Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 289–307.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 37J60 37J35 70E18 70F25 70H45

Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

В работе исследуется управление при помощи трех гиростатов движением динамически несимметричного уравновешенного шара на плоскости, при условии, что шар катится без проскальзывания в точке контакта. Показана полная алгебраическая управляемость данной системы, указаны законы управления, обеспечивающие движение вдоль заданной траектории на плоскости и задающие необходимую ориентацию системы; приведены явные законы управления, осуществляющие простейшие движения рассматриваемой системы.

Ключевые слова: неголономная связь, неголономное распределение, управление, теорема Рашевского – Чжоу, дрейф

Получено 10 марта 2012 года
После доработки 2 июня 2012 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039), ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2012–2014 гг., 1.1248.2011 «Неголономные динамические системы и проблемы управления») и гранта президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 «Динамические системы классической механики и проблемы управления».

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Килин Александр Александрович
aka@rcd.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Содержание

1. Введение 290
2. Уравнения движения и первые интегралы 292
3. Полная управляемость на нулевом моменте 295
4. Явное управление вдоль траектории 298
4.1. Геометрические и динамические свойства качения на нулевом моменте . . . 298
4.2. Качение шара вдоль заданной траектории 301
5. Примеры 303
5.1. Качение по дуге окружности 303
5.2. Качение по синусоиде (слалом) 304

1. Введение

В работе изучено управление при помощи гироскопов движением динамически несимметричного уравновешенного шара по плоскости в предположении, что скорость точки контакта обращается в ноль (то есть проскальзывание отсутствует). Как известно, в таких случаях мы имеем дело с системой с неинтегрируемыми (неголономными) связями. В работах последних десятилетий динамический анализ таких систем и вопросы их управления представляют собой предмет активного исследования (например, см. статьи [5, 17, 18] и библиографию к ним, работы по так называемым неголономным манипуляторам [20, 22]). В настоящее время разного рода управление движением шара, движущегося по плоскости или другим поверхностям, подробно рассматривается в различных работах в связи с созданием различных систем передвижения, использующих шаровую форму мобильного робота, имеющего ряд преимуществ по сравнению с обычными колесными экипажами. Использование сферической оболочки для передвигающихся устройств восходит еще ко второй половине XIX века, интерес к такой конструкции особенно возрос в конце XX века в связи с развитием электроники и мобильной робототехники, инициированном, в частности, космическими исследованиями и созданием средств передвижения не только на Земле, но и на других планетах [51]. Исторический обзор можно найти, например, в работах [15, 23, 49].

Существуют различные инженерные решения для управления движением шарового робота. Как правило, в литературе встречаются три основные схемы. Первая, наиболее распространенная схема, это управление за счет перемещения центра масс внутри шара, для этого перемещения могут быть использованы различные варианты, такие как система маятникового типа, слайдеры, полозья, по которым движется масса, различные тележки, катающиеся внутри шара [3, 14, 15, 19, 34, 38, 45, 50, 52]. Вторая схема — это управление при помощи нескольких роторов за счет создания переменного гиростатического момента, то есть для управления шаром используется гиростатический эффект [29, 30]. Третья схема управления, также получившая распространение в последнее время, реализуется за счет деформации формы шара [48].

В данной работе рассматривается динамически несимметричный шар, внутри которого расположены три уравновешенных ротора, так что центр масс всей конструкции совпадает с геометрическим центром шара. Такой выбор не случаен, он обусловлен тем, что при нулевой угловой скорости вращения роторов эта задача совпадает с интегрируемой задачей, поставленной и проинтегрированной С. А. Чаплыгиным (1903 г.) [11], кроме того

Чаплыгин указал некоторые геометрические свойства траекторий шара. С современными исследованиями, посвященными шару Чаплыгина можно ознакомиться по работе [32], где проведен бифуркационный и компьютерный анализ системы и построены некоторые траектории точки контакта. Когда вращение роторов происходит уже с ненулевыми скоростями, то эта задача в простейшем случае, когда тело является осесимметричным, а гиростатический момент роторов направлен вдоль оси динамической симметрии, достаточно подробно также была исследована Бобылевым [1] и Жуковским [6].

Интегрируемость задачи о качении динамического несимметричного шара с произвольным трехмерным вектором постоянного гиростатического момента была показана А. П. Маркеевым в 1986 году [7]. Компьютерный анализ движения точки контакта был частично проведен в [32], топологический анализ устойчивости различных частных движений шара выполнен в [9], где использована развитая в [2] теория анализа интегрируемых систем, основанная на введенном авторами понятии бифуркационного комплекса. При том, что результат [7], к сожалению, не особенно известен в среде специалистов по робототехнике, следует отметить, что интегрируемость общей задачи о движении шара Чаплыгина с гиростатом и связанное с этим существование трехмерного вектора обобщенного кинетического момента, постоянного в неподвижной системе координат, с теоретической точки зрения дает дополнительные преимущества при использовании роторов в целях управления. В частности, с помощью редукции на общую поверхность уровня данных интегралов обобщенного кинетического момента дифференциальные уравнения системы с управлением сводятся к уравнениям первого порядка, что позволяет явно построить алгоритм управления. Более того управление выражается алгебраически через заданную траекторию точки контакта и это с точки зрения теоретической простоты позволяет надеяться, что по крайне мере для данной системы многие проблемы управления могут быть разрешены полностью. В данной работе мы достаточно подробно изучаем одну из возможных задач, связанную с управлением шаром «на нулевом моменте», так что при этом в системе с управлением отсутствует дрейф, а движение шара начинается из состояния покоя, для этого случая мы также приводим явно закон управления для ряда характерных траекторий шара. Достаточно очевидные обобщения этой задачи, требующие изучения, связаны с анализом управления системой при ненулевом начальном толчке, исследованием движения по более сложным поверхностям, например, по наклонной плоскости. Кроме того, имеется множество других проблем, которые также систематически рассматриваются в теории управления — планирование траектории, оптимальное управление, стабилизация движения, исследование обратной связи. Мы предполагаем заняться ими в следующих публикациях.

В заключение мы упомянем некоторые публикации, посвященные различным направлениям исследования данной проблемы. Прежде всего укажем на основные работы [13, 37, 39, 42], в которых рассматриваются различные вопросы управления неголономными системами (то есть, полагается соответствующая неголономная связь). Имеется также значительное количество теоретических работ, рассматривающих достаточно абстрактные задачи теории управления (с применением современной геометрической динамики, редукции и субримановой геометрии, см., например, [31, 46, 47]); такие исследования, как правило, малоинтересны с точки зрения приложений и непонятны инженерам-механикам. С другой стороны, можно отметить чисто инженерные работы [29, 30], в которых используются не только неудобные, но и некорректные уравнения движения (если таковые вообще рассматриваются) [29, 30]. Интересны работы [40, 41], в которых обозначаются различные стратегии управления и планирования траекторий движения шара. В этой работе мы старались держаться «золотой середины». С одной стороны, она представляет интерес с точки зрения классической ме-

ханики и теории управления (то есть, когда рассматривается конкретная система с явным решением задачи управления). С другой стороны, по своему изложению и используемой форме уравнений движения данная работа может быть использована инженерами в качестве некой теоретической базы при дальнейших исследованиях, которые и превращают модель катящегося шара в сложную робототехническую систему с различной спецификой (вопросы стабилизации, обратные связи, использование различных датчиков и другие проблемы, вплоть до искусственного интеллекта).

Заметим, что рассматриваемая в упомянутых выше работах (и в данной статье) «классическая» модель качения не является вполне корректной, поскольку в реальной системе в области контакта действуют силы трения, которыми мы в первом приближении пренебрегаем. Это приводит к тому, что система с течением времени отклоняется от «базовой» траектории, проложенной в рамках «классической» неголономной модели. Для обнаружения этого эффекта и корректировки движения, как правило, используются установленные на шаре различные датчики, реализующие обратную связь. Отметим, что преимущество неголономной модели качения по сравнению с более сложными моделями, учитывающими трение, заключается в том, что она позволяет получить закон управления в явном виде.

Помимо «классической» модели в теории управления достаточно широкое применение получила другая неголономная модель качения, в которой предполагается, что в точке контакта отсутствует не только проскальзывание, но и верчение/прокручивание (то есть проекция угловой скорости тела на нормаль к опоре равна нулю) [12, 23, 28, 39]. Любопытно, что в теории управления и робототехнике эта модель качения используется достаточно давно, в то время как среди специалистов по динамике неголономных систем она стала применяться лишь недавно [4, 33]. В работе [33] предложены краткие образные названия для этих моделей качения: marble-rolling — для «классической» и rubber-rolling — для качения без верчения. Отметим, что в отличие от классической модели [4] в случае качения без верчения динамика системы изучена очень слабо и требует дальнейших исследований. Кроме того, в будущем интересно изучить не только неголономные модели, но и модели с трением, как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения.

Авторы статьи благодарят А. В. Болсинова за внимание к работе и ценные обсуждения.

Статья посвящается профессору А. П. Маркееву по случаю его семидесятилетия.

2. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим систему, состоящую из шара, катящегося по плоскости без проскальзывания, и установленных в нем трех роторов (см. рис. 1). При этом будем полагать, что конструкция системы удовлетворяет ряду ограничений:

– центр масс всей системы шар + роторы находится в геометрическом центре шара;

– все роторы одинаковы, осесимметричны и оси вращения совпадают с их осями симметрии, то есть их вращение не меняет распределение масс системы;

– оси вращения роторов некомпланарны, а их угловые скорости являются заданными функциями времени $\omega_k(t)$, $k = 1, 2, 3$.

Выберем подвижную систему координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, жестко связанную с главными осями инерции системы шар + роторы (см. рис. 1). Обозначим через $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ скорость центра шара и его угловую скорость, где *здесь и далее* (*если не оговорено обратное*) *все векторы проецируются на подвижные оси*, тогда уравнение связи, задающее условие непроскальзывания,

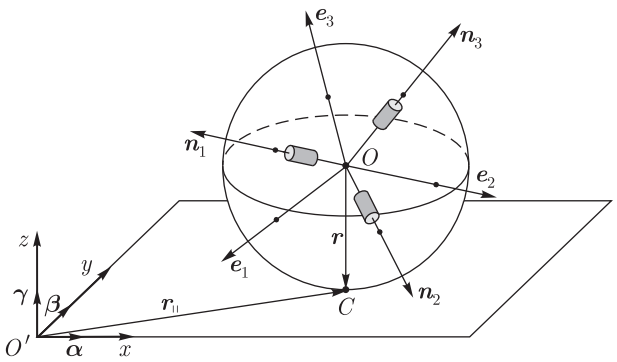

Рис. 1. Шар с тремя роторами на плоскости.

можно записать в виде

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = 0, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{r} = -R\boldsymbol{\gamma}$ — радиус-вектор из центра шара в точку контакта, R — радиус шара, а $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор нормали к плоскости (см. рис. 1).

Определим дополнительно неподвижную систему координат $O'xyz$, так что ось $O'z$ перпендикулярна опорной плоскости, и обозначим $\boldsymbol{r}_{||} = (x, y)$ — координаты точки контакта C в этих осях. Обозначим также через $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ орты неподвижных осей $O'xyz$, спроецированные на подвижные оси $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, тогда ортогональная матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3) \tag{2.2}$$

характеризует ориентацию тела, а пара $(\boldsymbol{r}_{||}, \mathbf{Q})$ однозначно определяет конфигурацию системы. Таким образом, *конфигурационное пространство системы пятимерно и представляет собой произведение* $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$, *и уравнение* (2.1) *задает в нем трехмерное неголономное распределение*.

Уравнения движения рассматриваемой системы со связями (2.1) можно записать в виде уравнений Феррерса в квазискоростях (частный случай см. [26]) с неопределенными множителями

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{V}}\right)^{\cdot} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{V}} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{V}}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}}\right)^{\cdot} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\Omega}}, \tag{2.3}$$

где λ_k — неопределенные множители, а T — кинетическая энергия системы шар + роторы.

Обозначим через m, $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ массу и тензор инерции системы шар + роторы, i — моменты инерции роторов относительно осей вращения, $\boldsymbol{n}_k$, $k = 1, 2, 3$, — единичные векторы, задающие направление осей вращения роторов. В подвижной системе координат, связанной с шаром, векторы $\boldsymbol{n}_k$ являются постоянными. Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии оболочки

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\Omega})$$

и кинетической энергии роторов

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \boldsymbol{n}_k, \mathbf{I}_k(\boldsymbol{\Omega} + \omega_k \boldsymbol{n}_k)\big), \quad k = 1, 2, 3,$$

где m_0, m_k, $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_k$ — масса и тензоры инерции относительно осей $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ оболочки и роторов соответственно. Пользуясь тем, что оси роторов задаются собственными векторами их тензоров инерции, то есть $\mathbf{I}_k\boldsymbol{n}_k = i\boldsymbol{n}_k$, после приведения подобных получим:

$$T = T_0 + \sum_k T_k = \frac{1}{2}m\,\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{K}(t)) + \frac{1}{2}\sum_k i\omega_k^2(t), \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{K}(t) = \sum\limits_k i\omega_k(t)\boldsymbol{n}_k$ — вектор гиростатического момента.

Из уравнения связей (2.1) и уравнений движения (2.3) находим неопределенные множители в виде

$$\boldsymbol{\lambda} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}, \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Подставив их в уравнения (2.3), получим

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{K})^{\cdot} + m\boldsymbol{r} \times (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}) = (\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{K}) \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{2.6}$$

Эволюция переменных $(\boldsymbol{r}_{||}, \mathbf{Q})$ описывается уравнениями Пуассона и кинематическими соотношениями (вытекающими из условия непроскальзывания) следующего вида:

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}, \\ \dot{x} = R(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Omega}), \quad \dot{y} = -R(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Omega}). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Уравнения (2.6) *и* (2.7) *образуют полную систему уравнений, описывающую движение шара с роторами по плоскости.*

Вследствие условия ортогональности, уравнения движения допускают геометрические интегралы движения:

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{2.8}$$

Определим вектор момента системы относительно точки контакта

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{K}(t). \tag{2.9}$$

Можно показать, что его эволюция описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\Omega},$$

следовательно, $\boldsymbol{M}$ — постоянный вектор в неподвижных осях, а его проекции на оси $O'xyz$ являются интегралами движения:

$$M_\alpha = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{const}, \quad M_\beta = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\beta}) = \mathrm{const}, \quad M_\gamma = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{const}. \tag{2.10}$$

Замечание. Если скорости роторов постоянны, то сохраняется также энергия системы

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}),$$

и система является интегрируемой [7]. В общем случае (когда $\boldsymbol{\omega}$ зависит от t) этот интеграл пропадает.

3. Полная управляемость на нулевом моменте

Рассмотрим вопрос об управлении движением шара по плоскости при помощи изменения вектора гиростатического момента $\boldsymbol{K}(t)$. Для этого ограничим систему на уровень первых интегралов (2.10) и представим уравнения движения в форме, стандартной в теории управления. Обращая уравнение (2.9) относительно $\boldsymbol{\Omega}$, получим

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_c), \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_c), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_c),\\ \dot{x} = R(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_c), \quad \dot{y} = -R(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_c),\\ \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{S}(M_\alpha \boldsymbol{\alpha} + M_\beta \boldsymbol{\beta} + M_\gamma \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\Omega}_c = -\mathbf{S}\boldsymbol{K}(t),\\ \mathbf{S} = \mathbf{A} + \left(D^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})\right)^{-1} (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}) \otimes (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I} + D\mathbf{E})^{-1}.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Таким образом, наличие интегралов момента (2.10) позволяет перейти от уравнений на фазовом пространстве к системе уравнений на конфигурационном пространстве, что существенно облегчает решение задач управления.

Замечание. Более строго необходимо рассматривать управление при помощи задания электрических напряжений $u_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, на каждом из электродвигателей, приводящих в движение роторы. В то же время, на практике, как правило, достаточно использовать линейную аппроксимацию для момента, развиваемого электродвигателем [8], что приводит к уравнениям

$$i\dot{\omega}_k = c_u u_k(t) - c_v \omega_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $c_v \omega_k$ — момент противоэлектродвижущей силы, а коэффициенты c_u, c_v могут быть выражены через характеристики двигателя [8]. Кроме того, угловые скорости $\omega_k(t)$ связаны с вектором гиростатического момента соотношением (2.9), следовательно, напряжения по заданному закону управления $\boldsymbol{K}(t)$ могут быть найдены посредством соотношения

$$\boldsymbol{u}(t) = c_u^{-1} \mathbf{N}^{-1} \left(\dot{\boldsymbol{K}}(t) + \frac{c_v}{i} \boldsymbol{K}(t) \right), \quad \boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)),$$

где $\mathbf{N} = \|n_{kl}\|$ — матрица, составленная из компонент векторов $\boldsymbol{n}_k$. Здесь мы предполагаем, что все электродвигатели одинаковые.

При $\boldsymbol{\Omega}_c = 0$ (то есть при $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0$) получим задачу о движении свободного шара Чаплыгина, подробно изученную во многих работах, см. работу [32], в которой приведена достаточно подробная библиография. В теории управления эти слагаемые, содержащие только $\boldsymbol{\Omega}_0$, называются дрейфом. Всюду далее в этой работе мы ограничимся случаем, когда дрейф отсутствует, то есть $\boldsymbol{\Omega}_0 = 0$; это эвивалентно тому, что значения всех интегралов (2.10) выбираются нулевыми

$$M_\alpha = M_\beta = M_\gamma = 0.$$

Кроме того, мы ограничим наше рассмотрение лишь следующей проблемой.

Пусть в начальный момент времени шар покоится, и угловые скорости роторов равны нулю. Требуется подобрать такое управление роторами $\boldsymbol{K}(t)$, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, чтобы шар в момент времени T остановился в заданной точке с некоторой заданной ориентацией. (3.2)

В этом разделе мы ограничимся доказательством принципиальной возможности управления данной системой, опираясь на теорему Рашевского – Чжоу, которую мы приведем здесь в формулировке Рашевского [10]:

Теорема 4. *Если среди векторных полей $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_m$ и среди составленных из них последовательными применениями скобки Ли полей можно указать n векторных полей $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_n$, линейно независимых в любой точке области $\mathcal{G}$, где $\dim \mathcal{G} = n$, то из любой точки области $\mathcal{G}$ можно прийти в любую другую, смещаясь конечное число раз по траекториям полей $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_m$.*

Заметим, что если перейти к новым векторным полям при помощи линейного преобразования

$$\boldsymbol{X}_k = \sum_{k'=1}^{m} S_{kk'}(\boldsymbol{z})\widetilde{\boldsymbol{X}}_{k'}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

где $\mathbf{S}$ — $m \times m$-матрица, невырожденная в каждой точке $\boldsymbol{z} \in \mathcal{G}$, то теорема о полной управляемости останется справедливой и для полей $\widetilde{\boldsymbol{X}}_1, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{X}}_m$.

Действительно, вычисляя парные коммутаторы, находим

$$\left[\boldsymbol{X}_l, \boldsymbol{X}_k\right] = \sum_{c',k'} S_{ll'} S_{kk'} \left[\widetilde{\boldsymbol{X}}_{l'}, \widetilde{\boldsymbol{X}}_{m'}\right] + \sum_{k'} \left(\sum_{l'} \left(S_{ll'} \widetilde{\boldsymbol{X}}_{l'}(S_{kk'}) - S_{kl'} \widetilde{\boldsymbol{X}}_{l'}(S_{lk'}) \right) \right) \widetilde{\boldsymbol{X}}_{k'}.$$

Из этого соотношения следует, что линейные оболочки полей и их парных коммутаторов совпадают для обеих систем векторных полей. Здесь мы использовали невырожденность тензорного произведения $\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}$: для квадратных $n \times n$-матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ известна формула $\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A})^n (\det \mathbf{B})^n$. Это рассуждение естественным образом обобщается и на коммутаторы более высоких порядков.

Хотя уравнения (3.1) имеют наиболее простую алгебраическую форму, при использовании данной теоремы удобнее перейти к локальным переменным на конфигурационном пространстве $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$. Для параметризации ортогональной матрицы (2.2) выберем углы Эйлера так, что

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Обозначим точку конфигурационного пространства $\mathcal{M}$ через $\boldsymbol{z} = (\theta, \varphi, \psi, x, y)$ и запишем уравнения (3.1) в локальных переменных

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \sum_{l=1}^{3} K_l(t)\boldsymbol{X}_l(\boldsymbol{z}) = -\sum_{k=1}^{3} \Omega_{ck}\widetilde{\boldsymbol{X}}_k(\boldsymbol{z}),$$
$$\boldsymbol{\Omega}_c = -\mathbf{S}\boldsymbol{K}.$$

Следовательно, для полей получим представление через компоненты матрицы $\mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma}) = \|S_{lk}\|$ следующего вида:

$$\boldsymbol{X}_l = \sum_{k=1}^{3} S_{lk}\widetilde{\boldsymbol{X}}_k,$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_1 = \Bigg(\cos\varphi, -\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi, \frac{\sin\varphi}{\sin\theta},$$
$$R(\cos\varphi\cos\psi + \cos\theta\sin\varphi\cos\psi), -R(\cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi)\Bigg),$$
$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_2 = \Bigg(-\sin\varphi, -\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi, \frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$
$$-R(\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\cos\varphi\cos\psi), R(\sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi)\Bigg),$$
$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_3 = (0, 1, 0, -R\sin\theta\cos\psi, -R\sin\theta\sin\psi).$$

Как мы видим, поля $\widetilde{\boldsymbol{X}}_k(\boldsymbol{z})$ имеют существенно более простую форму, и для них применить теорему Рашевского – Чжоу не составляет труда. Действительно, вычисляя коммутаторы, находим

$$\boldsymbol{Y}_1 = \big[\widetilde{\boldsymbol{X}}_1, \widetilde{\boldsymbol{X}}_3\big] + \widetilde{\boldsymbol{X}}_2 =$$
$$= \big(0, 0, 0, R(\sin\varphi\sin\psi - \cos\theta\cos\varphi\cos\psi), -R(\sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi)\big),$$
$$\boldsymbol{Y}_2 = \big[\widetilde{\boldsymbol{X}}_2, \widetilde{\boldsymbol{X}}_3\big] - \widetilde{\boldsymbol{X}}_1 =$$
$$= \big(0, 0, 0, R(\cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\sin\varphi\cos\psi), -R(\cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi)\big).$$

Можно показать, что все векторные поля $\widetilde{\boldsymbol{X}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}_2$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}_3$, $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$ независимы, следовательно, справедливо

Предложение 1. *Шар Чаплыгина с тремя независимыми роторами, оси вращения которых некомпланарны, при нулевом моменте относительно точки контакта является вполне управляемой системой относительно переменных* $\boldsymbol{z}$.

Согласно теореме Рашевского – Чжоу, путь из начальной точки $\boldsymbol{z}_0$ в конечную $\boldsymbol{z}_1$ может быть реализован из отрезков траекторий векторных полей $\widetilde{\boldsymbol{X}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}_2$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}_3$. В современной литературе такое управление часто называют управлением при помощи гейтов [36, 43].

Замечание. При наличии трех управляющих роторов линейная оболочка векторных полей $\widetilde{\boldsymbol{X}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}_2$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}_3$ (соответствующих управлениям) в каждой точке M совпадает со всем неголономным распределением, заданным связью (2.1).

В случае когда имеется не три, а лишь два управляющих ротора, вектор гиростатического момента задается соотношением

$$\boldsymbol{K} = i\omega_1\boldsymbol{n}_1 + i\omega_2\boldsymbol{n}_2,$$

где $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ не параллельны.

Из этого следует, что не все компоненты вектора $\boldsymbol{K}$ являются независимыми, а уравнения на группе (3.1) могут быть представлены в форме

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \sum K_l\boldsymbol{X}_l = \omega_1\boldsymbol{X}_1' + \omega_2\boldsymbol{X}_2',$$
$$\boldsymbol{X}_1' = n_{11}\boldsymbol{X}_1 + n_{12}\boldsymbol{X}_2 + n_{13}\boldsymbol{X}_3, \quad \boldsymbol{X}_2' = n_{21}\boldsymbol{X}_1 + n_{22}\boldsymbol{X}_2 + n_{23}\boldsymbol{X}_3,$$

где n_{kl} — компоненты векторов $\boldsymbol{n}_k$, $k = 1, 2$. Тем не менее, непосредственным вычислением можно показать, что линейная оболочка полей $\boldsymbol{X}_1'$, $\boldsymbol{X}_2'$, $\big[\boldsymbol{X}_1', \boldsymbol{X}_2'\big]$ совпадает с линейной оболочкой полей $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$, и, следовательно, теорема Рашевского – Чжоу остается справедливой и для этого случая.

Предложение 2. *Шар Чаплыгина с двумя независимыми роторами, оси которых не параллельны на нулевом уровне момента относительно точки контакта, является вполне управляемой системой.*

Если момент (2.10) не равен нулю, то в уравнениях (3.1) появляется *ненулевой дрейф* ($\boldsymbol{\Omega}_0 \neq 0$), причем в этом случае при $\boldsymbol{\Omega}_c = 0$ (то есть в случае чистого дрейфа) система (3.1) описывает интегрируемую задачу о качении свободного шара Чаплыгина. Для систем с дрейфом в работе [16] (см. также [24]) доказывается теорема об управлении, в которой помимо полноты линейной оболочки векторных полей и их коммутаторов требуется, чтобы для чистого дрейфа в фазовом пространстве системы существовало всюду плотное множество точек, устойчивых по Пуассону (для краткости говорят об устойчивости дрейфа по Пуассону). С другой стороны, существующие исследования динамики шара Чаплыгина [11, 25, 32] позволяют высказать гипотезу, что почти все траектории точки контакта в этой системе некомпактны. Очевидно, этот вопрос требует дополнительного изучения.

Замечание. Напомним, что точка $\boldsymbol{z}_0$ системы $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})$ называется устойчивой по Пуассону, если для траектории $\boldsymbol{z}(t)$, выходящей из $\boldsymbol{z}_0$ (то есть $\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0$), найдутся последовательности $t_k^+ \to +\infty$, $t_k^- \to -\infty$, такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{z}(t_k^+) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{z}(t_k^-) = \boldsymbol{z}_0.$$

Замечание. Для полноты приведем также теорему об управляемости в формулировке Чжоу [21] в современных обозначениях.

Теорема 5. *Пусть на многообразии $\mathcal{M}$ ($\dim \mathcal{M} = n$) задана система векторных полей $B_r = \{\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r\}$, и ее полное расширение B_s состоит из $\boldsymbol{X}_k$ и полей, составленных последовательным применением к ним скобки Ли, тогда в каждой регулярной точке $\boldsymbol{a}$ для полного расширения B_s, существует система $n - s$ интегралов $\varphi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_{n-s}(\boldsymbol{x})$. Каждую точку интегрального многообразия $\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \varphi_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \varphi_{n-s}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{n-s}(\boldsymbol{a})$, проходящего через $\boldsymbol{a}$, можно соединить с точкой $\boldsymbol{a}$ с помощью пути, состоящего из траекторий системы B_r.*

Отметим, что Чжоу не использовал скобку Ли явно, а определил полное расширение при помощи эквивалентного метода инфинитезимальных преобразований к фазовым потокам системы B_r.

4. Явное управление вдоль траектории

4.1. Геометрические и динамические свойства качения на нулевом моменте

В предыдущем разделе была доказана полная управляемость шара Чаплыгина с роторами, то есть принципиальная возможность перекатить шар по плоскости без проскальзывания из начального положения, характеризующегося локальными координатами $\boldsymbol{z}_0 = (\theta_0, \varphi_0, \psi_0, x_0, y_0)$, в конечное $\boldsymbol{z}_f = (\theta_f, \varphi_f, \psi_f, x_f, y_f)$. Теперь мы перейдем к построению явного алгоритма управления шаром вдоль заданной траектории на плоскости, для этого приведем ряд достаточно простых геометрических фактов, описывающих качение без проскальзывания сферы по плоскости. Всюду в этом разделе будем полагать момент относительно точки контакта равным нулю:

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{K}(t) = 0. \tag{4.1}$$

Замечание. Очевидно, что для существования решения данной задачи управления необходимо, чтобы длина кривой $\boldsymbol{r}_{||}(\boldsymbol{s})$ на плоскости была не меньше, чем расстояние (вдоль геодезической) на шаре между точками $\boldsymbol{r}(s_0)$ и $\boldsymbol{r}(s_f)$.

Прежде всего остановимся на геометрическом смысле углов Эйлера для данного случая, которые задаются соотношениями (3.3); полный поворот $\mathbf{Q}$ представляет собой композицию трех поворотов (см. рис. 2):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_3(\varphi)\mathbf{Q}_1(\vartheta)\mathbf{Q}_3(\psi),$$

$$\mathbf{Q}_1(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q}_3(u) = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом $\boldsymbol{\gamma} = (\sin\theta\cos\varphi', \sin\theta\sin\varphi', \cos\theta)$, $\varphi' = {}^{\pi}\!/_2 - \varphi$.

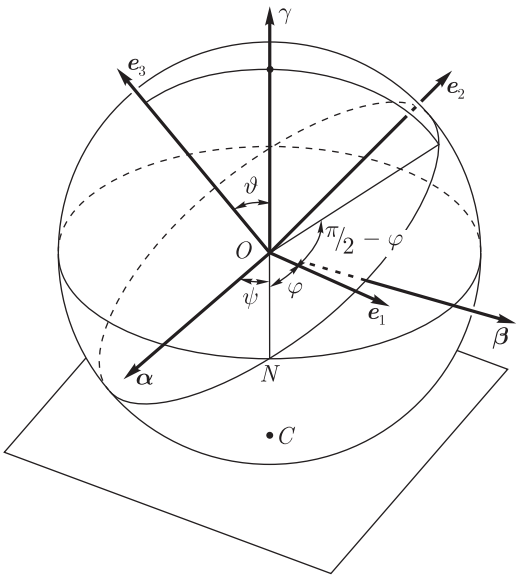

Рис. 2. Геометрический смысл углов Эйлера.

Напомним, что радиус-вектор из центра шара O в точку контакта с плоскостью C задается соотношением $\boldsymbol{r} = -R\boldsymbol{\gamma}$ (см. (2.1)), следовательно, величины (θ, φ) можно считать сферическими координатами точки контакта в системе главных осей шара $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$. Таким образом, положение и ориентация шара на плоскости могут быть заданы следующим образом:

отметим точку на плоскости с координатами (x, y) и точку на шаре со сферическими координатами, определенными выше, (θ, φ), совместим эти точки и повернем шар вокруг вертикали так, чтобы угол между линией узлов ON и осью Ox был равен ψ, (4.2)

где линия узлов ON является линией пересечения плоскости $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и горизонтальной плоскости $O\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$.

Укажем еще одно простое геометрическое свойство, характеризующее кинематику качения без проскальзывания.

Предложение 3. *Пусть при качении шара точка контакта C описывает гладкую кривую на плоскости $\boldsymbol{r}_{||}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ и на поверхности шара $\boldsymbol{r}(t) = -R\boldsymbol{\gamma}(t)$, где t — время, тогда скорости движения по этим кривым совпадают, то есть в подвижных осях выполнено соотношение*

$$\dot{x}\boldsymbol{\alpha} + \dot{y}\boldsymbol{\beta} = -R\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \tag{4.3}$$

ориентация шара $\mathbf{Q}$ в каждый момент времени определена однозначно, при этом угол нутации ψ находится из соотношений

$$\sin\psi = \frac{\dot{x}\dot{\theta} - \dot{y}\dot{\varphi}\sin\theta}{R(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)}, \quad \cos\psi = -\frac{\dot{y}\dot{\theta} + \dot{x}\dot{\varphi}\sin\theta}{R(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Действительно, заметим, что скорости точки контакта C и центра шара O совпадают и в подвижных осях определяются соотношением $\boldsymbol{V} = \dot{x}\boldsymbol{\alpha} + \dot{y}\boldsymbol{\beta}$; согласно уравнениям (2.7), $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = -R\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = R\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. Подставляя эти соотношения в уравнение связи (2.1), получим требуемое соотношение (4.3). Домножая равенство (4.3) слева и справа на матрицу $\mathbf{Q}$, заданную равенством (3.3), получим

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R\sin\theta\dot{\varphi} \\ -R\dot{\theta} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Разрешая эту систему относительно $\cos\psi$ и $\sin\psi$, получим (4.4).

Как следствие получим, что *длины кривых, описываемых точкой контакта на плоскости и сфере, совпадают*. В дальнейшем мы будем параметризовать обе кривые натуральным параметром — длиной s.

Замечание. Соотношение (4.5) означает, что касательный вектор вдоль кривой на плоскости $\boldsymbol{\tau}_p = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_{||}(s)}{\partial s}$, вычисленный в неподвижных осях, и касательный вектор к кривой на сфере $\boldsymbol{\tau}_b = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(s)}{\partial s}$, вычисленный в осях, связанных с шаром, в точке контакта C совмещаются друг с другом поворотом вокруг вертикали на угол $\pi/2 + \psi$.

Опираясь на эти свойства, докажем два естественных утверждения, позволяющих строить различные законы управления.

Предложение 4. *Пусть $\boldsymbol{M} = 0$, для всякой заданной точки контакта на поверхности шара $\boldsymbol{r}_0 = -R\boldsymbol{\gamma}_0$ существует такая вектор-функция гиростатического момента*

$$\boldsymbol{K}(t) = \mu(t)\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}_0, \tag{4.6}$$

что шар совершает вращение вокруг вертикали, не передвигаясь по плоскости, где $\mu(t)$ — произвольная функция.

Доказательство. Согласно уравнениям (2.7), для данного движения выполняются соотношения

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}_0 = 0, \quad (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

Эти уравнения совместны и имеют ненулевое решение вида

$$\boldsymbol{\Omega} = \mu\boldsymbol{\gamma}_0,$$

где μ — произвольная функция. Подставляя $\boldsymbol{\Omega}$ в (4.1), находим:

$$\boldsymbol{K}(t) = \mu(t)\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}_0.$$

■

Предложение 5. *Пусть* $\boldsymbol{M} = 0$ *и заданы две гладкие кривые одинаковой длины: одна — на плоскости* $\boldsymbol{r}_{||}(s) = \big(x(s), y(s)\big)$, *другая — на сфере* $\boldsymbol{r}(s) = -R\boldsymbol{\gamma}(s)$ *(в сферических координатах, соответственно,* $\vartheta(s)$, $\varphi(s)\big)$, *тогда существует единственная гладкая вектор-функция для гиростатического момента*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{K}(t) = -\dot{s}(t)\left((\mathbf{I} + D\mathbf{E})\left(\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} \times \boldsymbol{\gamma}\right) + (k_p - k_b)\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}\right),\\ k_p = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}, \quad k_b = R^2\left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{ds^2}\right),\end{gathered} \tag{4.7}$$

такая, что при качении шара точка контакта C *движется вдоль указанных кривых, здесь* $s(t)$ *— определяет закон движения по траектории.*

Доказательство. Для нахождения вектора гиростатического момента перепишем уравнение (4.1) в виде

$$-\boldsymbol{K}(t) = (\mathbf{I} + D\mathbf{E})\boldsymbol{\Omega} - D\Omega_\gamma\boldsymbol{\gamma},$$

где $\Omega_\gamma = (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma})$ — проекция угловой скорости на нормаль к плоскости. Умножая векторно слева и справа на $\boldsymbol{\gamma}$ уравнение Пуассона $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}$, находим

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} + \Omega_\gamma\boldsymbol{\gamma}.$$

Пользуясь этими двумя соотношениями, представим искомый вектор гиростатического момента в форме

$$\boldsymbol{K}(t) = -(\mathbf{I} + D\mathbf{E})(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}) - \Omega_\gamma\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}. \tag{4.8}$$

Поскольку для заданной траектории $\boldsymbol{\gamma}(s)$ находим $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{s}(t)\dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}$, первое слагаемое легко вычисляется. Для нахождения функции Ω_γ воспользуемся следующим геометрическим фактом [35].

Лемма 1. *При качении без проскальзывания шара по плоскости выполнено соотношение*

$$k_p = k_b + \frac{\Omega_\gamma}{\dot{s}}, \tag{4.9}$$

где k_p *— кривизна траектории точки контакта на плоскости, а* k_b *— геодезическая кривизна траектории на шаре, равная кривизне проекции этой кривой на касательную плоскость в точке контакта.*

Вычисляя эти кривизны по известным формулам, получим

$$k_p = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}, \quad k_b = R^2\left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{ds^2}\right).$$

Подставляя полученные выражения в (4.9) и (4.8), получим требуемое соотношение. ■

4.2. Качение шара вдоль заданной траектории

Теперь, опираясь на доказанные выше утверждения, можно указать явные алгоритмы решения задачи (3.2) об управлении шаром Чаплыгина. Приведем возможный алгоритм при дополнительном условии, что на плоскости задана траектория точки контакта $\boldsymbol{r}_{||}(s) = \big(x(s), y(s)\big)$, соединяющая начальное (x_0, y_0) и конечное (x_f, y_f) положения шара.

Как и выше, обозначим $\boldsymbol{z}_0 = (\theta_0, \varphi_0, \psi_0, x_0, y_0)$ — начальное состояние шара, $\boldsymbol{z}_f = (\theta_f, \varphi_f, \psi_f, x_f, y_f)$ — конечное.

1. На первом шаге проведем на шаре кривую $\boldsymbol{r}(s)$ той же длины, что и на плоскости, соединяющую точки с координатами (θ_0, φ_0) и (θ_f, φ_f).

2. Повернем шар на месте вокруг вертикали согласно (4.6) так, чтобы касательные кривых на шаре и плоскости совпали. Для этого вычислим требуемый угол ψ_1 согласно соотношениям (4.4):

$$\psi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\theta\,\dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d\theta}{ds}}{\sin\theta\,\dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d\varphi}{ds} + \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d\theta}{ds}}\right)\Bigg|_{z=z_0} - \operatorname{sgn}\left(\sin\theta\,\frac{dx}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d\theta}{ds}\right)\Bigg|_{z=z_0}\pi,$$

а затем подберем функцию $\mu(t)$ в соотношении (4.6) так, чтобы

$$\psi_1 - \psi_0 = \int\limits_0^{t_1} \mu(t)\,dt, \quad \mu(t_1) = \mu(0) = 0.$$

Равенство нулю на концах интервала гарантирует остановку роторов в начале и в конце движения.

3. Зададим закон движения по траектории $s(t)$, удовлетворяющий условию

$$\dot{s}(t_1) = \dot{s}(t_2) = 0, \tag{4.10}$$

и зададим управление гиростатическим моментом согласно (4.7), что позволяет за время $t_2 - t_1$ прокатить шар по заданной траектории с остановкой в конце движения.

4. Вычислим угол ψ_2 в конечной точке

$$\psi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\theta\,\dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d\theta}{ds}}{\sin\theta\,\dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{d\varphi}{ds} + \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{d\theta}{ds}}\right)\Bigg|_{z=z_f} - \operatorname{sgn}\left(\sin\theta\,\frac{dx}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d\theta}{ds}\right)\Bigg|_{z=z_f}\pi.$$

Вновь поворачиваем шар вокруг вертикали в соответствии с (4.6), при этом

$$\psi_f - \psi_2 = \int\limits_{t_2}^{T} \mu(t)\,dt, \quad \mu(t_2) = \mu(T) = 0.$$

Таким образом за промежутки времени $[0, T]$ шар перекатывается без проскальзывания из начального состояния в конечное.

Замечание. При построении управления можно избежать доворотов шара вокруг вертикали. Для этого кривую $\boldsymbol{r}(s)$ на шаре надо провести так, чтобы *касательные кривых на шаре и плоскости в начальный и конечный моменты совпадали.*

5. Примеры

В качестве примера вычислим управляющий гиростатический момент $\boldsymbol{K}(t)$ для качения вдоль двух заданных траекторий на плоскости: дуги окружности и синусоиды. Кроме того, в качестве траектории точки контакта на шаре выберем главную окружность, перпендикулярную главной оси инерции шара $\boldsymbol{e}_3$, то есть

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \left(\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}, 0\right), \tag{5.1}$$

где длина пути s меняется в промежутке от нуля до своего максимального значения, определяемого траекторией точки контакта на плоскости.

5.1. Качение по дуге окружности

Рассмотрим качение шара вдоль окружности радиуса ρ:

$$\boldsymbol{r}_{||}(s) = \left(-\rho\sin\frac{s}{\rho}, \rho\cos\frac{s}{\rho}\right), \quad s = 0\ldots s_{\max}. \tag{5.2}$$

в качестве траектории точки контакта на шаре выберем главную окружность, перпендикулярную главной оси инерции шара $\boldsymbol{e}_3$, то есть

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \left(\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}, 0\right), \tag{5.3}$$

Зависимость $s(t)$, удовлетворяющую условиям (4.10), выберем в виде

$$s(t) = s_{\max}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad t \in [0,1]. \tag{5.4}$$

Тогда управляющий момент $\boldsymbol{K}(t)$ примет вид

$$\boldsymbol{K}(t) = -\frac{s_{\max}\pi}{2}\sin(\pi t)\left(\frac{I_1}{\rho}\sin\frac{s(t)}{R}, \frac{I_2}{\rho}\cos\frac{s(t)}{R}, \frac{I_3+D}{R}\right), \tag{5.5}$$

где зависимость $s(t)$ задана соотношением (5.4). Пример зависимости $\boldsymbol{K}(t)$ для случая качения шара радиуса $R = 1$ по полной окружности радиуса $\rho = 1/2$ приведен на рисунке 3.

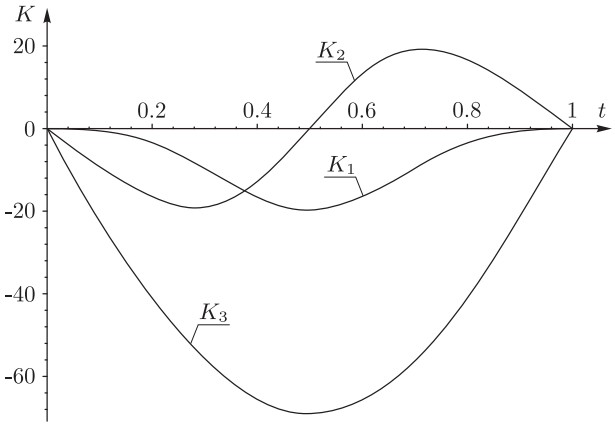

Рис. 3. Зависимость управляющего гиростатического момента $\boldsymbol{K}$ от времени, реализующая качение шара радиуса $R = 1$ по окружности радиуса $\rho = 1/2$ при $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(2,3,4)$, $D = 10$, $s_{\max} = \pi$.

5.2. Качение по синусоиде (слалом)

Пусть траектория шара на плоскости представляет собой N периодов синусоиды, которую представим в параметрической форме:

$$\boldsymbol{r}_{||}(\tau) = (-\rho \sin\tau, \nu\tau), \quad \tau = 0 \ldots 2\pi N, \tag{5.6}$$

где ρ — амплитуда, ν — частота синусоиды. Длина пути в данном случае имеет вид

$$s(\tau) = \sqrt{\nu^2 + \rho^2} E\left(\tau, \frac{\rho}{\sqrt{\nu^2+\rho^2}}\right), \tag{5.7}$$

где $E(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\varphi, k) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta. \tag{5.8}$$

Как видно из (5.6) и (5.7), нормальное представление траектории на плоскости выражается через обратные эллиптические интегралы. Поэтому удобнее параметризовать кривые на сфере и плоскости не длиной траектории s, а параметром τ.

В общем случае при произвольной параметризации кривых на плоскости $\boldsymbol{r}_{||}(\tau)$ и сфере $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ формула (4.7) принимает вид

$$\begin{gathered} \boldsymbol{K}(t) = -\dot\tau \left((\mathbf{I} + D\mathbf{E})\left(\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} \times \boldsymbol{\gamma}\right) + (\widetilde{k}_p - \widetilde{k}_b)\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}\right), \\ \widetilde{k}_p = \left(\frac{dx}{d\tau}\frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2}\right) \Big/ \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2, \quad \widetilde{k}_b = R^2\left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} \times \frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{d\tau^2}\right) \Big/ \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Подставив (5.3) и (5.6) в (5.9), получим

$$\boldsymbol{K}(t) = \dot\tau \left(\frac{\nu\rho\sin\tau}{\nu^2 + \rho^2\cos^2\tau} I_1 \sin\frac{s(\tau)}{R}, \frac{\nu\rho\sin\tau}{\nu^2+\rho^2\cos^2\tau} I_2 \cos\frac{s(\tau)}{R}, -\sqrt{\nu^2+\rho^2\cos^2\tau}\,\frac{I_3 + D}{R}\right), \tag{5.10}$$

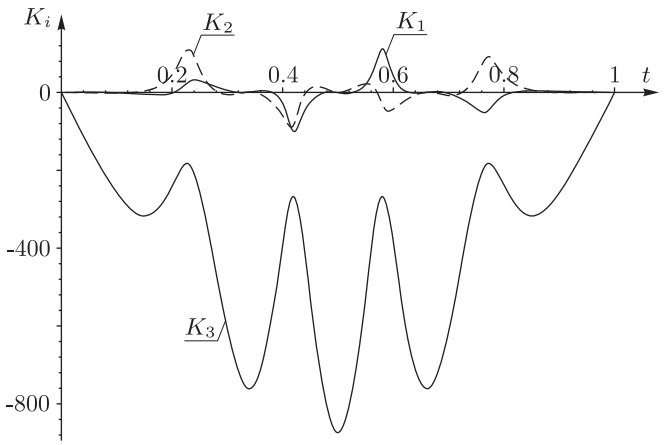

Рис. 4. Зависимость компонент вектора управляющего гиростатического момента $\boldsymbol{K}$ от времени, реализующая качение шара радиуса $R = 1$ по синусоиде $x = 2\sin y$, $y \in [0 \ldots 4\pi]$, при $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(2, 3, 4)$, $D = 10$.

где $s(\tau)$ задано соотношением (5.7), а зависимость $\tau(t)$ аналогично (5.4) можно задать в виде

$$\tau(t) = 2\pi N \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad t \in [0, 1]. \tag{5.11}$$

Пример зависимости $\boldsymbol{K}(t)$ для $N = 2$ приведен на рисунке 4.

Авторы выражают искреннюю признательность за дискуссии и обсуждения результатов А. В. Болсинову, Д. В. Трещеву.

Список литературы

[1] Бобылев Д. К. О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения // Матем. сб., 1982, т. 16, вып. 3, с. 544–581.

[2] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, вып. 2(392), с. 71–132.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение неоднородного шара по сфере без скольжения и верчения // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 445–452.

[5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.

[6] Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева // Собр. соч.: т. 1 / Н. Е. Жуковский. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. С. 275–289.

[7] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // МТТ, 1986, т. 21, № 1, с. 64–65.

[8] Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундамент. и прикл. матем., 2005, т. 11, вып. 8, с. 29–80.

[9] Москвин А. Ю. Шар Чаплыгина с гиростатом: Особые решения // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 345–356.

[10] Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Учен. зап. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-матем., 1938, т. 3, вып. 2, с. 83–94.

[11] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 76–101.

[12] Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. An intrinsic approach to the control of rolling bodies // Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control (Phoenix, AZ, Dec 1999): Vol. 1, pp. 431–435.

[13] Alouges F., Chitour Y., Long R. A motion planning algorithm for the rolling-body problem // IEEE Transactions on Robotics, 2010. 12 p.

[14] Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // Journal of Systems and Control Engineering, 2003, vol. 217, pp. 457–467.

[15] Armour R. H., Vincent J. F. V. Rolling in nature and robotics: A review // Journal of Bionic Engineering, 2006, vol. 3, no. 4, pp. 195–208.

[16] Bonnard B. Contrôlabilité des systèmes nonlinéaires // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1, 1981, vol. 292, pp. 535–537.

[17] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling of rigid body on a plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 1, pp. 177–200.

[18] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Rolling of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–220.

[19] Camicia C., Conticelli F., Bicchi A. Nonholonimic kinematics and dynamics of the Sphericle // Proc. of the 2000 IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2000, pp. 805–810

[20] Campion G., Chung W. Wheeled robots // Handbook of Robotics / B. Siciliano, O. Khatib. Berlin: Springer, 2008. P. 391–410.

[21] Chow W. L. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung // Math. Ann., 1939, vol. 117, pp. 98–105.

[22] Chung W. Nonholonomic manipulators. (Springer Tracts in Advanced Robotics, vol. 13.) Berlin: Springer, 2004. 114 pp.

[23] Crossley V. A. A literature review on the design of spherical rolling robots. Pittsburgh, PA, 2006. 6 pp.

[24] Crouch P. E. Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models // IEEE Trans. Autom. Contr., 1984, vol. AC-29, no. 4, pp. 321–331.

[25] Duistermaat J. J. Chaplygin's sphere. arXiv:math/0409019v1 [math.DS] 1 Sep 2004.

[26] Fedorov Yu. N., Kozlov V. V. Various aspects of n-dimensional rigid body dynamics // Dynamical systems in classical mechanics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 168, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 141–171.

[27] Goncharenko I., Svinin M., Hosoe S. Dynamic model, haptic solution, and human-inspired motion planning for rolling-based manipulation // Journal of Computing and Information Science in Engineering, 2009, vol. 9, no. 1, 011004, 10 pp.

[28] Johnson B. D. The nonholonomy of the rolling sphere // Amer. Math. Monthly, 2007, vol. 114, no. 6, pp. 500–508.

[29] Joshi V. A., Banavar R. N. Motion analysis of a spherical mobile robot // Robotica, 2009, vol. 27, no. 3, pp. 343–353.

[30] Joshi V. A., Banavar R. N., Hippalgaonkar R. Design and analysis of a spherical mobile robot // Mech. Mach. Theory, 2010, vol. 45, pp. 130–136.

[31] Karimpour H., Keshmiri M., Mahzoon M. Stabilization of an autonomous rolling sphere navigating in a labyrinth arena: A geometric mechanics perspective // Systems Control Lett., 2012, vol. 61, pp. 495–505.

[32] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.

[33] Koiller J., Ehlers K. M. Rubber Rolling over a Sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.

[34] Koshiyama A., Yamafuji K. Design and control of an all-direction steering type mobile robot // Int. J. Robot. Res., 1993, vol. 12, no. 5, pp. 411–419.

[35] Levi M. Geometric phases in the motion of rigid bodies // Arch. Ration. Mech. Anal., 1993, vol. 122, pp. 213–229.

[36] Lewis A. D., Ostrowski J. P., Burdickz J. W., Murray R. M. Nonholonomic mechanics and locomotion: the Snakeboard example // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994, 16 p.

[37] Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint // Robotics and Automation, 1990, vol. 6, no. 1, pp. 62–72.

[38] Michaud F., Caron S. Roball, the rolling robot // Autonomous Robots, 2002, vol. 12, pp. 211–222.

[39] Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: Controllability theory and applications // IEEE Trans. on Automatic Control, 2000, vol. 45, no. 9, pp. 1586–1599.

[40] Mukherjee R., Minor M. A., Pukrushpan J. T. Simple motion planning strategies for Spherobot: A spherical mobile robot // Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control (Phoenix, AZ, Dec 1999): Vol. 3, pp. 2132–2137.

[41] Mukherjee R., Minor M. A., Pukrushpan J. T. Motion planning for a spherical mobile robot: Revisiting the classical ball-plate problem // J. Dyn. Systems, Measurement, and Control, 2002, vol. 124, pp. 502–511.

[42] Nakashima A., Nagase K., Hayakawa Y. Control of a sphere rolling on a plane with constrained rolling motion // Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conference (2005), pp. 1445–1452.

[43] Ostrowski J. P., Desai J. P., Kumar V. Optimal Gait Selection for Nonholonomic Locomotion Systems // The International Journal of Robotics Research, 2000, vol. 19, no. 3, pp. 225–237.

[44] Reza Moghadasi S. Rolling of a body on a plane or a sphere: A geometric point of view // Bull. Austral. Math. Soc., 2004, vol. 70, pp. 245–256.

[45] Sang S., Zhao J., Wu H., Chen S., An Q. Modeling and simulation of a spherical mobile robot // Computer Science and Information Systems, 2010, vol. 7, no. 1, pp. 51–62.

[46] Shen J., Schneider D. A., Bloch A. M. Controllability and motion planning of multibody systems with nonholonomic constraints // Proc. of the 42nd IEEE Conf. on Decision and Control (Maui, Hawaii USA, Dec 2003): Vol. 53, pp. 4369–4374.

[47] Shen J., Schneider D. A., Bloch A. M. Controllability and motion planning of a multibody Chaplygin's sphere and Chaplygin's top // Internat. J. Robust Nonlinear Control, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 905–945.

[48] Sugiyama Y., Hirai S. Crawling and jumping by a deformable robot // Int. J. Robot. Res., 2006, vol. 25, pp. 603–620.

[49] Suomela J., Ylikorpi T. Ball-shaped robots: An historical overview and recent developments at TKK // Field and Service Robotics, 2006, vol. 25, pp. 343–354.

[50] Tomik F., Nudehi S., Flynn L. L., Mukherjee R. Design, fabrication and control of spherobot: A spherical mobile robot // J. Intell. Robot. Syst., 2012 (DOI: 10.1007/s10846-012-9652-2).

[51] Wilson J. L., Mazzoleni A. P., DeJarnette F. R., Antol J., Hajos G. A., Strickland C. V. Design, analysis, and testing of Mars tumbleweed rover concepts // Journal of spacecraft and rockets, 2008, vol. 45, no. 2, pp. 370–382.

[52] Yoon J.-C., Ahn S.-S., Lee Y.-J. Spherical robot with new type of two-pendulum driving mechanism // Proc. of the 15th IEEE Internat. Conf. on Intelligent Engineering Systems (2011), pp. 275–279.

[53] Zhan Q., Cai Y., Yan C. Design, analysis and experiments of an omni-directional spherical robot // IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (Shanghai, China, May 2011), pp. 4921-4926

How to control the Chaplygin sphere using rotors

Alexey V. Borisov[1], Alexander A. Kilin[2], Ivan S. Mamaev[3]

[1,2,3]Institute of Computer Science
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia
[1]borisov@rcd.ru, [2]aka@rcd.ru, [3]mamaev@rcd.ru

In the paper we study control of a balanced dynamically nonsymmetric sphere with rotors. The no-slip condition at the point of contact is assumed. The algebraic contrability is shown and the control inputs providing motion of the ball along a given trajectory on the plane are found. For some simple trajectories explicit tracking algorithms are proposed.

MSC 2010: 37J60 37J35 70E18 70F25 70H45
Keywords: non-holonomic constraint, non-holonomic distribution, control, Chow – Rashevsky theorem, drift

Received March 10, 2012, accepted June 2, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 289–307 (Russian)