ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70K05

**Об одном конструктивном методе поиска
ротационных и автоколебательных режимов
в автономных динамических системах**

Л. А. Климина, Б. Я. Локшин

Рассматривается автономная динамическая система с одной степенью свободы с цилиндрической фазовой поверхностью, близкая к гамильтоновой. Математическая модель системы сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, которое содержит слагаемые, отвечающие неконсервативным силам. Коэффициент α при таких слагаемых считается малым параметром модели.

В первой части работы дополнительно предполагается, что одно из упомянутых слагаемых отвечает диссипативным либо антидиссипативным силам, причем коэффициент b при этом слагаемом является варьируемым параметром модели. На основе метода Пуанкаре – Понтрягина описаны свойства бифуркационной диаграммы, характеризующей периодические траектории системы в зависимости от параметра b при достаточно малых значениях α .

Во второй части работы рассматривается система с неконсервативными силами общего вида, то есть снято ограничение, наложенное в первой части. Построение двух вспомогательных систем специального вида и применение для них результатов, полученных в первой части работы, позволило вывести необходимые условия существования периодических траекторий в исходной системе общего вида при достаточно малых значениях α .

В третьей части обсуждается пример исследования периодических траекторий конкретной системы, которая при нулевом значении малого параметра совпадает с гамильтоновой

Получено 3 сентября 2016 года
После доработки 23 декабря 2016 года

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 14-08-01130, 15-01-06970, 16-31-00374.

Климина Любовь Александровна
klimina@imec.msu.ru
Локшин Борис Яковлевич
blokshin@imec.msu.ru
НИИ механики МГУ
119192, Россия, г. Москва, Мичуринский пр., д. 1

системой H_0 . Доказано существование периодических траекторий, которые не удовлетворяют достаточным условиям Пуанкаре–Понтрягина возникновения периодических траекторий из траекторий порождающей системы H_0 .

Ключевые слова: автономная динамическая система, метод Пуанкаре–Понтрягина, достаточные условия существования периодических траекторий, бифуркационная диаграмма, необходимые условия существования периодических траекторий

Введение

Известен классический метод Пуанкаре–Понтрягина [3–5, 7, 11, 12], с помощью которого производится поиск периодических траекторий системы, близкой к гамильтоновой. Метод активно применяется в современных исследованиях динамических систем [1, 2, 8–10]. Метод позволяет среди множества всех траекторий гамильтоновой системы выделить одну или несколько траекторий, порождающих периодические траектории в исходной неконсервативной системе. Траектории гамильтоновой системы однозначно (не обязательно взаимно однозначно) задаются значением параметра, назовем его h , характеризующим значение механической энергии системы. Метод Пуанкаре–Понтрягина формулирует достаточное условие, при выполнении которого соответствующая траектория гамильтоновой системы будет порождающей. Это достаточное условие имеет вид уравнения, содержащего интеграл, в котором искомое значение параметра h входит достаточно сложным образом в подынтегральную функцию. Поиск корней такого уравнения бывает весьма трудоемким, особенно при наличии нескольких решений [3, 5].

В работе [4] В. И. Арнольд проводит обзор значимых результатов, полученных Пуанкаре, конкретизируя место теории Пуанкаре–Понтрягина–Андропова в общей теории бифуркаций. При этом сделан акцент на фундаментальной проблеме оценки числа периодических траекторий в системах, близких к гамильтоновым.

Известны примеры [7], когда не для всех периодических траекторий системы, близкой к некоторой гамильтоновой системе H , выполнены достаточные условия теоремы Пуанкаре–Понтрягина о возникновении периодических траекторий из траекторий системы H . Последнее обстоятельство усиливает актуальность вопроса о формулировке необходимых условий существования периодических траекторий в автономных системах, близких к гамильтоновым. Отметим, что для случая близких к гамильтоновым *неавтономных* систем, а также для некоторых автономных систем частного вида необходимые условия существования периодических траекторий содержатся в [5, 7]. В частности, в [5] даны необходимые условия существования 2π -периодической траектории автономной системы на цилиндре. В [13] получены необходимые условия существования периодических траекторий частного вида для случая автономной системы произвольной размерности. В [3] выведены необходимые условия возникновения периодической траектории из «неособой» траектории автономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Однако вопрос о необходимых условиях существования периодической траектории общего вида в произвольной *автономной* динамической системе, близкой к гамильтоновой, был оставлен открытым.

В настоящей работе рассматривается автономная динамическая система с цилиндрическим фазовым пространством, близкая к гамильтоновой. Математическая модель системы сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, которое содержит слагаемые, отвечающие неконсервативным силам.

В первой части работы дополнительно предполагается, что хотя бы одно из упомянутых слагаемых отвечает диссипативным либо антидиссипативным силам, коэффициент при этом слагаемом является варьируемым параметром модели. Предлагается конструктивный подход для поиска периодических траекторий исходной системы с использованием метода Пуанкаре – Понтрягина, позволяющий построить бифуркационные диаграммы периодических траекторий в зависимости от варьируемого параметра, избегая решения дифференциальных/интегральных уравнений. С этой целью проводится параметризация бифуркационной диаграммы параметром h .

Во второй части полученные результаты о свойствах периодических траекторий распространяются на общий случай (снимается предположение о специальном виде неконсервативных сил). Приводится альтернативное (по отношению к [3]) доказательство теоремы о необходимых условиях существования периодических траекторий в близкой к гамильтоновой произвольной автономной системе с одной степенью свободы.

В третьей части рассмотрен пример, иллюстрирующий возможности применения предложенного конструктивного метода и полученных необходимых условий для детального исследования периодических траекторий одной конкретной динамической системы.

1. Периодические траектории в случае специального вида неконсервативных сил

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы с угловой обобщенной координатой φ , близкую к гамильтоновой. Уравнения движения такой системы можно представить в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \varphi} + \alpha Q(\varphi, p),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где

$$Q(\varphi, p; b) = F(\varphi, p) - bf(\varphi, p).\tag{1.2}$$

Здесь p — обобщенный импульс, $H_0 = \frac{p^2}{2k(\varphi)} + u(\varphi)$; $k(\varphi) > 0$ и $u(\varphi) \geq 0$ — безразмерные 2π -периодические функции угла φ , такие, что кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид $T = 0.5a_1k(\varphi)\dot{\varphi}^2$ и $U = a_2u(\varphi)$, где a_1, a_2 — некоторые положительные коэффициенты. Поскольку потенциальная энергия определена с точностью до константы, будем считать, что глобальный минимум функции $u(\varphi)$ равен нулю. Начало отсчета угла φ выберем так, чтобы $u(0) = \max(u(\varphi))$ (глобальный). Безразмерное время τ определяется соотношением $\tau = t\sqrt{a_2/a_1}$. Безразмерная обобщенная неконсервативная сила описывается функцией $Q(\varphi, p; b)$, имеющей вид (1.2), и *положительным малым параметром* α, b — некоторый параметр, от которого функции $F(\varphi, p)$ и $f(\varphi, p)$ не зависят. Функция $f(\varphi, p)$ обладает следующим свойством: $pf(\varphi, p) > 0$. В зависимости от конкретной задачи может, в частности, оказаться, что физическим смыслом обладает только нулевое значение параметра b . Отметим, что при моделировании систем преобразования энергии потока в электрическую энергию такой вид обобщенной силы возникает естественным образом [6, 8].

Все функции, стоящие в правой части (1.1), суть аналитические и 2π -периодические по φ . Фазовое пространство системы (1.1) является цилиндрическим.

Представляет интерес проследить эволюцию периодических траекторий при изменении параметра b . Для этого построим бифуркационную диаграмму, характеризующую периодические траектории системы (1.1) в зависимости от параметра b .

При этом будем рассматривать все периодические траектории системы (1.1): и 2π -периодические траектории, которым отвечают замкнутые фазовые траектории, охватывающие фазовый цилиндр, и циклы, которым отвечают замкнутые фазовые траектории, целиком расположенные на развертке фазового цилиндра, и период которых заранее неизвестен. Первый тип траекторий описывает ротационный режим движения исходной колебательной системы, второй — автоколебательный.

Зафиксируем значение φ_0 . В качестве характеристики периодической траектории $\tilde{p}(\varphi)$, пересекающей прямую $\varphi = \varphi_0$, будем использовать значение $\tilde{p}(\varphi_0)$. От выбора φ_0 будет зависеть, какие именно из периодических траекторий будут отражены на бифуркационной диаграмме. Для описания всех периодических траекторий потребуется, возможно, рассмотреть несколько различных значений величины φ_0 . Далее будем предполагать, что речь идет о 2π -периодических траекториях, расположенных в верхней половине фазового цилиндра (для нижней половины можно провести полностью аналогичные рассуждения), а циклы будем характеризовать их пересечениями с линией $\varphi = \varphi_0$ в верхней половине фазового цилиндра. Отметим, что при поиске 2π -периодических траекторий, в отличие от циклов, выбор φ_0 не существен.

Таким образом, задача заключается в построении бифуркационной диаграммы вида $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$, $\tilde{p}(\varphi_0) > 0$. Будем строить эту диаграмму на плоскости переменных b и $\tilde{p}(\varphi_0)$.

1.2. Некоторые общие свойства бифуркационной диаграммы периодических траекторий

Из теорем о единственности и непрерывной зависимости решений от параметра следует:

Утверждение 1. Если при некотором значении параметра b у системы (1.1) существует периодическая траектория с некоторым значением $\tilde{p}(\varphi_0) = p_0$, то ни при каком другом значении b не существует периодической траектории с тем же значением $\tilde{p}(\varphi_0) = p_0$.

Утверждение 2. На диаграмме $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ параметр b представляет собой однозначную функцию от $\tilde{p}(\varphi_0) = p_0$, то есть $b = b(p_0)$ (обратное, вообще говоря, неверно). (Следствие утверждения 1.)

1.3. Построение бифуркационной диаграммы при $\alpha \rightarrow 0$

Пусть $z(h, \varphi) = \sqrt{2(h - u(\varphi))k(\varphi)}$ — траектория системы (1.1) при $\alpha = 0$, $H_0(\varphi, p) = h$. Далее в силу определения функции $u(\varphi)$ предполагаем, что $h \geq 0$.

Обозначим: $Q_h = Q_h(\varphi) = Q(\varphi, z(h, \varphi))$.

В дальнейшем для краткости систему с гамильтонианом H будем называть системой H . Зафиксируем $\varphi = \varphi_0$.

Введем обозначения для множеств, соответствующих специальным значениям h .

Определение 1. Пусть $E = \{h: h = u(\varphi_0)\}$, если $z(u(\varphi_0), \varphi_0)$ — положение равновесия системы H_0 (возможно, неизолированное); в противном случае $E = \emptyset$.

Определение 2. Пусть S — множество значений h , соответствующих сепаратрисам системы H_0 , пересекающим прямую $\varphi = \varphi_0$; $S = \emptyset$, если $u(\varphi) \equiv 0$.

Отметим, что множества E и S зависят только от вида функции $u(\varphi)$ и не зависят от функций $k(\varphi)$, $Q(\varphi, p; b)$. Рисунок 1 иллюстрирует пример определения этих множеств.

Рис. 1. Примеры множеств E и S .

Определим порождающую функцию $I(h)$ Пуанкаре–Понтрягина (в соответствии с [3, 5, 11, 12]) для $h \notin \{E \cup S\}$:

- $I(h) = \int_0^{2\pi} Q_h(\varphi) d\varphi$ — если $h > \max(u(\varphi)) = H_0(0, 0)$ (отвечает 2π -периодическим траекториям системы H_0);
- $I(h) = \int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} Q_h(\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_2(h)}^{\varphi_1(h)} Q(\varphi, -z(h, \varphi)) d\varphi$ — если $h \in [u(\varphi_0), \max(u(\varphi))] \setminus \{E \cup S\}$ (отвечает циклам системы H_0).

Здесь $\varphi_1(h)$, $\varphi_2(h)$ — корни уравнения $h - u(\varphi) = 0$, такие, что $\varphi_0 \in [\varphi_1, \varphi_2]$ и $h - u(\varphi) > 0$ при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Иллюстративный пример влияния значения φ_0 на выбор $\varphi_1(h)$, $\varphi_2(h)$ приведен на рисунке 2.

Для системы (1.1) выполнены все условия теоремы Пуанкаре–Понтрягина. Для удобства дальнейшего изложения приведем соответствующее утверждение:

Утверждение 3 ([3, 5, 11, 12]). Если для некоторого $h = \chi > 0$ интеграл $I(\chi)$ равен нулю, а его производная по параметру h ненулевая, то существует $\delta_0 > 0$, такое, что для любого $\delta < \delta_0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, такое, что при $\alpha < \varepsilon$ у системы (1.1) в δ -окрестности кривой $z(\chi, \varphi)$ существует единственная периодическая траектория $\tilde{p}_\chi(\varphi)$, причем $\tilde{p}_\chi(\varphi)$ является грубой траекторией и стремится к кривой $z(\chi, \varphi)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Более того, при $\frac{dI(h)}{dh} \Big|_{h=\chi} < 0$ траектория $\tilde{p}_\chi(\varphi)$ притягивающая, а при

$\frac{dI(h)}{dh} \Big|_{h=\chi} > 0$ траектория $\tilde{p}_\chi(\varphi)$ отталкивающая.

Как правило, определить h из условия $I(h) = 0$ (и тем самым найти порождающую траекторию) в явном виде не удастся. Для того чтобы сделать более конструктивной процедуру

поиска периодической траектории, будем рассматривать уравнение $I(h) = 0$ при каждом h как уравнение относительно параметра b , из которого требуется найти $b = \tilde{b}(h)$, такое, что именно траектория, соответствующая уровню энергии h , будет порождающей.

Рис. 2. Пример: выбор φ_1, φ_2 при наличии двух локальных максимумов $u(\varphi)$.

Искомое значение параметра $b = \tilde{b}(h)$ определяется по формуле

$$\tilde{b}(h) = \frac{\int_0^{2\pi} F(\varphi, z(h, \varphi)) d\varphi}{\int_0^{2\pi} f(\varphi, z(h, \varphi)) d\varphi}$$

при $h > \max(u(\varphi))$ (для 2π -периодических траекторий),

$$\tilde{b}(h) = \frac{\int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} F(\varphi, z(h, \varphi)) d\varphi + \int_{\varphi_2(h)}^{\varphi_1(h)} F(\varphi, -z(h, \varphi)) d\varphi}{\int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} f(\varphi, z(h, \varphi)) d\varphi + \int_{\varphi_2(h)}^{\varphi_1(h)} f(\varphi, -z(h, \varphi)) d\varphi}$$

при $h \in [u(\varphi_0), \max(u(\varphi))] \setminus \{E \cup S\}$.

Определение 3. Пусть M — множество значений $h \notin \{E \cup S\}$, для которых

$$\left. \frac{dI(h)}{dh} \right|_{b=\tilde{b}(h)} = 0.$$

Легко показать, что множество M отвечает локальным экстремумам функции $\tilde{b}(h)$.

Отметим, что функция $k(\varphi)$ не влияет на то, каковы множества E и S , однако может повлиять на множество M .

Для $h \notin \{E \cup S \cup M\}$ определим теперь предельное значение $\tilde{p}(\varphi_0)$ при $\alpha \rightarrow 0$ как функцию от h :

$$\tilde{p}(\varphi_0) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} p_0(h) = z(h, \varphi_0) = \sqrt{2(h - u(\varphi_0))k(\varphi_0)}. \quad (1.4)$$

Следствие 1 (из утверждения 3). При $\left. \frac{dp_0}{db} \right|_{b=\tilde{b}(h)} < 0$ соответствующая траектория $\tilde{p}_h(\varphi)$ притягивающая, а при $\left. \frac{dp_0}{db} \right|_{b=\tilde{b}(h)} > 0$ траектория $\tilde{p}_h(\varphi)$ отталкивающая, поскольку знак выражения $\left. \frac{dp_0}{db} \right|_{b=\tilde{b}(h)}$ совпадает со знаком $\left. \frac{dI}{dh} \right|_{b=\tilde{b}(h)}$.

Метод Пуанкаре–Понтрягина дает достаточные условия возникновения периодических траекторий. Таким образом, для произвольного φ_0 при $\alpha \rightarrow 0$ мы получили ветвь предельной бифуркационной диаграммы $\{b, p_0\}$, где $b = \tilde{b}(h)$, $p_0 = z(h, \varphi_0)$ определяются по формулам (1.3), (1.4). Однако возможно, что при этом же значении φ_0 существуют и другие ветви.

Формулы (1.3), (1.4) позволяют применить метод Пуанкаре–Понтрягина, не решая интегральных уравнений относительно уровня h энергии порождающей системы.

1.4. О наличии других ветвей бифуркационной диаграммы при $\alpha \rightarrow 0$

Представляет особый интерес определить, возможно ли при заданном φ_0 наличие других ветвей диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ при сколь угодно малом α , помимо ветвей, определяемых формулами (1.3), (1.4). Проблема установления такой возможности непосредственно связана с вопросом о необходимости (а не только достаточности) выполнения условий утверждения 3 для существования периодических траекторий при сколь угодно малом α . Для ответа на этот вопрос докажем соответствующее утверждение.

Определение 4. Пусть Z^E , Z^S , Z^M — множества значений $z(h, \varphi_0)$, отвечающих значениям h из множеств E , S , M соответственно.

Определение 5. Пусть $\Upsilon(\mu, \delta)$ — область на плоскости $\{b, p\}$, состоящая из μ -окрестности прямых $p = z$, где $z \in \{Z^E \cup Z^S \cup Z^M\}$, и δ -окрестности построенной выше кривой $\{b, p_0\}$, где $b = \tilde{b}(h)$, $p_0 = z(h, \varphi_0)$.

Утверждение 4. Для любого сколь угодно малого $\mu > 0$ и сколь угодно большого P существуют $\delta = \delta(\mu, P) > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, такие, что при всех $p < P$ и $\alpha < \varepsilon$ бифуркационная диаграмма $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ системы (1.1) не имеет ни одной точки, лежащей вне области $\Upsilon(\mu, \delta)$. При этом, по крайней мере вне μ -окрестности прямых $p = z \in \{Z^E \cup Z^S \cup Z^M\}$, бифуркационная диаграмма $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ представлена непрерывными кривыми, каждая точка которых отвечает грубой траектории.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[p_1, p_2]$, не содержащий ни одной точки из $\{Z^E \cup Z^S \cup Z^M\}$. В силу формул (1.3), (1.4) $\tilde{b}$ зависит от величины $p_0 = z(h, \varphi_0)$

однозначно и непрерывно. Множество значений b , соответствующее отрезку $p_0 \in [p_1, p_2]$, образует отрезок $[b_1, b_2]$.

В силу утверждения 3 для произвольного $b \in [b_1, b_2]$ существует $\delta_0(b) > 0$, такое, что для любого $\delta < \delta_0(b)$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, такое, что при $\alpha < \varepsilon$ у системы (1.1) в δ -окрестности кривой $z(h, \varphi)$ (где h — то значение, для которого $b = \tilde{b}(h)$) существует единственная, причем грубая, периодическая траектория. В силу грубости таких траекторий для всех $b \in [b_1, b_2]$ можно подобрать зависимость $\delta_0(b)$ так, чтобы она была непрерывна по b .

В силу непрерывности функции $\delta_0(b)$ и компактности множества $b \in [b_1, b_2]$ существуют не зависящие от b значения $\delta_1 > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta_1) > 0$, такие, что при всех $\alpha < \varepsilon$ для каждого $b \in [b_1, b_2]$ существует ровно одна грубая периодическая траектория с $\tilde{p}(\varphi_0)$, такая, что $|\tilde{p}(\varphi_0) - z(h, \varphi_0)| < \delta_1$, где h — это та величина, для которой $b = \tilde{b}(h)$.

Обозначим: Δ_1 — δ_1 -окрестность при $b \in [b_1, b_2]$ предельной бифуркационной диаграммы $\{b, p_0\}$, где $b = \tilde{b}(h)$, а $p_0 = z(h, \varphi_0)$.

Следовательно, при $\alpha < \varepsilon = \varepsilon(\delta_1)$ для каждого $b \in [b_1, b_2]$ ровно одна точка на бифуркационной диаграмме $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ лежит в области Δ_1 . Таким образом, при $b \in [b_1, b_2]$ и $\alpha < \varepsilon$ в области Δ_1 существует (притом единственная) ветвь бифуркационной диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$. Эта ветвь не имеет разрывов в Δ_1 , поскольку каждая ее точка отвечает грубой траектории (утверждение 3). Эта ветвь не может пересечь верхнюю/нижнюю границу области Δ_1 . Действительно, предположим, что при некотором $b^* \in [b_1, b_2]$ на этой ветви достигнуто равенство $|\tilde{p}(\varphi_0) - p_0| = \delta_1$. При этом для $b = b^*$ должно существовать и такое значение $\tilde{p}(\varphi_0)$, что $|\tilde{p}_2(\varphi_0) - p_0| < \delta_1$. Но тогда в окрестности данного b^* найдутся значения b , при которых в Δ_1 будут два различных $\tilde{p}(\varphi_0)$, что противоречит свойству единственности (утверждение 3).

Таким образом, имеет место

Свойство 1. При достаточно малых α в области Δ_1 лежит непрерывная кривая, не пересекающая ни верхней, ни нижней границы Δ_1 и являющаяся частью диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$.

Предположим, что при некоторых значениях $\alpha < \varepsilon$ и $p^* \in [p_1, p_2]$ существует точка $\{b^*, p^*\}$ бифуркационной диаграммы, не лежащая в области Δ_1 . Тогда при $p = p^* \in [p_1, p_2]$ нет других точек бифуркационной диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ (утверждение 2), в частности, в области Δ_1 . Однако это противоречит свойству 1. Следовательно, при всех $\alpha < \varepsilon$ все точки бифуркационной диаграммы $\{b^*, p^*\}$ с ординатами из отрезка $p^* \in [p_1, p_2]$ расположены в области Δ_1 .

Зафиксируем теперь μ и P . На оси ординат рассмотрим множество, представляющее собой отрезок $[\mu, P]$ с выколотыми μ -окрестностями точек множества $\{Z^E \cup Z^S \cup Z^M\}$. Это множество представимо в виде объединения конечного числа отрезков вида $[p_1, p_2]$. Выберем $\delta_2 = \delta_2(\mu, P) > 0$ как минимум из всех δ_1 по построенным отрезкам $[p_1, p_2]$ и соответствующее ему $\varepsilon = \varepsilon(\delta_2) > 0$. Таким образом, найдены δ_2 и ε , общие для всего построенного множества. Утверждение 4 доказано. ■

Итак, утверждения 3, 4 позволяют составить полное представление о бифуркационной диаграмме $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ периодических траекторий системы (1.1), за исключением сколь угодно малых окрестностей прямых $p = z \in \{Z^E \cup Z^S \cup Z^M\}$. Другими словами, вне малых окрестностей прямых $p = z \in \{Z^E \cup Z^S \cup Z^M\}$ условия Пуанкаре–Понтрягина являются не только достаточными, но и необходимыми для существования периодических траекторий системы (1.1) при малых значениях α .

2. Периодические траектории в случае общего вида неконсервативных сил

Рассмотрим теперь случай, когда в системе (1.1) $Q(\varphi, p)$ — произвольная аналитическая функция, 2π -периодическая по φ . Другими словами, в исходной системе не возникло естественным образом параметра b и физический смысл имеет только случай $b = 0$. Эту систему далее будем называть системой A_0 .

Зафиксируем $\varphi = \varphi_0$.

Рассмотрим для системы A_0 функцию $I_0(h)$ Пуанкаре–Понтрягина и следующие множества:

$$W_0 = \{h : I_0(h) = 0, dI_0/dh \neq 0\}, \quad M_0 = \{h : I_0(h) = 0, dI_0/dh = 0\}, \\ Z_0^W = \{z(h, \varphi_0) : h \in W_0\}, \quad Z_0^M = \{z(h, \varphi_0) : h \in M_0\}.$$

Введем искусственно параметр b : рассмотрим систему A_1 , отличающуюся от исходной наличием функции $f(\varphi, p) = p$. Так что A_1 — система вида (1.1) с $Q(\varphi, p) = F(\varphi, p) - bp$.

Определим для системы A_1 функцию $I_1(h)$ Пуанкаре–Понтрягина и следующие множества:

$$W_1 = \left\{ h : \left. \frac{dI_1}{dh} \right|_{b=\tilde{b}(h)} \neq 0 \right\}, \quad M_1 = \left\{ h : \left. \frac{dI_1}{dh} \right|_{b=\tilde{b}(h)} = 0 \right\}, \\ Z_1^W = \{z(h, \varphi_0) : h \in W_1\}, \quad Z_1^M = \{z(h, \varphi_0) : h \in M_1\},$$

где $\tilde{b}(h)$ определяется формулой (1.3) для системы A_1 .

Отметим, что множества E и S для систем A_0 и A_1 одинаковы, так как эти множества не зависят от функции $f(\varphi, p)$. Также отметим, что $M_0 \subset M_1$ и что множества $Z_0^W, Z_0^E, Z_0^S, Z_1^M$ не имеют общих точек.

Применяя утверждение 4 к системе A_1 , получаем дополнительную информацию о системе A_0 , не содержащей параметра b :

Утверждение 5. Для сколь угодно большого P и сколь угодно малого μ у исходной системы A_0 при достаточно малых α нет ни одной периодической траектории со значением $\tilde{p}(\varphi_0) < P$, лежащим вне μ -окрестностей точек множества $\{Z_0^W \cup Z_0^E \cup Z_0^S \cup Z_1^M\}$.

Теперь рассмотрим систему A_2 , отличающуюся от системы A_0 наличием функции $f(\varphi, p) = pk^{-1}(\varphi)(0.5p^2 + u(\varphi)k(\varphi))$.

Определим для системы A_2 функцию $I_2(h)$ Пуанкаре–Понтрягина и множества W_2, M_2, Z_2^W, Z_2^M аналогично тому, как были введены множества W_1, M_1, Z_1^W, Z_1^M .

Отметим, что $M_0 \subset M_2$.

Применяя утверждение 4 к системе A_2 и учитывая утверждение 5, получим

Утверждение 6. Для сколь угодно большого P и сколь угодно малого μ у исходной системы A_0 при достаточно малых α нет ни одной периодической траектории со значением $\tilde{p}(\varphi_0) < P$, лежащим вне μ -окрестностей точек множества $\{Z_0^W \cup Z_0^E \cup Z_0^S\} \cup \cup \{Z_1^M \cap Z_2^M\}$.

Докажем, что последнее множество $(Z_1^M \cap Z_2^M)$ определяется свойствами системы A_0 .

Утверждение 7. $Z_1^M \cap Z_2^M = Z_0^M$.

Доказательство. Докажем, что для произвольного $h \in M_1 \cap M_2$ выполнено $h \in M_0$.

Приведем вычисления для случая циклов, то есть $h \in [u(\varphi_0), \max(u(\varphi))] \setminus \{E \cup S\}$. Для случая 2π -периодических траекторий ($h > \max(u(\varphi))$) все рассуждения аналогичны, даже более простые.

Дифференцируя $I_1(h)$ и подставляя $\tilde{b}(h)$ вместо b , получим

$$h \in M_1 \Leftrightarrow \left. \frac{dI_1(h)}{dh} \right|_{I_1(h)=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{dI_0}{dh} \int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} z(h, \varphi) d\varphi - I_0 \frac{d}{dh} \left(\int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} z(h, \varphi) d\varphi \right) = 0. \quad (2.1)$$

Теперь учтем, что это же значение $h \in M_2$. Отметим, что вид $f_2(\varphi, p) = pk^{-1}(\varphi) \times (0.5p^2 + u(\varphi)k(\varphi))$ специально выбран так, чтобы $f_2(\varphi, z) = hz$ (см. § 1.3: $z(h, \varphi) = \sqrt{2(h - u(\varphi))k(\varphi)}$). Поэтому, дифференцируя $I_2(h)$, получим

$$\begin{aligned} h \in M_2 \Leftrightarrow \left. \frac{dI_2(h)}{dh} \right|_{I_2(h)=0} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h \left(\frac{dI_0}{dh} \int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} z(h, \varphi) d\varphi - I_0 \frac{d}{dh} \left(\int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} z(h, \varphi) d\varphi \right) \right) - I_0 \int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} z(h, \varphi) d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, для $h \in M_1 \cap M_2$, используя (2.1) и (2.2), получаем $I_0 \int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} z(h, \varphi) d\varphi = 0$.

Однако $\int_{\varphi_1(h)}^{\varphi_2(h)} z(h, \varphi) d\varphi > 0$ при $h \notin E$. Следовательно, $I_0 = 0$ при $h \in M_1 \cap M_2$.

С учетом (2.1) в этом случае и $\frac{dI_0}{dh} = 0$. Таким образом, условия $I_0 = 0$, $\frac{dI_0}{dh} = 0$ выполняются совместно при $h \in M_1 \cap M_2$, то есть доказываемое утверждение верно. ■

Из вышесказанного непосредственно следует

Утверждение 8. Если для системы вида (1.1) с произвольной аналитической функцией $Q(\varphi, p)$ при некоторых h и φ_0 значение порождающей функции Пуанкаре – Понтрягина $I_0(h)$ определено и отлично от нуля, то существует $\mu > 0$, такое, что у данной системы при достаточно малых α нет ни одной периодической траектории, пересекающей прямую $\varphi = \varphi_0$ в μ -окрестности значения $z(h, \varphi_0)$.

Заметим, что утверждение 8 позволяет усилить формулировку утверждения 4 о свойствах предельной бифуркационной диаграммы. Действительно, утверждение 4 справедливо при следующем более узком определении области $\Upsilon(\mu, \delta)$: это область на плоскости $\{b, p\}$, состоящая из μ -окрестности прямых $p = z$, где $z \in \{Z^E \cup Z^S\}$, и δ -окрестности построенной выше кривой $\{b, p_0\}$, где $b = \tilde{b}(h)$, $p_0 = z(h, \varphi_0)$.

Возникает естественный вопрос, возможно ли еще более сузить область $\Upsilon(\mu, \delta)$ в формулировке утверждения 4. В работе [8] рассмотрен пример системы вида (1.1), в которой периодические траектории существуют при сколь угодно малых α в окрестности множества, отвечающего условию $h \in E$. Таким образом, для системы общего вида, по крайней мере, нельзя исключить множество Z^E из определения $\Upsilon(\mu, \delta)$. Рассмотрим соответствующий пример более подробно в § 3 данной статьи.

3. Пример построения бифуркационной диаграммы

В качестве иллюстративного примера построения бифуркационной диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ рассмотрим модель одного аэродинамического маятника. Тяжелый стержень OA вращается вокруг вертикальной оси Oz , вдоль стержня, как по направляющей, перемещается невесомый ползун B , текущее положение стержня определяется углом φ , отсчитываемым от некоторой неподвижной прямой Ox (рис. 3). Ползун соединен пружиной с точкой O . В горизонтальной плоскости расположена неподвижная направляющая — замкнутая кривая Γ без самопересечений (точка O лежит внутри кривой), вдоль которой перемещается невесомый ползун B' , ползуны B и B' шарнирно соединены между собой. В точке A к стержню жестко прикреплена под прямым углом вертикальная плоская пластина. К точке A пластины приложена аэродинамическая сила, действующая на пластину со стороны набегающего стационарного потока воздуха. В шарнире O действует момент вязкого трения.

Рис. 3. Аэродинамический маятник с невесомой пружиной (вид сверху) и схема ползуна, движущегося по двум направляющим.

Потенциальная энергия такой системы определяется формой кривой Γ . Пусть Γ такова, что потенциальная энергия системы имеет вид $U = a_2 u(\varphi)$, $u(\varphi) = u_0 (1 + \cos \varphi)^3$, где $u_0 \geq 0$ — безразмерный параметр. Кинетическая энергия системы имеет вид $T = 0.5 a_1 k(\varphi) \dot{\varphi}^2$, где a_1 — момент инерции тела (стержень + пластина) относительно оси Oz , $k(\varphi) \equiv 1$.

Уравнения движения системы представимы в форме системы (1.1) при $H_0 = 0.5 p^2 + u_0 (1 + \cos \varphi)^3$, $F(\varphi, p) = \sqrt{(p + \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} (C_l(\beta) \cos \varphi - C_d(\beta)(p + \sin \varphi))$, $f(\varphi, p) = p$, $\alpha = 0.5 \rho S r^3 a_1^{-1}$, где $\beta = \arctg \left(\frac{\cos \varphi}{p + \sin \varphi} \right)$ — мгновенный угол атаки, $C_l(\beta) = \sin 2\beta$, $C_d(\beta) = 0.1 + \sin^2 \beta$ — коэффициенты аэродинамических сил (подъемной силы и силы сопротивления), ρ — плотность воздуха, S — площадь пластины, $r = OA$. Такая задача для $u(\varphi) \equiv 0$ рассматривалась в [8].

При $\alpha \rightarrow 0$ построим бифуркационные диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ при $\varphi_0 = \pi$ для различных значений u_0 , включая $u_0 = 0$.

Определим критические множества: $E = \{h = 0\}$, $Z^E = \{0\}$ при всех $u_0 \geq 0$; при $u_0 = 0$ получаем $S = \emptyset$, $Z^S = \emptyset$, при $u_0 > 0$ получаем $S = \{h = \max(u) = 8u_0\}$, $Z^S = \{4\sqrt{u_0}\}$.

Согласно теореме Пуанкаре–Понтрягина, для того чтобы при $\alpha \rightarrow 0$ в полной системе существовала периодическая траектория, возникающая из траектории $z(h, \varphi) = \sqrt{2(h - u(\varphi))k(\varphi)}$ порождающей гамильтоновой системы H_0 , достаточно, чтобы порождающая функция Пуанкаре–Понтрягина при соответствующем h была определена (то есть $h \notin \{E \cup S\}$) и имела невырожденный корень. В нашем случае это условие сводится, как

было показано в § 1.3, к формуле (1.3) при $h \notin \{E \cup S \cup M\}$. Результаты численного построения предельных бифуркационных диаграмм $\{b, p_0\}$, где $b = \tilde{b}(h)$, $p_0 = z(h, \varphi_0)$, для соответствующих периодических траекторий представлены на рисунке 4, при этом рассмотрены три различные значения параметра u_0 . Диаграммы получены на основе численного определения значений интегралов, входящих в формулы (1.3), (1.4), при различных положительных значениях h .

Рис. 4. Примеры построения предельных бифуркационных диаграмм.

На рисунке 4 сплошными линиями показаны ветви, отвечающие притягивающим траекториям, пунктирными — отталкивающим (см. следствие 1 в § 1.3). Точки с вертикальной касательной ($d\tilde{b}(h)/dh = 0$), выделенные кружочками, соответствуют вырожденным корням порождающей функции ($h \in M$) и отвечают негрубым полустойчивым периодическим траекториям полной системы. Точки (отмечены крестиками), для которых $z = 4\sqrt{u_0}$, отвечают сепаратрисам порождающей системы H_0 . Точка с $z = 0$ (отмечена треугольником) отвечает в данном случае неизолированным точкам покоя порождающей системы. При $z > 4\sqrt{u_0}$ соответствующие траектории 2π -периодические (выделены на рисунке 4 красным, сиреневым, черным цветом^a), при $z < 4\sqrt{u_0}$ соответствующие траектории — циклы (на рисунке 4 синие и голубые).

В соответствии с утверждениями 4, 8, бифуркационная диаграмма $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ при $\alpha \rightarrow 0$ представляется ветвями, стремящимися к ветвям построенной предельной диаграммы $\{b, p_0\}$, а также, возможно, некоторыми ветвями/точками, расположенными в малых окрестностях прямых $\{z = 0, z = 4\sqrt{u_0}\}$; других ветвей у диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ при достаточно малых α нет.

Рассмотрим подробнее случай $u_0 = 0$. В этом случае условие (1.3) дает одну ветвь диаграммы периодических траекторий, обладающую вертикальной касательной, что можно показать аналитически, в точке $\{b_0, 0\}$. В силу *необходимых* условий существования периодических траекторий (утверждение 8), при достаточно малых α у полной системы существуют только такие периодические траектории, для которых соответствующие точки на бифуркационной диаграмме $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ расположены в малой окрестности построенной предельной кривой (черная кривая на рис. 4), либо в малой окрестности прямой $z = 0$.

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1701003/>

Рассмотрим малую окрестность прямой $z = 0$ в случае $u_0 = 0$. Покажем, что при сколь угодно малом α в окрестности прямой $z = 0$ существуют периодические траектории, для которых не выполнены достаточные условия возникновения периодических траекторий из траекторий гамильтоновой системы H_0 . Для этого в окрестности прямой $z = 0$ введем новую переменную $y = p/\sqrt{\alpha}$, а также введем новое время $s = \tau\sqrt{\alpha}$. Тогда динамические уравнения при малых z можно переписать в виде системы, близкой к новой гамильтоновой системе H_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{\partial H_1}{\partial y}, \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + \sqrt{\alpha} \left(y \frac{\partial F(\varphi, p)}{\partial p} \Big|_{p=0} - by \right) + O(\alpha). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $H_1 = \frac{y^2}{2} - \int_0^\varphi F(\vartheta, 0)d\vartheta + \int_0^\pi F(\vartheta, 0)d\vartheta$. Последнее слагаемое добавлено для того, чтобы формально были выполнены свойства, наложенные на функцию $u(\varphi)$ в § 1.1. В данном случае функция $u(\varphi)$ для системы (3.1) будет иметь вид, представленный на рисунке 5. При этом $E = \{h = 0\}$, $Z^E = \{0\}$, $S = \{u_{\max}^1, \max(u)\}$, $Z^S = \{\sqrt{2u_{\max}^1}, \sqrt{2\max(u)}\}$. Выписывая в соответствии с теоремой Пуанкаре – Понтрягина достаточные условия существования периодических траекторий системы (3.1) в виде формулы (1.3), получаем дополнительные ветви бифуркационной диаграммы исходной системы, существующие при сколь угодно малом α в окрестности прямой $z = 0$. Полученные ветви представлены на рисунке 5, по вертикали отложено значение $y|_{\varphi=\pi}$ на предельных периодических траекториях. Пунктиром показаны ветви, соответствующие отталкивающим траекториям, сплошной линией — притягивающим. Фиолетовый цвет отвечает 2π -периодическим траекториям, зеленый — циклам. Разрыв при $b \in [b_1, b_2]$ обусловлен скачкообразным изменением границ $\varphi_1(h)$, $\varphi_2(h)$ интегрирования при переходе константы гамильтониана через критическое значение $h = \sqrt{u_{\max}^1}$, что сопряжено с разрывом порождающей функции $I(h)$.

Рис. 5. Вид функции $u(\varphi)$ и качественный вид траекторий $\zeta(h, \varphi)$ порождающей гамильтоновой системы H_1 . Предельная бифуркационная диаграмма периодических траекторий для системы (3.1).

При $b = b_0$ полученная кривая имеет вертикальную асимптоту. Отметим еще раз, что $y = p/\sqrt{\alpha}$, то есть полученная кривая расположена в сколь угодно малой окрестности оси абсцисс на диаграмме $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$ и «склеивается» с «основной» частью диаграммы $\{b, \tilde{p}(\varphi_0)\}$, соответствующей конечным значениям p (черная кривая на рис. 4), при $b = b_0$.

При любом $b \in (b_{-1}, b_0)$ существует такое значение ε , что при всех $\alpha < \varepsilon$ у рассматриваемой неконсервативной системы существует притягивающая 2π -периодическая траектория (вблизи соответствующей точки черной кривой рис. 4), отталкивающая 2π -периодическая траектория, расположенная на фазовой плоскости ниже притягивающей (вблизи соответствующей точки фиолетовой кривой на рис. 5, с учетом масштаба $1/\sqrt{\alpha}$), а также существует притягивающий цикл, охватывающий точку $\{\pi, 0\}$ фазовой плоскости (вблизи соответствующей точки зеленой кривой на рис. 5). При любом $b \in (b_0, b_1) \cup (b_2, b_3)$ существует такое значение ε , что при всех $\alpha < \varepsilon$ при таком b у рассматриваемой неконсервативной системы существует притягивающий цикл, охватывающий точку $\{\pi, 0\}$ фазовой плоскости (вблизи соответствующей точки зеленой кривой на рис. 5). Описанные циклы представлены на рисунке 6 (кроме циклов, приведены характерные траектории, в том числе качественно — в тех областях, где сходимость настолько медленная, что изображение результатов численного построения траекторий нерепрезентативно).

Рис. 6. Примеры фазовых портретов при $\alpha = 0.01$. Сплошными линиями представлены результаты численного интегрирования, пунктиром — качественный вид траекторий; черным цветом показаны притягивающие периодические траектории, красным — отталкивающая.

Итак, показано, что при $u_0 = 0$ исходная система при сколь угодно малом α в окрестности прямой $p = 0$ имеет грубые периодические траектории (и 2π -периодические, и циклы), которые не удовлетворяют достаточным условиям теоремы Пуанкаре–Понтрягина о возникновении периодических траекторий полной системы из траекторий системы H_0 . Однако можно построить усложненную порождающую систему (H_1) , применить снова теорему Пуанкаре–Понтрягина и найти «дополнительные» периодические траектории полной системы (рис. 5). В частности, при $b > b_0$ периодические траектории удастся обнаружить только при рассмотрении усложненной порождающей системы: для таких b достаточные условия «первого приближения» не выполнены ни при каком $h > 0$.

Отметим, что на каждом этапе построения порождающей гамильтоновой системы возникают новые множества Z^E , Z^S . В окрестности каждого элемента множества $Z^E \cup Z^S$

можно попытаться выделить новую порождающую гамильтонову систему, локально более точно приближающую исходную систему, и, соответственно, получить уточненные достаточные условия метода Пуанкаре – Понтрягина для существования периодических траекторий в данной локальной области.

Выводы

Для близкой к гамильтоновой автономной динамической системы с одной степенью свободы с цилиндрической фазовой поверхностью получены следующие результаты:

1) Предложен метод конструктивного параметрического анализа периодических траекторий системы в случае, когда в уравнениях системы можно выделить слагаемое, отвечающее диссипативным/антидиссипативным силам, причем множитель при этом слагаемом является варьируемым параметром модели, и этот параметр не входит в остальные члены уравнений.

2) Описаны свойства предельных бифуркационных диаграмм периодических траекторий в зависимости от упомянутого параметра. Полученные свойства содержат необходимые условия существования периодических траекторий при каждом конкретном значении параметра.

3) Для системы общего вида альтернативным способом получены необходимые условия существования периодических траекторий. Путем сопоставления двух различных вспомогательных систем специального вида эти свойства усилены по сравнению с результатом первой части работы.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.Д. Селюцкому за благожелательную критику данной работы, позволившую существенно улучшить основные результаты.

References

- [1] Bonnin M. Existence, number, and stability of limit cycles in weakly dissipative, strongly nonlinear oscillators, *Nonlinear Dynam.*, 2010, vol. 62, nos. 1–2, pp. 321–332.
- [2] Gavrilov L., Iliev I. D. Perturbations of quadratic Hamiltonian two-saddle cycles, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2015, vol. 32, no. 2, pp. 307–324.
- [3] Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, New York: Wiley, 1973.
- [4] Arnol'd V. I. Forgotten and neglected theories of Poincaré, *Russian Math. Surveys*, 2006, vol. 61, no. 1, pp. 1–18; see also: *Uspekhi Mat. Nauk*, 2006, vol. 61, no. 1(367), pp. 3–24.
- [5] Bautin N. N., Leontovich E. A. *Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane*, Moscow: Nauka, 1990 (Russian).
- [6] Dosaev M. Z., Lin Ch.-H., Lu W.-L., Samsonov V. A., Selyutskii Yu. D. A qualitative analysis of the steady modes of operation of small wind power generators, *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 3, pp. 259–263; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2009, vol. 73, no. 3, pp. 368–374.
- [7] Duboshin G. N. *Celestial mechanics: Analytical and qualitative methods*, 2nd ed., rev. and enl., Moscow: Nauka, 1978 (Russian).
- [8] Klimina L. A. Rotational modes of motion for an aerodynamic pendulum with a vertical rotation axis, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 2009, vol. 64, no. 5, pp. 126–129; see also: *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2009, no. 5, pp. 71–75.
- [9] Korolev S. A., Morozov A. D. On periodic perturbations of self-oscillating pendulum equations, *Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 6, no. 1, pp. 79–89 (Russian).

- [10] Kostromina O. S., Morozov A. D. On time periodic perturbations of two dimensional Hamiltonian systems with a homoclinic «figure-eight», *Vestn. Nighegorodsk. Univ.*, 2013, no. 1, pp. 177–183 (Russian).
- [11] Morozov A. D. *Quasi-conservative systems: Cycles, resonances and chaos*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 30, River Edge, N.J.: World Sci. Publ., 1999.
- [12] Pontryagin L. S. On dynamical systems close to Hamiltonian systems, *Zh. Èksp. Teor. Fiz.*, 1934, vol. 4, no. 8, pp. 234–238 (Russian).
- [13] Shalimova E. S. Steady and periodic modes in the problem of motion of a heavy material point on a rotating sphere (the viscous friction case), *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, 2014, vol. 69, no. 4, pp. 89–96; see also: *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2014, no. 4, pp. 43–50.

On a constructive method of search for rotary and oscillatory modes in autonomous dynamical systems

Liubov A. Klimina¹, Boris Ya. Lokshin²

^{1,2}Institute of Mechanics of LMSU

Michurinskiy pr. 1, Moscow, 119192, Russia

¹klimina@imec.mu.ru, ²blokshin@imec.msu.ru

An autonomous dynamical system with one degree of freedom with a cylindrical phase space is studied. The mathematical model of the system is given by a second-order differential equation that contains terms responsible for nonconservative forces. A coefficient α at these terms is supposed to be a small parameter of the model. So the system is close to a Hamiltonian one.

In the first part of the paper, it is additionally supposed that one of nonconservative terms corresponds to dissipative or to antidissipative forces, and coefficient b at this term is a varied parameter. The Poincaré–Pontryagin approach is used to construct a bifurcation diagram of periodic trajectories with respect to the parameter b for sufficiently small values of α .

In the second part of the paper, a system with nonconservative terms of general form is studied. Two supplementary systems of special form are constructed. Results of the first part of the paper are applied to these systems. Comparison of bifurcation diagrams for these supplementary systems has allowed deriving necessary conditions for the existence of periodic trajectories in the initial system for sufficiently small α .

The third part of the paper contains an example of the study of periodic trajectories of one system, which, for zero value of the small parameter, coincides with a Hamiltonian system H_0 . It is proved that there exist periodic trajectories which do not satisfy the Poincaré–Pontryagin sufficient conditions for emergence of periodic trajectories from trajectories of the system H_0 .

MSC 2010: 70K05

Keywords: autonomous dynamical system, Poincaré–Pontryagin approach, sufficient conditions for the existence of periodic trajectories, bifurcation diagram, necessary conditions for the existence of periodic trajectories

Received September 3, 2016, accepted December 23, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 25–40 (Russian)