ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.381; 531.391
MSC 2010: 70E17, 70E40

О движении тяжелого твердого тела в двух частных случаях решения С. В. Ковалевской

Г. В. Горр, Е. К. Щетинина

В статье изучены два частных случая решения С. В. Ковалевской. Для кинематического истолкования движения тела применен модифицированный метод Пуансо, который состоит в том, что движение тела представляется качением без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, по неподвижному годографу этого вектора. Рассмотрены два варианта: первый вариант характеризуется плоским годографом вспомогательного вектора, второй вариант отвечает случаю, когда годограф этого вектора лежит на эллипсоиде инерции тела.

Ключевые слова: решение Ковалевской, метод Пуансо

Введение

Решение С. В. Ковалевской [1] занимает особое место в решениях дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, поскольку в этом случае дополнительный первый интеграл является многочленом четвертого порядка (в решении Л. Эйлера дополнительный интеграл имеет второй порядок, в решении Ж. Лагранжа такой интеграл линейный [2]). Н. Б. Делоне дал простой пример модели гироскопа С. В. Ковалевской [3]. Он рассмотрел случай, когда постоянная четвертого интеграла равна нулю.

Получено 12 сентября 2017 года
После доработки 12 января 2018 года

Горр Геннадий Викторович
gvgorr@gmail.com
Институт прикладной математики и механики
283114, Украина, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74

Щетинина Елена Константиновна
elena-0607@ukr.net
Киевский национальный торгово-экономический университет
02156, Украина, г. Киев, ул. Киото, д. 19

Н. Б. Делоне исследовал подвижный годограф угловой скорости и указал метод получения поверхности вращения, несущей неподвижный годограф. Классификацию меридиана поверхности, на которой лежит неподвижный годограф, указали В. Н. Коваль, П. В. Харламов [4].

Н. Е. Жуковский [5] предложил не только оригинальный прием сведения решения С. В. Ковалевской к квадратурам, но и исследовал конус, описываемый вертикалью (единичным вектором, параллельным силе тяжести) в подвижной системе координат.

Г. Г. Аппельрот [6, 7] провел значительные исследования аналитических свойств данного решения. Классы решений, которые он выделил в случае Ковалевской, в дальнейшем стали называться классами Аппельрота (см., например, [8, 9]).

Г. В. Колосов [10] при помощи нелинейного преобразования переменных и времени свел задачу интегрирования дифференциальных уравнений движения гироскопа Ковалевской к задаче интегрирования уравнений движения точки на плоскости с определенным потенциалом.

Б. К. Млодзеевский [11] изучал вариант решения Ковалевской, когда основные переменные задачи являются рациональными функциями времени. Указанная выше статья Б. К. Млодзеевского представляет интерес в задаче кинематического истолкования движения тела, так как достаточно простой вид зависимостей компонент угловой скорости от времени позволил получить компоненты вектора угловой скорости в неподвижной системе координат.

В. В. Козлов [12] исследовал свойства угла прецессии тела в решении С. В. Ковалевской, он выделил в общем решении вековую составляющую по t функции для угла прецессии.

В [13, 14] М. П. Харламов и И. Н. Гашененко применили топологические методы для изучения качественных свойств в движении гироскопа Ковалевской.

Достаточно подробное изучение классов Г. Г. Аппельрота выполнил А. И. Докшевич [8].

Полученные П. В. Харламовым [15, 16] уравнения неподвижного годографа вектора угловой скорости дали возможность на основе метода Пуансо [17] исследовать свойства движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку (см. обзоры [2, 15, 17, 18]). Методом годографов движение гироскопа Ковалевской изучено в многочисленных статьях (см., например, [19–24]). В монографии [18] подведен итог исследований решения С. В. Ковалевской; в основу [18] положены различные методы аналитического и геометрического характера.

Новые результаты в геометрическом истолковании движения тела с неподвижной точкой можно получить на основании модифицированного метода годографов и новой кинематической формулы на компоненты вектора угловой скорости [25]. С помощью данного метода показано, что движение гироскопов Стеклова и Докшевича можно представить качением без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, по неподвижному годографу этого вектора, которые представляют собой эллипсы [26].

В данной статье модифицированный метод Пуансо использован для кинематического истолкования движения гироскопа в частных случаях решения С. В. Ковалевской, указанных в [20, 21].

В статье [27] указан метод использования параметров Родрига – Гамильтона [28] в комплексном подходе истолкования движения тела с неподвижной точкой. Эти параметры играют важную роль в определении ориентации твердого тела в пространстве [29–31].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела в векторной форме

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1)$$

Эти уравнения допускают первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \quad (1.2)$$

В (1.1), (1.2) введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление силы тяжести, $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — единичный вектор, направленный из неподвижной точки O в центр тяжести C тела, $\mathbf{e} = \frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|}$, A — тензор инерции тела, $s = mg|\overline{OC}|$, где m — масса тела, g —

ускорение свободного падения, точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает дифференцирование по времени t , а E и k — произвольные постоянные.

Решение С. В. Ковалевской [1] получено при выполнении условий

$$e_2 = e_3 = 0, \quad e_1 = 1, \quad A = \text{diag}(2A_3, 2A_3, A_3). \quad (1.3)$$

Вместо ω_i вводим безразмерные переменные p, q, r и безразмерное время τ :

$$p = \omega_1 \sqrt{\frac{A_3}{s}}, \quad q = \omega_2 \sqrt{\frac{A_3}{s}}, \quad r = \omega_3 \sqrt{\frac{A_3}{s}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{s}{A_3}}. \quad (1.4)$$

Тогда в силу (1.3), (1.4) из (1.1), (1.2) следует

$$\dot{p} = \frac{1}{2}qr, \quad \dot{q} = -\frac{1}{2}(rp + \nu_3), \quad \dot{r} = \nu_2, \quad (1.5)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2, \quad (1.6)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad 2(p^2 + q^2) + r^2 = 2\nu_1 + 6l_1, \quad 2(p\nu_1 + q\nu_2) + r\nu_3 = 2l. \quad (1.7)$$

Уравнения (1.5), (1.6) допускают первый интеграл С. В. Ковалевской [1]

$$(\nu_1 - p^2 - q^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 = K^2, \quad (1.8)$$

где K — произвольная постоянная. В формулах (1.7) произвольные постоянные l, l_1 введены вместо k, E .

Рассмотрим частный случай [21] решения С. В. Ковалевской [1], который характеризуется условиями $l = 0, K = 0$. Обозначая $3l_1 = 2R^2$, запишем его в виде [21]

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - r^2}, \quad q = -\frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2}, \quad (1.9)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{R}r - 2R^2\right), \quad \nu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - r^2)\left(r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2\right)}, \quad (1.10)$$

$$\nu_3 = \frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - r^2}, \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - r^2)\left(r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2\right)}. \quad (1.11)$$

Переменная r изменяется в промежутке

$$r \in [r_*; r^*] \quad \left(r_* = \frac{\sqrt{1+4R^4}-1}{R}, \quad r^* = 2R \right), \quad (1.12)$$

в котором функции, входящие в (1.9)–(1.11), действительны. Без ограничения общности задачи полагаем $R > 0$.

В статье [21] дано кинематическое истолкование движения тела с неподвижной точкой с помощью теоремы Пуансо [18] и уравнений неподвижного годографа П. В. Харламова [16]. Подвижный годограф вектора угловой скорости представлен как линия пересечения поверхностей

$$\frac{p^2}{R^2} + \frac{r^2}{4R^2} = 1, \quad \left(r + \frac{1}{R} \right)^2 - 4q^2 = \frac{1+4R^4}{R^2}. \quad (1.13)$$

Установлено, что движение конца вектора угловой скорости по подвижному годографу периодическое с периодом по τ [20]

$$T = 8 \int_{r_*}^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{(4R^2 - r^2)(r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2)}}. \quad (1.14)$$

Уравнения неподвижного годографа для решения (1.9)–(1.11) таковы [20]:

$$\omega_\zeta = \frac{r}{4R} \sqrt{4R^2 - r^2}, \quad \omega_\rho^2 = \frac{r}{16R^2} (r^3 + 12R^2r + 8R), \quad (1.15)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = - \frac{(2Rr^3 + 3r^2 + 4R^2)(4R^2 - r^2)}{r(r^3 + 12R^2r + 8R)}. \quad (1.16)$$

В [21] показано, что неподвижный годограф вектора угловой скорости является замкнутой кривой, движение конца вектора по подвижному годографу — периодическое с периодом (1.14). Поэтому движение гироскопа Ковалевской в случае (1.9)–(1.11) периодическое. Различные положения подвижного годографа на неподвижном годографе показаны в [18, 21, 24]. Полученные результаты дают наглядное представление о движении гироскопа Ковалевской в рассматриваемом частном случае, когда $K = 0$, $3l_1 = 2R^2$, $l = 0$.

В [24] выполнено исследование решения (1.9)–(1.12) в эллиптических функциях Якоби. Вводя модули эллиптических функций

$$k^2 = \frac{\sqrt{1+4R^4}-2R^2}{2\sqrt{1+4R^4}}, \quad k'^2 = \frac{\sqrt{1+4R^4}+2R^2}{2\sqrt{1+4R^4}} \quad (1.17)$$

и вспомогательный параметр $\alpha_0 = \frac{k'}{k}$, который связан с параметром R соотношением $4R^2 = \frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0}$, запишем решение (1.9)–(1.11):

$$p = \sqrt{\alpha_0^2 - 1} \frac{\operatorname{cnu}}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad q = - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dnu}}{k(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)}, \quad r = 2R \frac{\alpha_0 - \operatorname{cn}^2 u}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + k^2(1 - \alpha_0^2) \operatorname{cn}^2 u}{k^2(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)^2}, & \nu_2 &= 2\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)^2}, \\ \nu_3 &= 2\sqrt{\alpha_0} \frac{\operatorname{cn} u}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u}, & u &= \frac{\tau}{2\sqrt{kk'}}.\end{aligned}\quad (1.19)$$

В формулах (1.18), (1.19) $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ — эллиптические функции с модулями

$$k^2 = \frac{\sqrt{1 + 4R^4} - 2R^2}{2\sqrt{1 + 4R^4}}, \quad k'^2 = 1 - k^2. \quad (1.20)$$

Решение (1.18), (1.19) имеет периодический характер, его период по τ таков:

$$T = 8\sqrt{kk'} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}. \quad (1.21)$$

Целью данной статьи является комплексный подход в истолковании движения тела в решении (1.9)–(1.11), основанный на использовании углов Эйлера, параметров Родрига–Гамильтона, модифицированного метода Пуансо [25].

2. Нахождение углов Эйлера и параметров Родрига–Гамильтона

При истолковании движения тела с помощью углов Эйлера будем полагать, что угол нутации — угол между третьей координатной осью и вертикалью, то есть компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ таковы [28]:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, & \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, & \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \\ \nu_1 &= \sin \theta \sin \varphi, & \nu_2 &= \sin \theta \cos \varphi, & \nu_3 &= \cos \theta,\end{aligned}\quad (2.1)$$

где φ — угол собственного вращения, θ — угол нутации, ψ — угол прецессии, точкой обозначена производная по времени. Для определения углов φ , θ , ψ из равенств (2.1) обозначим через $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ единичные векторы подвижной системы координат. Тогда из (2.1) в векторном виде получим

$$\theta = \arccos(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathfrak{z}_3), \quad \varphi = \arctg \frac{\boldsymbol{\nu} \cdot \mathfrak{z}_1}{\boldsymbol{\nu} \cdot \mathfrak{z}_2}, \quad (2.2)$$

$$\dot{\psi} = \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{z}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathfrak{z}_3)}{(\boldsymbol{\nu} \times \mathfrak{z}_3)^2}. \quad (2.3)$$

Используя замену (1.4) и решение (1.9)–(1.11), из формулы (2.3) имеем

$$\psi(r) = -2R \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2}}. \quad (2.4)$$

Таким образом, функция (2.4) является элементарной функцией от переменной r :

$$\psi(r) = \psi_0 - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2R} \left(\sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2} - r \right). \quad (2.5)$$

Отсюда в силу третьего соотношения из (1.18) следует

$$\psi(u) = \psi_0 + 2 \operatorname{arctg} \frac{kR\alpha_0 - \operatorname{sn} u - kR \operatorname{cn}^2 u}{kR(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)}. \quad (2.6)$$

Подставим выражения (1.19) в формулы (2.2):

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \arccos 2\sqrt{\alpha_0} \frac{\operatorname{cn} u}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u}, \\ \varphi(u) &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + k^2(1 - \alpha_0^2) \operatorname{cn}^2 u}{2k^2 \sqrt{\alpha_0^2 - 1} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Соотношения (2.6), (2.7) позволяют определять углы Эйлера в зависимости от переменной u . Очевидно, функции (2.7) являются периодическими функциями времени τ с периодом (1.21).

Как уже было отмечено, в задачах ориентации тела в пространстве часто используют параметры Родрига–Гамильтона [27–31] λ_i ($i = \overline{0,3}$), которые выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad (2.8)$$

$$\lambda_2 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \quad (2.9)$$

С учетом (2.6), (2.7) из (2.8), (2.9) можно получить параметры Родрига–Гамильтона в зависимости от времени в исследуемом случае решения С. В. Ковалевской.

3. Истолкование движения гироскопа Ковалевской с помощью метода Пуансо и уравнений Харламова

В статье [21] уравнения неподвижного годографа (1.15), (1.16) найдены с помощью уравнений П. В. Харламова [16]. Если в результате интегрирования уравнений (1.1) получено решение (запишем в безразмерных переменных)

$$\boldsymbol{\omega}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(\tau) \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\nu}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \nu_i(\tau) \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (3.1)$$

то для компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной системе координат с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\nu}$ имеем соотношения [16]

$$\begin{aligned} \omega_\xi(\tau) &= \omega_\rho(\tau) \cos \alpha(\tau), \quad \omega_\eta(\tau) = \omega_\rho(\tau) \sin \alpha(\tau), \quad \omega_\zeta(\tau) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(\tau) \nu_i(\tau), \\ \omega_\rho^2(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i^2(\tau) - \omega_\zeta^2(\tau), \quad \alpha(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)} [\dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau))] d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\dot{\omega}(\tau)$ — производная от $\omega(\tau)$ по безразмерному времени τ . Определенную сложность в вычислении функции $\alpha(\tau)$ представляет зависимость этой функции от производной $\dot{\omega}(\tau)$. В статье [25] получена более простая формула

$$\operatorname{tg}(\alpha(\tau) - \psi(\tau)) = \delta \frac{(\omega(\tau) \times \nu(\tau)) \cdot (\nu(\tau) \times \mathfrak{z}_3)}{\mathfrak{z}_3 \cdot (\omega(\tau) \times \nu(\tau))}, \quad (3.3)$$

где $\delta = 0$, если постоянен угол θ между векторами $\nu(\tau)$ и $\mathfrak{z}_3$, и $\delta = 1$, если $\theta \neq \text{const}$. Поскольку для $\psi(\tau)$ можно использовать формулу (2.3), то для $\alpha(\tau)$ из (3.3) следует выражение (полагаем $\delta = 1$)

$$\alpha(\tau) = \alpha_0^* + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(\omega(\tau) \times \mathfrak{z}_3) \cdot (\nu(\tau) \times \mathfrak{z}_3)}{(\nu(\tau) \times \mathfrak{z}_3)^2} d\tau + \frac{(\omega(\tau) \times \nu(\tau)) \cdot (\nu(\tau) \times \mathfrak{z}_3)}{\mathfrak{z}_3 \cdot (\omega(\tau) \cdot \nu(\tau))}. \quad (3.4)$$

Характерным свойством формулы (3.3) является алгебраическая связь между углом прецессии $\psi(\tau)$ и полярным углом $\alpha(\tau)$. Это означает, что без дополнительных операций дифференцирования и интегрирования в тех решениях, в которых найдена зависимость $\psi(\tau)$, можно найти зависимость $\alpha(\tau)$, и наоборот. Так, например, в статье [21] для решения (1.9)–(1.11) указана только формула (1.16), и поэтому на основании соотношений (2.5), (3.4) легко получить выражение для $\alpha(\tau)$ (учитываем переход к безразмерным переменным (1.4)):

$$\alpha = \alpha_0^* + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2R} \left(r - \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2} \right) - \operatorname{arctg} \frac{r^2 + 4R^2}{2R \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2}}. \quad (3.5)$$

Полагая $\alpha_0^* = 0$, формулу (3.5) приведем к виду

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{(r^2 - 4R^2) \left(r + \frac{1}{R} \right) - r^2 \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2}}{2R \left[2r \left(r + \frac{1}{R} \right) - \left(2r + \frac{1}{R} \right) \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2} \right]}. \quad (3.6)$$

Учтем в соотношениях (1.15), (3.6) значение r из (1.18):

$$\omega_{\zeta}(u) = \sqrt{\alpha_0^2 - 1} \frac{(\alpha_0 - \operatorname{cn}^2 u) \operatorname{cnu}}{(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)^2},$$

$$\omega_{\rho}^2(u) = \frac{\alpha_0 - \operatorname{cn}^2 u}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u} \left[1 + \frac{\sqrt{\alpha_0^2 - 1} (\alpha_0 - \operatorname{cn}^2 u)}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} - \frac{\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \operatorname{cn}^2 u}{(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)^2} \right) \right], \quad (3.7)$$

$$\alpha(u) = - \operatorname{arctg} \frac{F_1(u)}{F_2(u)}, \quad (3.8)$$

где

$$F_1(u) = 2R \left\{ 2kk' \operatorname{cn}^2 u [k'(1 + 2R^2) + k(1 - 2R^2) \operatorname{cn}^2 u] + R(k' - k \operatorname{cn}^2 u)^2 \operatorname{snu} \operatorname{dnu} \right\},$$

$$F_2(u) = (k' + k \operatorname{cn}^2 u) \left\{ 2R(k' - k \operatorname{cn}^2 u) [k'(1 + 2R^2) + k(1 - 2R^2) \operatorname{cn}^2 u] - \right. \\ \left. - [k'(1 + 4R^2) + k(1 - 4R^2) \operatorname{cn}^2 u] \operatorname{snu} \operatorname{dnu} \right\}. \quad (3.9)$$

Таким образом, в (3.7)–(3.9) уравнения неподвижного годографа записаны через переменную u , которая выражается через время τ по последней формуле системы (1.19). Периодический характер движения тела следует из свойств периодичности функций $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{dn} u$.

4. Применение модифицированного метода Пуансо к исследованию решения (1.9)–(1.12)

Используя первую формулу из (3.1) и соотношения из (3.2), запишем уравнения подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i(\tau) \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_\xi(\tau) \mathbf{i}_1 + \omega_\eta(\tau) \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta(\tau) \mathbf{i}_3. \quad (4.1)$$

Если через Ω_0 обозначить начальную точку на подвижном годографе (при $\tau = 0$), а через Ω'_0 — на неподвижном годографе и Ω^* — точку касания годографов в момент времени τ , то из равенства $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{d\tau}$ следует, что $\sphericalangle \Omega_0 \Omega^* = \sphericalangle \Omega'_0 \Omega^*$. Из последнего равенства и вытекает теорема Пуансо о том, что движение тела воспроизводится качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

Следуя [15, 25], введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{b}(\tau) = b(\tau) \boldsymbol{\omega}(\tau), \quad (4.2)$$

где $b(\tau)$ — дифференцируемая функция. На основании условия $d\mathbf{b}(\tau)/d\tau = d'\mathbf{b}(\tau)/d\tau$, вытекающего из (4.2), получим, что подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(\tau)$ имеют общую касательную, а длины дуг, описанные за одинаковый промежуток времени концом вектора $\mathbf{b}(\tau)$ на подвижном и неподвижном годографах, равны. Следовательно, движение тела с неподвижной точкой может быть представлено качением без скольжения подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(\tau)$ по неподвижному годографу этого вектора. Необходимо при таком истолковании учитывать, что вращение тела вокруг вектора $\mathbf{b}(\tau)$ происходит с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(\tau)$. Такой подход позволил получить дополнительные свойства в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона [25–27].

Первый модифицированный подход в истолковании движения гироскопа Ковалевской. Рассмотрим решение (1.9)–(1.11). В силу $r > 0$ (см. формулы (1.12)) в качестве вектора $\mathbf{b}(\tau)$ примем вектор

$$\mathbf{b}(\tau) = \frac{1}{r(\tau)} \boldsymbol{\omega}(\tau) = \left(\frac{p(\tau)}{r(\tau)}, \frac{q(\tau)}{r(\tau)}, 1 \right). \quad (4.3)$$

Тогда неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(\tau)$ определим из второй формулы (4.1) с учетом (1.15)–(1.16)

$$\mathbf{b}(\tau) = b_\xi(\tau) \mathbf{i}_1 + b_\eta(\tau) \mathbf{i}_2 + b_\zeta(\tau) \mathbf{i}_3 \quad (b_\xi(\tau) = b_\rho(\tau) \cos \alpha(\tau), \quad b_\eta(\tau) = b_\rho(\tau) \sin \alpha(\tau)), \quad (4.4)$$

где

$$b_\rho(\tau) = \frac{1}{4R\sqrt{r(\tau)}} \sqrt{r^3(\tau) + 12R^2 r(\tau) + 8R}, \quad b_\zeta(\tau) = \frac{1}{4R} \sqrt{4R^2 - r^2(\tau)}. \quad (4.5)$$

В формулах (4.4) функция $\alpha(\tau)$ на основании инвариантности относительно преобразования (4.2) последней формулы из (3.2) вычисляется по формулам (3.6), (3.8).

Рассмотрим подвижный годограф (4.3). Обозначим через b_1, b_2, b_3 компоненты вектора $\mathbf{b}(\tau)$. Из (1.9), (4.3) имеем

$$b_1 = \frac{1}{2r} \sqrt{4R^2 - r^2}, \quad b_2 = \frac{1}{2r} \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2}, \quad b_3 = 1. \quad (4.6)$$

Из последнего равенства системы (4.6) следует, что подвижный годограф вектора $\mathbf{b}$ является плоской кривой, расположенной в плоскости $b_3 = 1$. Исключим из первых двух выражений (4.6) переменную r :

$$16R^4(b_1^2 + b_2^2)^2 - 4b_1^2 - 1 = 0. \quad (4.7)$$

Введем в плоскости $b_3 = 1$ полярные координаты ρ, β : $b_1 = \rho \cos \beta, b_2 = \rho \sin \beta$. Тогда из (4.7) получим

$$\rho^2 = \frac{1}{8R^4} (\cos^2 \beta + \sqrt{\cos^4 \beta + 4R^4}). \quad (4.8)$$

Кривая (4.7) (в полярных координатах (4.8)) является кривой четвертого порядка.

Рассмотрим неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(\tau)$, определяемого уравнениями (4.4), (4.5), (3.8). Исключим в соотношениях (4.5) переменную $r(\tau)$:

$$b_\rho^2(b_\zeta) = 16R^2 - b_\zeta^2 + \frac{8}{\sqrt{4R^2 - b_\zeta^2}}. \quad (4.9)$$

При построении кривой (4.9) (меридиана поверхности вращения, на которой лежит конец вектора $\mathbf{b}(\tau)$) следует учитывать, что $b_\rho^2 \neq 0$ в промежутке (1.12), так как уравнение $r^3 + 12R^2r + 8R = 0$ имеет один действительный корень

$$r' = \sqrt[3]{4R(-1 + \sqrt{1 + 4R^4})} - \sqrt[3]{4R(1 + \sqrt{1 + 4R^4})},$$

который не принадлежит промежутку (1.12). В компонентах b_ξ, b_η, b_ζ уравнение (4.9) имеет вид

$$(b_\xi^2 + b_\eta^2 + b_\zeta^2 - 16R^2)^2 (4R^2 - b_\zeta^2) = 64. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) в неподвижном пространстве описывает поверхность шестого порядка. Линия пересечения этой поверхности с цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $O\zeta$, а направляющая описывается уравнениями

$$b_\xi(r) = b_\rho(r) \cos \alpha(r), \quad b_\eta(r) = b_\rho(r) \sin \alpha(r), \quad (4.11)$$

где $\alpha(r)$ имеет вид (3.8), является неподвижным годографом вектора $\mathbf{b}(r)$. Движение тела можно воспроизвести качением без скольжения подвижного годографа (4.3) по неподвижному годографу (4.4).

Одним из отличительных свойств указанного подхода в кинематическом истолковании, предложенного выше, и истолкования [21] является различный порядок поверхностей вращения, на которых лежит неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(r)$ и вектора $\boldsymbol{\omega}(r)$. Как уже отмечено, порядок поверхности (4.10) равен шести. Для получения порядка поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}(r)$, необходимо исключить

из равенств (1.15) переменную r . Например, при $R = \frac{1}{2}$ уравнение данного меридиана таково:

$$64\omega_\zeta^2\sigma^8 + (4\omega_\zeta^2 + \sigma^4)^2(4\omega_\zeta^2 + \sigma^4 - 2\sigma^2)(4\omega_\zeta^2 + \sigma^4 + 2\sigma^2) = 0, \quad (4.12)$$

где $\sigma^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2$. Порядок поверхности (4.12) равен 16, то есть он в два раза больше порядка поверхности (4.10).

Второй модифицированный подход в истолковании движения гироскопа Ковалевской в случае (1.9)–(1.12). Выберем в равенстве (4.2) вектор $\mathbf{b}(\tau)$ таким образом, чтобы конец этого вектора принадлежал эллипсоиду инерции в неподвижной точке. Учитывая условия (1.3), запишем уравнение эллипсоида в виде

$$2(b_1^2 + b_2^2) + b_3^2 = \varkappa_0^2 \quad (\varkappa_0^2 = \text{const}). \quad (4.13)$$

На основании (1.9), (4.2) из равенства (4.13) получим значение функции (вместо τ будем использовать переменную r)

$$b(r) = \frac{1}{\sqrt{r\left(r + \frac{1}{R}\right)}} \quad (4.14)$$

и компоненты вектора $\mathbf{b}$ в подвижной системе координат

$$b_1 = \frac{\varkappa_0 \sqrt{4R^2 - r^2}}{2\sqrt{r\left(r + \frac{1}{R}\right)}}, \quad b_2 = -\frac{\varkappa_0 \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2}}{2\sqrt{r\left(r + \frac{1}{R}\right)}}, \quad b_3 = \frac{\varkappa_0 \sqrt{r}}{\sqrt{r + \frac{1}{R}}}. \quad (4.15)$$

Подвижный годограф вектора $\mathbf{b}$ является линией пересечения эллипсоида (4.13) и поверхности, уравнение которой получим из (4.15)

$$b_1^2 = \frac{1}{4b_3^2} [4R^4 \varkappa_0^4 - 8R^4 \varkappa_0^2 b_3^2 + (4R^4 - 1)b_3^4]. \quad (4.16)$$

Поверхность (4.16) является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными второй координатной оси, и с направляющей (4.16) — кривой четвертого порядка.

Неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(r)$ находится из равенства (4.2) с учетом (4.14), (1.15):

$$\mathbf{b}(r) = \frac{1}{4R\sqrt{r + \frac{1}{R}}} \left(\varphi(r) \cos \alpha, \varphi(r) \sin \alpha, \sqrt{r(4R^2 - r^2)} \right), \quad (4.17)$$

где $\varphi(r) = \sqrt{r^3 + 12R^2r + 8R}$. В силу (4.17)

$$b_\xi = b_\rho \cos \alpha, \quad b_\eta = b_\rho \sin \alpha, \quad b_\zeta = \frac{1}{4R} \sqrt{\frac{r(4R^2 - r^2)}{r + \frac{1}{R}}}, \quad (4.18)$$

где

$$b_\rho = \frac{1}{4R} \sqrt{\frac{r^3 + 12R^2r + 8R}{r + \frac{1}{R}}}. \quad (4.19)$$

Функция $\alpha(r)$, входящая в соотношения (4.17), (4.18), определена формулой (3.6).

Для получения уравнения меридиана поверхности, на которой лежит неподвижный годограф $\mathbf{b}(r)$, введем полярные координаты ϑ, γ :

$$\omega_\rho = \vartheta \cos \gamma, \quad \omega_\zeta = \vartheta \sin \gamma. \quad (4.20)$$

С помощью (4.18)–(4.20) уравнение меридиана можно записать в виде

$$\sin^2 \gamma = \frac{(2\vartheta^2 - 1)[4\vartheta^4(4R^4 - 1) + 4\vartheta^2(1 - 8R^4) + 16R^4 - 1]}{64R^4\vartheta^2(\vartheta^2 - 1)^2}. \quad (4.21)$$

Движение эллипсоида инерции (следовательно, и движение тела) можно представить качением без скольжения подвижного годографа $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = b_1(r)\mathfrak{a}_1 + b_2(r)\mathfrak{a}_2 + b_3(r)\mathfrak{a}_3 \quad (4.22)$$

по неподвижному годографу (4.17). Свойства годографов вектора $\mathbf{b}$ определяются соотношениями (4.15)–(4.22).

5. Исследование второго частного случая решения С. В. Ковалевской

Второй частный случай запишем в виде [20]

$$q^2(p) = -\frac{p}{l}(lp + 1), \quad r^2 = 4(l^2 - p^2), \quad (5.1)$$

$$\nu_1(p) = -\frac{1}{l}p(2pl + 1), \quad \nu_2(p) = -2p\sqrt{-\frac{p}{l}(lp + 1)}, \quad \nu_3(p) = \sqrt{\frac{l^2 - p^2}{l}}, \quad (5.2)$$

$$\dot{p} = \sqrt{-\frac{p}{l}(l^2 - p^2)(lp + 1)}. \quad (5.3)$$

Решение (5.1)–(5.3) записано в безразмерных переменных (1.4). Точкой над p обозначена производная по переменной τ . Очевидно, что соотношения (5.1), (5.2) удовлетворяют первым интегралам

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad 2(p^2 + q^2) + r^2 = 2\nu_1 + 4l^2, \quad 2(p\nu_1 + q\nu_2) + r\nu_3 = 2l. \quad (5.4)$$

Таким образом, решение (5.1), (5.3) зависит от одной существенной произвольной постоянной l . Промежуток изменения переменной p зависит от значений l :

$$\begin{aligned} 1. \quad & l < 1, \quad -l \leq p \leq 0, \\ 2. \quad & l > 1, \quad -\frac{l}{l} \leq p \leq 0, \\ 3. \quad & l = 1, \quad -1 \leq p \leq 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Неподвижный годограф вектора угловой скорости определяется формулами [20]

$$\omega_\zeta(p) = \frac{1}{l}(2l^2 - p^2), \quad \omega_\rho(p) = -\frac{1}{l^2}p(l + p^3), \quad (5.6)$$

$$\alpha(p) = \frac{1}{2} \int_{p_0}^p \frac{(4lp^3 + 3p^2 + l^2)dp}{(p^3 + l)\sqrt{p\left(p + \frac{1}{l}\right)}(p^2 - l^2)}. \quad (5.7)$$

Для получения наглядных результатов положим в (5.1)–(5.7) $l = 1$. В силу (5.5) переменная p изменяется в промежутке $p \in [-1, 0]$. Из первой формулы (5.6) следует $\omega_\zeta(p) = (2 - p^2) > 0$. Поэтому для применения модифицированного метода Пуансо [25] в качестве неподвижного годографа вектора целесообразно выбрать годограф вектора

$$\mathbf{b}(p) = \frac{1}{2 - p^2} [\omega_\rho(p) \cos \alpha(p) \mathbf{i}_1 + \omega_\rho(p) \sin \alpha(p) \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta(p) \mathbf{i}_3], \quad (5.8)$$

где $\omega_\rho(p)$, $\omega_\zeta(p)$, $\alpha(p)$ определены соотношениями (5.6), (5.7). На основании (5.8), (5.6) имеем

$$\mathbf{b}(p) = b_\rho(p) \cos \alpha(p) \mathbf{i}_1 + b_\rho(p) \sin \alpha(p) \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3, \quad (5.9)$$

то есть неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}_\rho$ является плоской кривой, где

$$b_\rho(p) = \frac{\sqrt{-p(1 + p^3)}}{2 - p^2}, \quad \alpha(p) = \frac{1}{2} \int_{p_0}^p \frac{(4p^2 - p + 1)dp}{(p^3 + 1)\sqrt{p(p - 1)}}. \quad (5.10)$$

В силу (5.3) и $l = 1$ зависимость $p(\tau)$ найдем путем обращения интеграла

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{(p + 1)\sqrt{-p(1 - p)}} = \tau - \tau_0, \quad (5.11)$$

где начальное значение $p_0 \neq -1$. Очевидно, что $p(\tau)$ — элементарная функция τ . Если $p_0 = 0$, то при возрастании времени величина p должна убывать. Следовательно, в формулах (5.3), (5.10), (5.11) радикал следует выбрать со знаком минус. При дальнейшем изменении времени функция p убывает и достигает значение -1 за бесконечный промежуток времени, так как интеграл (5.11) расходится при $p \rightarrow -1$.

Рассмотрим зависимость $b_\rho(p)$ в промежутке $[-1, 0]$. Очевидно, $b_\rho(p) = 0$ при $p_0 = 0$, а далее функция p при изменении p от 0 до $\tilde{p}$, где $\tilde{p}$ — корень уравнения $8p^3 + 3p^2 + 2 = 0$, возрастает. Достигнув при $\tilde{p}$ максимального значения, функция $b_\rho(p)$ убывает. В силу расходимости интеграла из (5.10) при $p \rightarrow -1$ имеем $\alpha(p) \rightarrow -\infty$, а функция $b_\rho \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(\tau)$ расположен в круге на плоскости $b_\zeta = 1$, центр которого лежит на оси $O\zeta$, и имеет спиралевидную форму.

Рассмотрим подвижный годограф вектора $\mathbf{b}$. В силу $l = 1$ и выбора функции $b(\tau) = \frac{1}{2 - p^2}$, уравнение подвижного годографа имеет вид

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2 - p^2} (p\mathbf{e}_1 + \sqrt{-p(p + 1)}\mathbf{e}_2 + 2\sqrt{1 - p^2}\mathbf{e}_3). \quad (5.12)$$

Из (5.12) имеем

$$b_1(p) = \frac{p}{2-p^2}, \quad b_2(p) = \frac{\sqrt{-p(p+1)}}{2-p^2}, \quad b_3(p) = \frac{2\sqrt{1-p^2}}{2-p^2}. \quad (5.13)$$

Исключая в (5.13) переменную p , получим

$$2(b_1^2 + b_2^2)^2 + b_1(b_1^2 + b_2^2)^2 - b_1^4 = 0, \quad (5.14)$$

$$b_1^2 b_3^2 = 4b_2^2(2b_1^2 + b_2^2). \quad (5.15)$$

Уравнение (5.14) описывает цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными третьей координатной оси, а направляющая в полярных координатах $b_1 = \vartheta \cos \varphi$, $b_2 = \vartheta \sin \varphi$ имеет уравнение

$$\vartheta = \frac{\cos \varphi}{\cos^4 \varphi - 2}. \quad (5.16)$$

Для построения поверхности четвертого порядка (5.15) целесообразно это уравнение привести к виду

$$b_3 = \frac{2 \sin \varphi}{2 - \cos^4 \varphi} \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}. \quad (5.17)$$

Движение гироскопа Ковалевской, которое описывается соотношениями (5.1)–(5.3), в случае $l = 1$ можно представить качением без скольжения годографа (5.12) по годографу (5.9). Формулы (5.10), (5.13)–(5.17) служат вспомогательными для анализа годографов (5.9), (5.12). Преимущество данного истолкования перед истолкованием [20] состоит в том, что неподвижный годограф (5.9) является плоской кривой. Данное свойство приносит дополнительную информацию о движении гироскопа Ковалевской.

Рассмотрим движение эллипсоида инерции гироскопа Ковалевской в случае (5.1)–(5.3). Положим, что конец вектора (4.2) лежит на эллипсоиде инерции тела, то есть координаты вектора $\mathbf{b}$ в подвижной системе координат удовлетворяют уравнению

$$2b_1^2 + 2b_2^2 + b_3^2 = \text{const}. \quad (5.18)$$

Так как $b_1 = b(\tau)p$, $b_2 = b(\tau)q$, $b_3 = b(\tau)r$, то в силу равенств (5.1) из (5.18) получим (для записи $b(\tau)$ будем использовать переменную p)

$$b(p) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{(1-p)(p+2)}}, \quad (5.19)$$

где σ_0 — постоянная, $p = p(\tau)$. Запишем b_i с учетом (5.1), (5.19) (полагаем $\sigma_0 = 1$):

$$b_1(p) = \frac{p}{\sqrt{(1-p)(p+2)}}, \quad b_2(p) = \frac{\sqrt{-p(p+1)}}{\sqrt{(1-p)(p+2)}}, \quad b_3(p) = \frac{2\sqrt{1+p}}{\sqrt{p+2}}. \quad (5.20)$$

Исключим переменную p в первом и третьем соотношениях (5.20):

$$b_1^2 = \frac{(2 - b_3^2)^2}{8 - 3b_3^2}. \quad (5.21)$$

Следовательно, подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(p)$,

$$\mathbf{b}(p) = b_1(p)\mathbf{e}_1 + b_2(p)\mathbf{e}_2 + b_3(p)\mathbf{e}_3, \quad (5.22)$$

является линией пересечения поверхностей (5.18), (5.21). Компоненты неподвижного годографа вектора $\mathbf{b}(p)$

$$\mathbf{b}(p) = b_\xi(p)\mathbf{i}_1 + b_\eta(p)\mathbf{i}_2 + b_\zeta(p)\mathbf{i}_3$$

на основании (5.8), (5.19) запишем в виде

$$b_\xi(p) = \sqrt{\frac{-p(1+p^3)}{(1-p)(p+2)}} \cos \alpha(p), \quad b_\zeta(p) = \sqrt{\frac{-p(1+p^3)}{(1-p)(p+2)}} \sin \alpha(p), \quad (5.23)$$

$$b_\eta(p) = \frac{2-p^2}{\sqrt{(1-p)(p+2)}},$$

где $\alpha(p)$ определено второй формулой из (5.10). Уравнения (5.23) являются параметрическими уравнениями, которые описывают неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(p)$. Основным свойством неподвижного годографа является асимптотический характер, то есть при $\tau \rightarrow \infty$ эллипсоид инерции стремится к равномерному вращению относительно вертикали.

Заключение

Рассмотрены два частных случая решения С. В. Ковалевской. Ранее [20, 21] были исследованы свойства движения тела на основе теоремы Пуансо и уравнений П. В. Харламова. Применение в данной статье модифицированного метода Пуансо [25] дало возможность установить новые кинематические особенности в представлении движения гироскопа Ковалевской. Для первого случая решения в качестве подвижного годографа был принят плоский годограф вектора, коллинеарного вектору угловой скорости; движение тела представлено качением без скольжения данного годографа по неподвижному годографу. Во втором случае модифицированный метод истолкования движения тела был получен с помощью введения плоского неподвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости тела; показано, что неподвижный годограф — спиралевидная кривая. Общий прием для истолкования движения тела для рассматриваемых случаев решения С. В. Ковалевской основан на представлении движения качением подвижного годографа вспомогательного вектора, конец которого принадлежит эллипсоиду инерции тела, по неподвижному годографу этого вектора. Этот подход позволил описать картину движения гироскопа Ковалевской с помощью свойств движения эллипсоида инерции тела в неподвижном пространстве.

References

- [1] Kowalevski S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Math.*, 1889, vol. 12, pp. 177–232.
- [2] Gorr G. V., Kudryashova L. V., Stepanova L. A. *Classical problems of the dynamics of a rigid body. Development and current status*, Kiev: Naukova dumka, 1978 (Russian).
- [3] Delaunay N. B. Zur Frage von der geometrischen Deutung der Integrale von S. Kowalevski bei der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkte, *Mat. Sb.*, 1892, vol. 16, no. 2, pp. 346–351 (Russian).

- [4] Koval V. I., Kharlamov P. V. On the hodographs of angular velocity for Kovalevskaja gyroscope in the Delone case, *Mekh. Tverd. Tela*, 1979, № 11, pp. 3–17 (Russian).
- [5] Zhukovskii N. E. Geometric interpretation of the case considered by Kovalevskaya of the motion of a heavy rigid body about a fixed point, in *Collected Works: Vol. 1*, Moscow: Gostekhizdat, 1948, pp. 294–339 (Russian).
- [6] Appel'rot G. G. Concerning section 1 of the memoir of S. V. Kovalevskaya «Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe», and the appendix to this paper, *Mat. Sb.*, 1892, vol. 16, no. 3, pp. 483–507 (Russian).
- [7] Appelroth H. Beiträge zur Abhandlung: «Über den ersten Paragraphen der Abhandlung von S. Kowalevski: "Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe"», *Mat. Sb.*, 1892, vol. 16, no. 3, pp. 592–596.
- [8] Dokshevich A. I. *Finite-form solutions of the Euler–Poisson equations*, Kiev: Naukova Dumka, 1992 (Russian).
- [9] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Rigid body dynamics: Hamiltonian methods, integrability, chaos*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).
- [10] Kolosov G. V. *On some property of the Kovalevskaya problem on the rotation of a heavy rigid body about a fixed point*, Moscow: Sharapov, 1901 (Russian).
- [11] Mlodzieiowski B. C. Sur un cas du mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe, *Mat. Sb.*, 1896, vol. 18, no. 1, pp. 76–85 (Russian).
- [12] Kozlov V. V. *Methods of qualitative analysis in the dynamics of a rigid body*, 2nd ed., Moscow–Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2000 (Russian).
- [13] Kharlamov M. P. *Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics*, Leningrad: LGU, 1988 (Russian).
- [14] Gashenenko I. N. Geometric analysis of two-frequency quasiperiodic motions of the Kovalevskaya gyroscope, *Mekh. Tverd. Tela*, 1990, № 22, pp. 3–10 (Russian).
- [15] Kharlamov P. V. *Lectures on the dynamics of a rigid body*, Novosibirsk: NGU, 1965 (Russian).
- [16] Kharlamov P. V. Kinematic interpretation of the motion of a body with a fixed point, *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, no. 3, pp. 615–621; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1964, vol. 28, no. 3, pp. 502–507.
- [17] Poinso L. Théorie nouvelle de la rotation des corps, *J. Math. Pures Appl. (1)*, 1851, vol. 16, pp. 9–129.
- [18] Gashenenko I. N., Gorr G. V., Kovalev A. M. *Classical problems of the rigid body dynamics*, Kiev: Naukova Dumka, 2012 (Russian).
- [19] Gorr G. V., Kovalev A. M. *The gyrostat motion*, Kiev: Naukova Dumka, 2013 (Russian).
- [20] Gorr G. V., Savchenko A. Ya. On one case of motion of a heavy rigid body in the S. V. Kovalevskaya solution, *Mekh. Tverd. Tela*, 1970, № 2, pp. 66–73 (Russian).
- [21] Gorr G. V., Savchenko A. Ya. On a periodic motion in the S. V. Kovalevskaya solution, *Mekh. Tverd. Tela*, 1971, № 3, pp. 64–69 (Russian).
- [22] Kharlamov P. V. The motion of S. V. Kovalevskaya gyroscope in the B. K. Mlodzeevsky case, *Mekh. Tverd. Tela*, 1974, № 7, pp. 9–17 (Russian).
- [23] Kharlamov P. V., Koval V. I. The motion of the Kovalevskaya gyroscope in the Delaunay case, *Mekh. Tverd. Tela*, 1982, № 14, pp. 38–54 (Russian).
- [24] Gashenenko I. N., Kasyanik V. N. One particular case of motion of S. V. Kovalevskaya gyroscope, *Mekh. Tverd. Tela*, 1983, № 15, pp. 31–34 (Russian).
- [25] Gorr G. V. On an approach in the application of the Poinso theorem to the kinematic interpretation of the motion of a body with a fixed point, *Mekh. Tverd. Tela*, 2012, № 4, pp. 26–36 (Russian).
- [26] Gorr G. V., Sinenko A. I. A kinematic interpretation of the motion of a heavy rigid body with a fixed point, *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 3, pp. 233–241; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2014, vol. 78, no. 3, pp. 334–345.

- [27] Gorra G. V., Kovalev A. M. The use of Rodrigues–Hamilton parameters in interpreting the motion of a rigid body with a fixed point, *J. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 446–452; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 635–643.
- [28] Lurie A. I. *An analytical mechanics*, Moscow: Fizmatgiz, 1961 (Russian).
- [29] Chelnokov Yu. N. On the gyrohorizont compass theory in the Rodrigues–Hamilton parameters, *Prikl. Mekh.*, 1984, № 1, pp. 111–116 (Russian).
- [30] Koshlyakov V. N. *The Rodrigues–Hamilton parameters and their applications in the solids mechanics*, Kiev: Ukrainian Acad. Sci., 1994 (Russian).
- [31] Tkachenko A. I. On the application of the Rodrigues–Hamilton parameters in algorithms for determining the orientation of an object, in *Cybernetics and computer technology*, No. 69, Kiev: Naukova Dumka, 1986, pp. 47–52 (Russian).

On the motion of a heavy rigid body in two special cases of S. V. Kovalevskaya's solution

Gennady V. Gorra¹, Elena K. Shchetinina²

¹Institute of Applied Mathematics and Mechanics
ul. R. Luxemburg 74, Donetsk, 283114, Ukraine

²Kyiv National University of Trade and Economics
ul. Kioto 19, Kiev, 02156, Ukraine

¹gvgorra@gmail.com, ²elena-0607@ukr.net

Two particular cases of the Kovalevskaya solution are studied. A modified Poincaré method is applied for the kinematic interpretation of the body motion. According to this method, the body motion is represented by rolling without sliding of the mobile hodograph of the vector collinear to the angular velocity vector along the stationary hodograph of this vector. Two variants are considered: the first variant is characterized by a plane hodograph of the auxiliary vector; the second variant corresponds to the case where the hodograph of this vector is located on the inertia ellipsoid of the body.

MSC 2010: 70E17, 70E40

Keywords: Kovalevskaya's solution, Poincaré's method

Received September 12, 2017, accepted January 12, 2018

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 123–138 (Russian)