tau \right) e + \dots \end{aligned}$$

Условия, определяющие амплитуду решения и период, имеют вид $H_{LPT} = H(\Delta = 0, \theta_{\max} = A)$, $a = \frac{2\pi A}{Q\beta J_1(Q)}$. Сравнение аналитического и численного решений представлено на рисунке 3с.

Рис. 3. а) Негладкий базис пилообразной функции и ее производной, б) ПФТ при $\beta = 0.139$, $Q = \pi/2$ в переменных (θ, Δ) и в зависимости обеих переменных от времени, с) ПФТ при $\beta = 0.06$, $Q = \pi/2$ в переменных (θ, Δ) и в зависимости обеих переменных от времени. Зеленым цветом обозначено аналитическое решение, синим — численное решение системы (4.1).

5. Сечения Пуанкаре

Выявленная эволюция фазового пространства подтверждена исследованием сечений Пуанкаре для полной системы (2.1) (Сечения построены для случая $q_2 = 0$, $\frac{dq_2}{dt} > 0$, $Q = \pi/2$.) При относительно больших значениях параметра связи на сечении Пуанкаре (рис. 4а) видны две неподвижные точки, соответствующие в медленном времени ННМ системы, их окружают квазипериодические решения, соответствующие неполному энергообмену между маятниками. Траектория, разделяющая две области квазипериодических решений, соответствует ПФТ. При уменьшении параметра связи, как и в асимптотической системе, происходит бифуркация синфазной моды. Значение параметра связи, при котором она происходит, соответствует выражению (4.2), полученному для асимптотической системы (4.1). При дальнейшем уменьшении параметра связи происходит второй (глобальный)

Рис. 4. Сечения Пуанкаре для системы (2.1) при $Q = \pi/2$ и различных значениях параметра связи: (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.139$, (c) $\beta = 0.0812$, (d) $\beta = 0.06$.

топологический переход от полного энергообмена между маятниками к преимущественной локализации энергии на первоначально возбужденном маятнике. Пороговое значение параметра связи для этого перехода также находится в полном соответствии с полученным для асимптотической системы (4.1) выражением (4.3).

6. Заключение

Представлены результаты исследования системы двух гармонически связанных маятников без ограничений на амплитуды колебаний. Получены аналитические выражения для зависимости частот синфазной и антифазной ННМ от амплитуды начальных условий, демонстрирующие (в отличие от системы линейно связанных маятников) феномен частотной инверсии при достаточно больших амплитудах. Преобразование уравнений движения к угловым переменным позволило рассмотреть эволюцию системы на плоскости при изменении параметра связи. Выявлены условия реализации двух топологических переходов, соответствующие бифуркации одной из ННМ и переходу от полного энергообмена между маятниками к локализации энергии на первоначально возбужденном маятнике. Численный анализ фазового пространства исходной системы, проведенный с использованием сечений Пуанкаре, подтверждает результаты аналитического исследования в главном асимптотическом приближении.

References

- [1] Takeno Sh., Homma Sh. A sine-lattice (sine-form discrete sine-Gordon) equation: one- and two-kink solutions and physical models, *J. Phys. Soc. Japan*, 1986, vol. 55, no. 1, pp. 65–75.
- [2] Yomosa S. Soliton excitations in deoxyribonucleic acid (DNA) double helices, *Phys. Rev. A* (3), 1983, vol. 27, no. 4, pp. 2120–2125.
- [3] Manevitch L. I., Smirnov V. V. Limiting phase trajectories and the origin of energy localization in nonlinear oscillatory chains, *Phys. Rev. E*, 2010, vol. 82, no. 3, 036602, 9 pp.
- [4] Smirnov V. V., Manevich L. I. Limiting phase trajectories and dynamic transitions in nonlinear periodic systems, *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, no. 2, pp. 271–276.
- [5] Bogolubov N. N., Mitropolskiy Yu. A. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*, Moscow: Nauka, 1974 (Russian).
- [6] Malkin I. G. *Theory of stability of motion*, Ann Arbor, Mich.: Univ. of Michigan, 1958.
- [7] Zaslavsky G. M., Sagdeev R. Z. *Introduction to nonlinear physics: From the pendulum to turbulence and chaos*, Moscow: Nauka, 1988 (Russian).
- [8] Hale J. K. *Oscillations in nonlinear system*, New York: McGraw-Hill, 1963.
- [9] Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. *Oscillations and waves in linear and nonlinear systems*, Dordrecht: Kluwer, 1989.
- [10] Toda M. Studies of a non-linear lattice, *Phys. Rep.*, 1975, vol. 18C, no. 1, pp. 1–123.
- [11] Braun O. M., Kivshar Yu. *The Frenkel–Kontorova model: Concepts, methods, and applications*, Berlin: Springer, 2004.
- [12] Manevich L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N. *The method of normal oscillations for essentially nonlinear systems*, Moscow: Nauka, 1989 (Russian).
- [13] *Normal modes and localization in nonlinear systems*, A. F. Vakakis (Ed.), Dordrecht: Springer, 2001.
- [14] Barabanov I. N., Tkhai V. N. Oscillation family in weakly coupled identical systems, *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 4, pp. 561–568; see also: *Avtomat. i Telemekh.*, 2016, no. 4, pp. 14–23.
- [15] Tkhai V. N. Oscillations in the autonomous model containing coupled subsystems, *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 1, pp. 64–71; see also: *Avtomat. i Telemekh.*, 2015, no. 1, pp. 81–90.
- [16] Barabanov I. N., Tureshbaev A. T., Tkhai V. N. Basic oscillation mode in the coupled-subsystems model, *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 12, pp. 2112–2123; see also: *Avtomat. i Telemekh.*, 2014, no. 12, pp. 28–41.
- [17] Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Phase dynamics of periodically driven quasiperiodic self-vibrating oscillators, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 18, no. 4, pp. 17–32 (Russian).
- [18] Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the chain of phase oscillators, *Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 6, no. 4, pp. 693–717 (Russian).
- [19] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sedova Yu. V. Pendulum system with an infinite number of equilibrium states and quasiperiodic dynamics, *Nelin. Dinam.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 223–234 (Russian).
- [20] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, New York: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [21] Markeev A. P. A motion of connected pendulums, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 27–38 (Russian).
- [22] Markeev A. P. Nonlinear oscillations of sympathetic pendulums, *Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 6, no. 3, pp. 605–621 (Russian).
- [23] Markeev A. P. On the stability of nonlinear vibrations of coupled pendulums, *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 4, pp. 370–379; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2013, no. 4, pp. 20–30.
- [24] Manevitch L. I. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains, *Arch. Appl. Mech.*, 2007, vol. 77, no. 5, pp. 301–312.

- [25] Kovaleva A., Manevitch L. I., Manevitch E. L. Intense energy transfer and superharmonic resonance in a system of two coupled oscillators, *Phys. Rev. E*, 2010, vol. 81, no. 5, 056215, 12 pp.
- [26] Kovaleva A., Manevitch L. I. Limiting phase trajectories and emergence of autoresonance in nonlinear oscillators, *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, no. 2, 024901, 10 pp.
- [27] Manevitch L. I., Smirnov V. V. Resonant energy exchange in nonlinear oscillatory chains and limiting phase trajectories: From small to large systems, in *Advanced nonlinear strategies for vibration mitigation and system identification*, A. F. Vakakis (Ed.), CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol. 518, Berlin: Springer, 2010, pp. 207–258.
- [28] Manevitch L. I., Kovaleva A., Manevitch E. L., Shepelev D. S. Limiting phase trajectories and non-stationary resonance oscillations of the Duffing oscillator: 1. A non-dissipative oscillator, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 1089–1097.
- [29] Manevitch L. I., Kovaleva A., Manevitch E. L., Shepelev D. S. Limiting phase trajectories and non-stationary resonance oscillations of the Duffing oscillator: 2. A dissipative oscillator, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 1098–1105.
- [30] Manevitch L. I., Smirnov V. V. Semi-inverse method in nonlinear dynamics, in *Proc. of the 5th Internat. Conf. Nonlinear Dynamics (Kharkov, 2016)*, Kharkov: NTU KhPI, 2016, pp. 28–37.
- [31] Manevitch L. I., Romeo F. Non-stationary resonance dynamics of weakly coupled pendula, *Europhys. Lett.*, 2015, vol. 112, no. 3, 30005, 6 pp.
- [32] Pilipchuk V. N. *Nonlinear dynamics: Between linear and impact limits*, Lect. Notes Appl. Comp. Mech., vol. 52, Berlin: Springer, 2010.

Stationary and nonstationary dynamics of the system of two harmonically coupled pendulums

Margarita A. Kovaleva¹, Valery V. Smirnov², Leonid I. Manevich³

^{1,2,3} N. N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences

Kosygina st. 4, Moscow, 117977, Russia

¹makovaleva@chph.ras.ru, ²vvs@polymer.chph.ras.ru, ³manevitchleonid3@gmail.com

An analysis is presented of the nonlinear dynamics of harmonically coupled pendulums without restrictions to oscillation amplitudes. This is a basic model in many areas of mechanics and physics (paraffin crystals, DNA molecules etc.). Stationary solutions of equations of motion corresponding to nonlinear normal modes (NNMs) are obtained. The inversion of the NNM frequencies with increasing oscillation amplitude is found. An essentially nonstationary process of the resonant energy exchange is described in terms of limiting phase trajectories (LPTs), for which an effective analytic representation is obtained in slow time-scale. Explicit expressions of threshold values of dimensionless parameters are found which correspond to the instability of NNMs and to the transition (in parametric space) from the full energy exchange between the pendulums to the localization of energy. The analytic results obtained are verified by analysis of the Poincaré sections describing evolution of the initial system.

MSC 2010: 70K43, 37E99

Keywords: essentially nonlinear systems, coupled pendulums, nonlinear normal modes, limiting phase trajectories

Received October 31, 2016, accepted January 28, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 105–115 (Russian)