Новый интеграл в неголономной задаче Пенлеве—Чаплыгина*

А. А. Килин

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: aka@ics.org.ru

Получено 3 мая 2006 г.

В работе найден новый интеграл в задаче о качении тяжелого симметричного шара по поверхности параболоида. Этот интеграл используется в работе для исследования устойчивости по Ляпунову простейших стационарных вращений.

Ключевые слова: динамическая система, неголономная связь, интеграл, периодическое решение, устойчивость по Ляпунову

A. A. Kilin

New integral in nonholonomic Painlevé–Chaplygin problem

In the paper we present a new integral of motion in the problem of rolling motion of a heavy symmetric sphere on the surface of a paraboloid. We use this integral to study the Lyapunov stability of some trivial steady rotations.

Keywords: dynamical system, non-holonomic constraint, integral, periodic solution, Lyapunov stability

Mathematical Subject Classifications: 34A34, 34C14, 34D20

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (05–01–01058) и CRDF (грант RU-M1-2583-M0-04).

В этой работе мы рассмотрим задачу о качении тяжелого полностью динамически симметричного шара (с шаровым центральным тензором инерции) по поверхности, причем центр шара движется по несимметричному параболоиду. Силу тяжести будем предполагать направленной вдоль оси параболоида. В дальнейшем повсюду под качением мы будем понимать классическую неголономную модель взаимодействия твердого тела с поверхностью, в которой предполагается, что имеется полное сцепление в точке контакта, мгновенная скорость которой равна нулю. В этом случае уравнения движения сохраняют интеграл энергии и они могут служить наиболее простой моделью для описания взаимодействия твердого тела с поверхностью. Как показал Э. Раус в своем знаменитом трактате [2], задача о качении шара по произвольной поверхности вращения даже при наличии осесимметричных потенциальных полей является интегрируемой. В общем случае качения шара по несимметричным поверхностям задача становится неинтегрируемой и для ее интегрируемости не хватает двух дополнительных интегралов. В дальнейшем мы будем говорить о качении по поверхности, подразумевая что по этой поверхности движется центр масс шара. Как показано в работе [1], в случае качения шара по несимметричным поверхностям второго порядка в отсутствии внешних сил существует дополнительный интеграл движения, позволяющий значительно упростить исследование динамики. В работе [4] данный интеграл был обобщен на случай качения шара по трехосному эллипсоиду во внешнем потенциальном поле специального вида.

Как известно задача о движении тяжелой материальной точки по поверхности трехосного параболоида рассматривалась П. Пенлеве и С. А. Чаплыгиным [3]. (Пенлеве нашел первый интеграл, Чаплыгин получил разделение переменных и качественно исследовал движение.) Мы здесь рассматриваем задачу, связанную не с движением материальной точки, а с качением шара конечного радиуса по параболоиду в поле тяжести. Эту проблему мы и назовем неголономной задачей Пенлеве–Чаплыгина. В отличие от классической задачи о движении материальной точки она в общем случае не является интегрируемой.

1. Уравнения движения шара по поверхности

В отличие от традиционного в динамике твердого тела подхода, при котором используется жестко связанная с телом система координат, при изучении движения однородного шара удобнее записывать уравнения движения в неподвижной системе координат. В этой системе уравнения изменения импульса и момента импульса относительно центра масс шара с учетом реакции и внешних сил имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})' = \mathbf{a} \times \mathbf{N} + \mathbf{M}_F, \quad (1.1)$$

а условие отсутствия проскальзывания (скорость точки контакта равна нулю) —

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь m — масса шара, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ — скорость его центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$ — (шаровой) центральный тензор инерции, $\mathbf{a}$ — вектор из центра масс в точку контакта, R — радиус шара, $\mathbf{N}$ — реакция в точке контакта (см. рис. 1), $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}_F$ — внешняя сила и момент сил относительно точки контакта соответственно. В случае потенциальных сил момент $\mathbf{M}_F$ выражается через потенциал $U(\mathbf{x})$, зависящий от положения центра масс шара, по формуле $\mathbf{M}_F = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{a}$.

Исключая из этих уравнений реакцию $\mathbf{N}$ и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта на поверхности и на шаре, получаем систему шести уравнений, описывающую динамику вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и координат центра масс шара $\mathbf{x}$

$$(\mu + mR^2)\dot{\boldsymbol{\omega}} = mR^2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{M}_F, \quad \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{\gamma}. \quad (1.3)$$

Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ здесь определяет нормаль к поверхности в точке контакта и задается соотношением

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\nabla\Phi(\mathbf{x})}{|\nabla\Phi(\mathbf{x})|}, \quad (1.4)$$

где, следуя Раусу, уравнение $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ задает поверхность по которой движется центр масс шара. Данная поверхность является эквидистантной к поверхности, по которой движется точка контакта.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [1] для исследования качения шара по поверхностям второго порядка используются вектор кинетического момента $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Однако используемые нами переменные $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{x}$ более удобны для обобщения полученного в [1] интеграла на рассматриваемый случай движения в поле тяжести.

2. Интегралы движения и мера

Уравнения (1.3) в случае потенциального поля с потенциалом $U(\mathbf{x})$ обладают интегралом энергии и очевидным геометрическим интегралом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{x}), \quad \Phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.1)$$

Помимо этих двух интегралов в случае произвольной поверхности система обладает инвариантной мерой с плотностью

$$\rho(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}) = |\nabla\Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Кроме этих двух интегралов и меры в случае произвольной поверхности $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ система (1.3) не обладает двумя дополнительными интегралами, необходимыми для интегрируемости по теории последнего множителя (теории Эйлера–Якоби). В общем случае ее поведение является хаотическим [1].

Рассмотрим подробнее динамику шара в поле тяжести при условии, что его центр масс движется по несимметричному параболоиду, задаваемому уравнением

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{x}) - 2x_3 = 0, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{B} = \text{diag}(1/p, 1/q, 0)$, а p и q — главные радиусы кривизны параболоида.

Как показано в [1], в отсутствии внешних сил уравнения (1.3) с учетом (2.3) обладают дополнительным интегралом

$$F = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}))|\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2. \quad (2.4)$$

Рис. 1. Качение шара по поверхности (G — центр масс, Q — точка контакта с поверхностью)

Оказывается, при добавлении силы тяжести ($U(\mathbf{x}) = mgx_3$), интеграл (2.4) допускает следующее обобщение

$$F = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega})) |\nabla \Phi(\mathbf{x})|^2 - \frac{4mg}{\mu + mR^2} (\mathbf{x}, \mathbf{B}^2 \mathbf{x}). \quad (2.5)$$

3. Частные решения

Уравнения (1.3) допускают частное решение вида

$$\mathbf{x} = (0, 0, 0), \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \Omega). \quad (3.1)$$

В зависимости от знаков p и q данное решение описывает вращение шара в чаше ($p > 0$ и $q > 0$), вращение шара на вершине параболоида ($p < 0$ и $q < 0$) и вращение шара в седловой точке гиперболического параболоида ($pq < 0$).

Рассмотрим вопрос об устойчивости данного решения в линейном приближении (он был впервые рассмотрен Э. Раусом [2]). Линеаризованные уравнения движения вблизи решения (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \delta \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \frac{D\Omega R}{(\mu + D)p} + x_2 \frac{R}{(\mu + D)q} (D\Omega^2/p - mg), \\ \delta \dot{\omega}_2 &= -\omega_1 \frac{D\Omega R}{(\mu + D)q} - x_2 \frac{R}{(\mu + D)p} (D\Omega^2/q - mg), \\ \delta \dot{x}_1 &= -R(x_2\Omega/q + \omega_2), \quad \delta \dot{x}_2 = R(x_1\Omega/p + \omega_2), \quad \delta \dot{x}_3 = 0, \quad \delta \dot{\omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 P_4(\lambda) &= 0, \\ P_4(\lambda) &= \lambda^4 + \frac{R^2 (mg(\mu + D)(q + p) + \mu^2 \Omega^2)}{pq(\mu + D)^2} \lambda^2 + \frac{m^2 g^2 R^4}{pq(\mu + D)^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Два нулевых собственных числа соответствуют интегралам движения. Для того чтобы в линейном приближении решение (3.1) было устойчивым, необходимо чтобы оставшиеся четыре собственных числа обладали неположительной действительной частью. Поскольку $P_4(\lambda)$ — в данном случае биквадратный полином, то это условие соответствует тому, что все его корни чисто мнимые.

1. $p > 0$ и $q > 0$ (вращение шара в чаше). В этом случае все корни полинома $P_4(\lambda)$ заведомо чисто мнимые, следовательно вращение шара внутри чаши является устойчивым в линейном приближении при любых угловых скоростях.
2. $p < 0$ и $q < 0$ (вращение шара на вершине параболоида). В этом случае условие линейной устойчивости принимает вид [2]

$$\mu^2 \Omega^2 > mg(\mu + D)(\sqrt{|p|} + \sqrt{|q|})^2. \quad (3.4)$$

Таким образом, при достаточно больших угловых скоростях, вращение шара на вершине параболоида является устойчивым в линейном приближении (так называемая гироскопическая стабилизация).

3. $pq < 0$ (вращение шара в седловой точке гиперболического параболоида). Свободный член полинома $P_4(\lambda)$ отрицательный, следовательно вращение шара в седловой точке гиперболического параболоида является неустойчивым в линейном приближении.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости решений (3.1) по Ляпунову в полной нелинейной постановке. Неустойчивость в линейном приближении влечет за собой неустойчивость по Ляпунову, поэтому нам остается рассмотреть два случая.

1. $p > 0$ и $q > 0$.

Докажем сначала устойчивость вращений (3.1) относительно переменных $\nu = (\omega_1, \omega_2, x_1, x_2)$. Для этого в качестве функции Ляпунова выберем квадратичную часть интеграла (2.5) при разложении его в ряд вблизи решения (3.1)

$$F_2 = (\nu, \mathbf{L}\nu), \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{8}{q} & 0 & \frac{8\Omega}{pq} & 0 \\ 0 & \frac{8}{p} & 0 & \frac{8\Omega}{pq} \\ \frac{8\Omega}{pq} & 0 & \frac{8\Omega^2}{qp^2} + \frac{8mg}{p^2(\mu + D)} & 0 \\ 0 & \frac{8\Omega}{pq} & 0 & \frac{8\Omega^2}{pq^2} + \frac{8mg}{q^2(\mu + D)} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Для положительной определенности функции F_2 необходимо выполнение следующих неравенств

$$q > 0, \quad pq > 0, \quad p^3q > 0, \quad p^3q^3 > 0. \quad (3.6)$$

В рассматриваемом случае $p > 0, q > 0$ функция (3.5) является положительно определенной. Таким образом, по теореме Ляпунова вращения (3.1) устойчивы относительно переменных $(\omega_1, \omega_2, x_1, x_2)$.

Из ограниченности движений вблизи решения (3.1) относительно переменных $(\omega_1, \omega_2, x_1, x_2)$ и законов сохранения первых интегралов движения H и Φ следует ограниченность движений по всем шести переменным $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$. Следовательно при вращении шара внутри параболоида решения (3.1) устойчивы по Ляпунову в полной нелинейной постановке.

2. $p < 0$ и $q < 0$ при условии, что выполнено неравенство (3.4).

В данном случае неравенства (3.6) не выполняются, а квадратичная часть (3.5) не является ни положительно ни отрицательно определенной. Таким образом, функцию F_2 нельзя использовать в качестве функции Ляпунова и задача о нелинейной устойчивости остается открытой. Для ее решения необходимо применить методы, связанные с анализом нормальной формы и КАМ теорией. Полное исследование этой задачи пока не выполнено.

Автор благодарен А. В. Борисову и И. С. Мамаеву за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. *Новый интеграл в задаче о качении шара по произвольному эллипсоиду* // Доклады РАН, 2002, т. 385, № 3, с. 338–341.

- [2] Раус Э. *Динамика системы твердых тел*, т. II. М., 1983. 544 стр. Пер. с англ.: Routh E. *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Dover Publications, New York, 1960.
- [3] Чаплыгин С. А. *О параболоидном маятнике*. Собр. соч., т. I, 1948, с. 102–109.
- [4] Mamaev I. S. *New cases when the invariant measure and first integrals exist in the problem of a body rolling on a surface* // Reg. & Chaot. Dyn., 2003, Vol. 8, № 3, p. 331–335.