ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9

MSC 2010: 37D20, 37D45, 34C15, 34D08

Генератор хаоса с аттрактором Смейла–Вильямса на основе эффекта гибели колебаний

В. М. Дорошенко, В. П. Круглов, С. П. Кузнецов

Предложена неавтономная система с однородно гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре, в которой генерация осуществляется на основе эффекта гибели колебаний. Представлены результаты численного исследования системы: итерационные диаграммы для фаз и портреты аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре, спектры плотности мощности, показатели Ляпунова и их зависимости от параметров, карта режимов. Выполнена проверка гиперболичности аттрактора, основанная на критерии углов.

Ключевые слова: однородно гиперболический аттрактор, соленоид Смейла–Вильямса, отображение Бернулли, гибель колебаний, показатели Ляпунова

Получено 21 июля 2017 года

После доработки 31 августа 2017 года

Работа В. М. Дорошенко и В. П. Круглова поддержана грантом РФФИ № 16-32-00449. Работа С. П. Кузнецова поддержана грантом РНФ № 17-12-01008.

Дорошенко Валентина Михайловна

Dorvalentina9@gmail.com

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Круглов Вячеслав Павлович

kruglovyacheslav@gmail.com

Кузнецов Сергей Петрович

spkuz@yandex.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

1. Введение

К классу однородно гиперболических относятся аттракторы, состоящие только из седловых траекторий. Седловыми называются траектории, в касательном пространстве которых можно выделить два инвариантных подпространства. Одно из подпространств состоит из векторов, нормы которых экспоненциально уменьшаются при эволюции в прямом времени; второе подпространство состоит из векторов, нормы которых экспоненциально уменьшаются при эволюции в обратном времени. Темпы уменьшения норм векторов этих подпространств ограничены и дистанцированы от нуля. В потоковых системах в касательном пространстве траекторий, не являющихся положением равновесия, выделяется также нейтральное подпространство, соответствующее возмущениям вдоль траектории, норма векторов которых в среднем не убывает и не возрастает. В силу инвариантности указанных подпространств, произвольный вектор возмущения седловой траектории представляет собой линейную комбинацию векторов, принадлежащих этим подпространствам. Множества точек, асимптотически приближающихся к седловой траектории в прямом времени и в обратном времени, соответственно называются ее устойчивым многообразием и неустойчивым многообразием, причем эти многообразия могут пересекаться лишь трансверсально [1–7].

Однородно гиперболические аттракторы обладают рядом замечательных свойств, в силу их структуры [1–7]. Самое наглядное из них называется существованием меры Синая – Рюэля – Боуэна и проявляется в гладкой деформации фазового пространства на однородно гиперболическом аттракторе, без образования локальных разрывов и уплотнений. Другое важное свойство заключается в том, что однородно гиперболические аттракторы, в отличие от большинства других, являются грубыми (или структурно устойчивыми), то есть структура аттрактора и характер динамики не чувствительны к малым изменениям параметров и функций, входящих в описывающие динамику уравнения. Еще одно качество однородно гиперболических аттракторов состоит в возможности построения символической динамики, соответствующей динамике на аттракторе. Благодаря структуре однородно гиперболического аттрактора можно установить взаимно однозначное соответствие между произвольной траекторией аттрактора и бесконечной последовательностью из конечного набора символов. Два последних свойства полезны с точки зрения практического применения однородно гиперболических аттракторов.

В течение долгого времени были известны лишь геометрические модели однородно гиперболических аттракторов [1–7]: соленоид Смейла – Вильямса, аттрактор Плыкина, DA-аттрактор (“derived from Anosov”). Соленоид Смейла – Вильямса представляет собой результат бесконечного числа отображений внутрь себя тороидальной области в пространстве размерности не меньшей трех, при которых происходит растяжение тороида в целое число раз вдоль, сильное поперечное сжатие, перекручивание и вложение внутрь исходной области.

Лишь недавно появились примеры физически реализуемых систем с однородно гиперболическими аттракторами [8–12]. Во многих предложенных моделях потоковых систем в сечении Пуанкаре присутствует аттрактор типа Смейла – Вильямса. Принцип функционирования этих систем основан на манипуляции переменными, величина которых определена с точностью до постоянного слагаемого и которым можно приписать смысл угловой переменной; примером может служить фаза колебаний. При этом преобразование угловой переменной при действии отображения Пуанкаре состоит в растяжении в целое число раз (такое преобразование называют растягивающим отображением окружности или отображением Бернулли) при сильном сжатии фазового пространства по остальным направлениям.

Рис. 1. Пример построения соленоида Смейла – Вильямса.

Требуемое преобразование фазы в уже известных примерах физически осуществляется разными способами. Системы с аттракторами типа Смейла – Вильямса могут иметь различную физическую природу (механическую, химическую, радиофизическую) и представлять собой связанные осцилляторы, между которыми возмущение передается резонансным и нерезонансным образом [13], кольцевые цепочки осцилляторов, вдоль которых передается возмущение [14], системы параметрических осцилляторов, в которых роль угловой переменной может выполнять соотношение амплитуд осцилляторов [15], распределенные системы, в которых особым образом взаимодействуют пространственные гармоники волновых паттернов [16], системы на основе взаимодействующих ансамблей фазовых осцилляторов с глобальной связью, в которых угловой переменной является аргумент параметра порядка [17].

В работе предложена новая модель системы с соленоидом Смейла – Вильямса, принцип работы которой основан на эффекте гибели колебаний. Гибель колебаний может произойти в автоколебательной системе из-за включения диссипативной связи ее с другим осциллятором, имеющим отличную частоту [18–21]. Диссипативная связь между осцилляторами обеспечивается членами, содержащими первые производные по времени от обобщенных координат, и способствует выравниванию мгновенных состояний взаимодействующих через ее посредство подсистем. Наиболее часто в литературе встречается следующий механизм гибели колебаний: автоколебательная система находится вблизи бифуркации Андронова – Хопфа и при включении связи с другим осциллятором происходит стабилизация положения равновесия [18].

В статье впервые продемонстрирована возможность использования эффекта гибели колебаний для построения системы с гиперболическим аттрактором. В разделе 2 дано описание модели, в разделе 3 — результаты численного моделирования.

2. Описание системы

Система состоит из автоколебательного элемента — осциллятора ван дер Поля и осциллятора с диссипацией. Собственная частота ω_2 диссипативного осциллятора в два раза больше частоты ω_1 осциллятора ван дер Поля. Колебательные подсистемы обмениваются

сигналами x и y через квадратичный нелинейный элемент. Также на осциллятор ван дер Поля действует разность производных сигналов с периодически модулируемым коэффициентом $KH\left(\sin\frac{2\pi t}{T}\right)(\dot{y} - \dot{x})$, где $H(\xi)$ — ступенчатая функция Хевисайда:

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < 0, \\ 1, & \text{если } \xi \geq 0. \end{cases}$$

На рисунке 2 изображена блок-схема генератора.

Рис. 2. Блок-схема генератора

Модельные уравнения системы получены без рассмотрения конкретной физической природы осцилляторов и записаны в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + 2\varepsilon xy &= KH\left(\sin\frac{2\pi t}{T}\right)(\dot{y} - \dot{x}), \\ \ddot{y} + \alpha\dot{y} + \omega_2^2 y + \varepsilon x^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ω_1 — частота осциллятора ван дер Поля, $\omega_2 = 2\omega_1$ — частота диссипативного осциллятора, μ — управляющий параметр осциллятора ван дер Поля, α — коэффициент затухания осциллятора, ε — коэффициент связи через нелинейный элемент, K — коэффициент, T — период модуляции.

Рассмотрим работу генератора. Пусть в начальный момент времени коэффициент перед разностью производных $KH(\sin(2\pi t/T)) = 0$ и осциллятор ван дер Поля осуществляет автоколебания с частотой ω_1 и фазой φ . Сигнал, генерируемый осциллятором ван дер Поля, будем считать близким к синусоидальному: $x \sim \sin(\omega_1 t + \varphi)$. На диссипативный осциллятор действует сигнал $\varepsilon x^2 \sim \sin^2(\omega_1 t + \varphi) = 1/2 - \cos(2\omega_1 t + 2\varphi)/2$ и возбуждает в нем колебания с удвоенной фазой и частотой $y \sim \sin(2\omega_1 t + 2\varphi)$. В момент времени, когда коэффициент перед разностью производных $KH(\sin(2\pi t/T))$ становится ненулевым, колебания осциллятора ван дер Поля быстро прекращаются, тогда как колебания второго осциллятора лишь медленно затухают. Когда $KH(\sin(2\pi t/T))$ становится нулевым снова, автоколебания в осцилляторе ван дер Поля возбуждаются и синхронизируются с составляющей с удвоенной фазой 2φ и частотой ω_1 сигнала $2\varepsilon xy \sim 2\sin(\omega_1 t)\sin(2\omega_1 t + 2\varphi) = \cos(\omega_1 t + 2\varphi) - \cos(3\omega_1 t + 2\varphi)$. Фаза возникающих автоколебаний равна удвоенной фазе предыдущей автоколебательной

стадии 2φ . Таким образом, фазы колебаний осцилляторов за период модуляции преобразуются в соответствии с отображением Бернулли: $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$ (константа устраняется сдвигом начала отсчета фазы и не играет существенной роли). При сильном сжатии фазового пространства по остальным переменным в системе возникает аттрактор типа Смейла–Вильямса.

Введя дополнительные переменные u и v , можно перейти от уравнения (2.1) к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= (\mu - x^2)u - \omega_1^2 x - 2\varepsilon xy + KH \left(\sin \frac{2\pi t}{T} \right) (v - u), \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= -\alpha v - \omega_2^2 y - \varepsilon x^2.\end{aligned}\tag{2.2}$$

3. Результаты численного моделирования

Система дифференциальных уравнений первого порядка (2.2) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 0.001. На рисунке 3 представлены временные реализации динамических переменных x и y в установившемся режиме (при значении параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$) и график зависимости от времени функции, описывающей модуляцию параметра. На временных реализациях наблюдаются периодические возбуждение и гибель колебаний в осцилляторе ван дер Поля и периодические постепенные возмущения и затухания колебаний в диссипативном осцилляторе. Этот процесс сопровождается нерегулярным изменением фазового сдвига на последовательных периодах модуляции.

Для иллюстрации передачи возбуждения между осцилляторами были получены спектры плотности мощности сигналов x и y . Было выполнено численно преобразование Фу-

Рис. 3. Временные зависимости динамических переменных x и y и функции $H(\sin(2\pi t/T))$ при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

Рис. 4. Спектры плотности мощности сигналов x (а) и y (б) в логарифмическом масштабе в децибелах при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

рые достаточно длинных реализаций (2^{17} точек) переменных x и y , полученных с шагом 0.001 и прореженных в 100 раз, чтобы точнее отобразить составляющие спектра с частотами, близкими к собственным частотам осцилляторов. Спектры представлены на рисунке 4. Максимум плотности мощности осциллятора ван дер Поля (а) приходится на частоту ω_1 , а диссипативного осциллятора (б) — на ω_2 ; эти частоты отмечены на графиках вертикальными линиями.

Поскольку фаза колебаний изменяется между периодами модуляции параметра, целесообразно перейти к исследованию динамики с помощью стробоскопического сечения Пуанкаре. Стробоскопическое отображение было получено сечением потока траекторий системы (2.2) плоскостями $t_n = nT$. На рисунке 5 представлены портреты аттрактора стробоскопического отображения в проекции на плоскости переменных обоих осцилляторов и итерационные диаграммы для фаз, полученные по формулам $\varphi = \arg(x + iu)$ и $\psi = \arg(y + iv)$. Портреты аттрактора визуально похожи на соленоид Смейла–Вильямса. Трансформация фаз колебаний приближенно описывается растягивающим отображением окружности: при изменении значения фазы на предыдущем периоде модуляции от 0 до 2π ее образ на текущем периоде пробегает интервал от 0 до 4π .

Рис. 5. Портреты аттрактора стробоскопического отображения в проекциях на плоскости (а) переменных осциллятора ван дер Поля (x, u) , (с) диссипативного осциллятора (y, v) и (b, d) итерационные диаграммы фаз осцилляторов. Портреты и диаграммы фаз получены при значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

Рис. 6. Спектры плотности мощности сигналов x_n (а) и y_n (b) стробоскопического отображения в логарифмическом масштабе в децибелах при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$.

Было выполнено численно преобразование Фурье реализаций переменных x_n и y_n длиной 2^{16} итераций стробоскопического отображения системы (2.2). На рисунке 6 изображены спектры плотности мощности переменных стробоскопического отображения Пуанкаре. Спектры сплошные, что подтверждает хаотичность генерируемых системой сигналов.

Были вычислены показатели Ляпунова стробоскопического отображения системы (2.2) по алгоритму Бенеттина [22, 23]. В соответствии с ним одновременно решались численно уравнения (2.2) вдоль произвольной фазовой траектории с шагом 0.001 и четыре набора уравнений в вариациях, соответствующие четырем векторам возмущений опорной траектории:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= \delta u, \\ \delta\dot{u} &= \left(-2xu - \omega_1^2 - 2\varepsilon y\right)\delta x + \left[\mu - x^2 - KH\left(\sin \frac{2\pi t}{T}\right)\right]\delta u - 2\varepsilon x\delta y + KH\left(\sin \frac{2\pi t}{T}\right)\delta v, \\ \delta\dot{y} &= \delta v, \\ \delta\dot{v} &= -2\varepsilon x\delta x - \omega_2^2\delta y - \alpha\delta v.\end{aligned}\quad (3.1)$$

На каждом шаге векторы возмущений подвергались процедуре ортогонализации Грама–Шмидта. После достаточно длинного переходного процесса накапливались суммы логарифмов норм векторов возмущений. Показатели Ляпунова отображения получались как отношения этих сумм к числу полных периодов модуляции (числу итераций стробоскопического отображения). При $\varepsilon = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$ показатели Ляпунова отображения составили

$$\Lambda_1 = 0.626 \pm 0.009, \quad \Lambda_2 = -1.266 \pm 0.004, \quad \Lambda_3 = -17.75 \pm 0.02, \quad \Lambda_4 = -19.93 \pm 0.03.$$

Старший показатель положительный и близок по величине к $\ln 2$, показателю Ляпунова отображения Бернулли, приближенно описывающего преобразование фазы в системе. Остальные показатели отрицательные. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве стробоскопического отображения Пуанкаре за одну итерацию испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным трем. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной) в четырехмерном фазовом пространстве.

На рисунке 7 представлена зависимость показателей Ляпунова стробоскопического отображения системы (2.2) от параметра K . Старший показатель на большом интервале значений параметра K остается близким к $\ln 2$, резкие провалы в отрицательную область не наблюдаются. Это объясняется структурной устойчивостью аттрактора.

На рисунке 8 изображена карта режимов стробоскопического отображения системы (2.2) на плоскости параметров $(\omega_1/2\pi, K)$ (при построении карты частоты ω_1 и ω_2 не были связаны соотношением) при фиксированных значениях параметров $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 1.5$. Гиперболический хаос диагностировался по отклонению старшего показателя Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре не более чем на 10% от $\ln 2$. Другие режимы определялись следующим образом. Если при некотором значении параметров в установившемся режиме точка отображалась в малую окрестность самой себя за конечное число итераций m , то аттрактором системы является цикл периода m . Если точка не отображалась в свою малую окрестность за «разумное» число итераций, то режим нерегулярный (квазипериодический и хаотический режимы можно разделить по значению старшего показателя Ляпунова). Как видно из рисунка 8, гиперболический хаос наблюдается в широком диапазоне параметров. В системе также реализуются другие режимы: квазипериодические, периодические («языки Арнольда»), хаотические негиперболические («слабый хаос») и отсутствие колебаний.

Была выполнена численная проверка гиперболичности, основанная на свойстве трансверсальности многообразий гиперболического аттрактора [24–27]. Процедура заключает-

Рис. 7. Зависимость показателей Ляпунова стробоскопического отображения системы (2.2) от параметра K при фиксированных значениях параметров $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 1.5$.

Рис. 8. Карта режимов стробоскопического отображения системы (2.2) на плоскости параметров $(\omega_1/2\pi, K)$ при фиксированных значениях параметров $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 1.5$.

Рис. 9. Гистограммы распределений углов между многообразиями аттрактора стробоскопического отображения системы (2.2) при $\mu = 1.5$ (a) и при $\mu = 4.3$ (b); остальные значения параметров фиксированы: $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\varepsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$.

ся в построении гистограмм распределений углов между многообразиями. Кратко опишем алгоритм в форме, применимой к аттрактору стробоскопического отображения системы (2.2) [26]. На первом этапе проверки необходимо численно решить уравнения системы (2.2) совместно с уравнениями в вариациях (3.1), нормируя вектор возмущения на каждом шаге, пока не установится режим, соответствующий хаотическому аттрактору, а вектор возмущения будет принадлежать неустойчивому подпространству. На втором этапе вычисления продолжаются, на каждой итерации отображения Пуанкаре сохраняются в файл значения динамических переменных $\{x_n, u_n, y_n, v_n\}$ и компонент вектора воз-

мущения $\{\delta x_n, \delta u_n, \delta y_n, \delta v_n\}$. Этот участок траектории должен быть достаточно длинным. На третьем этапе решаются уравнения и записываются в файл значения динамических переменных $\{x_n, u_n, y_n, v_n\}$ на каждой итерации отображения Пуанкаре. На четвертом этапе необходимо начать двигаться вдоль записанной в файл опорной траектории в обратном времени и численно решать сопряженные уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{\delta \tilde{x}} &= (2xu + \omega_1^2 + 2\epsilon y)\delta \tilde{u} + 2\epsilon x\delta \tilde{v}, \\ \dot{\delta \tilde{u}} &= -\delta \tilde{x} - \left[\mu - x^2 - KH \left(\sin \frac{2\pi t}{T} \right) \right] \delta \tilde{u}, \\ \dot{\delta \tilde{y}} &= 2\epsilon x\delta \tilde{u} + \omega_2^2\delta \tilde{v}, \\ \dot{\delta \tilde{v}} &= -KH \left(\sin \frac{2\pi t}{T} \right) \delta \tilde{u} - \delta \tilde{y} + \alpha\delta \tilde{v},\end{aligned}\tag{3.2}$$

полученные транспонированием матрицы Якоби системы (3.1), все элементы которой взяты с обратным знаком. Когда процедура доходит до участка траектории, где записывался вектор возмущения в прямом времени (второй этап), необходимо начать записывать вектор возмущения сопряженной системы на каждой итерации отображения Пуанкаре. В результате для точек на длинном отрезке траектории будет получен набор векторов $\{\delta x_n, \delta u_n, \delta y_n, \delta v_n\}$, касательных к неустойчивому многообразию, и набор векторов $\{\delta \tilde{x}_n, \delta \tilde{u}_n, \delta \tilde{y}_n, \delta \tilde{v}_n\}$, ортогональных к устойчивому многообразию. В каждой точке можно найти угол $\beta = [0, \pi/2]$ между векторами $\{\delta x_n, \delta u_n, \delta y_n, \delta v_n\}$ и $\{\delta \tilde{x}_n, \delta \tilde{u}_n, \delta \tilde{y}_n, \delta \tilde{v}_n\}$ по теореме косинусов. Соответственно, угол между устойчивым и неустойчивым подпространствами в этой точке равен $\alpha = \pi/2 - \beta$. Хотя описанный тест не может претендовать на строгое обоснование гиперболичности аттрактора, он позволяет на практике выявлять гиперболические и негиперболические аттракторы.

На рисунке 9 представлены гистограммы распределений углов между многообразиями аттрактора стробоскопического отображения системы (2.2) в двух режимах. Гистограмма (а) соответствует режиму с гиперболическим аттрактором ($\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\epsilon = 0.5$, $T = 20$, $\alpha = 0.4$, $K = 5$, $\mu = 1.5$), поскольку нулевые значения углов отсутствуют, а минимальное значение угла дистанцировано от нуля. Гистограмма (b) соответствует негиперболическому хаотическому аттрактору.

4. Заключение

В работе впервые представлена неавтономная система на основе взаимодействующих осциллятора ван дер Поля и диссипативного осциллятора, в которой генерация гиперболического хаоса реализуется на основе эффекта гибели колебаний. Проведено численное исследование системы. Получены итерационные диаграммы и портреты аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре, построены спектры генерируемых системой сигналов, вычислены показатели Ляпунова и их зависимости от параметров, построена карта режимов. Проведена проверка гиперболичности при помощи построения гистограмм распределений углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями траекторий аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре. Все проведенные исследования подтверждают наличие в данной системе аттрактора типа Смейла – Вильямса.

Представляется возможным построение других моделей систем с гиперболическим хаосом на основе эффекта гибели колебаний, в том числе распределенных.

References

- [1] Smale S. Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, no. 6, pp. 747–817.
- [2] Williams R. Expanding attractors, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1974, No. 43, pp. 169–203.
- [3] Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001.
- [4] Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 54, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [5] *Dynamical Systems 9: Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour*, D.V. Anosov (Ed.), Encyclopaedia Math. Sci., vol. 66, Berlin: Springer, 1995.
- [6] Afraimovich V., Hsu S.-B. *Lectures on chaotic dynamical systems*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 28, Providence, R.I.: AMS, 2003.
- [7] Kuznetsov S. P. *Dynamical chaos and hyperbolic attractors: From mathematics to physics*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2013 (Russian).
- [8] Kuznetsov S. P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, no. 14, 144101, 4 pp.
- [9] Kuznetsov S. P., Seleznev E. P. A strange attractor of the Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system, *JETP*, 2006, vol. 102, no. 2, pp. 355–364; see also: *Zh. Èksper. Teoret. Fiz.*, 2006, vol. 129, no. 2, pp. 400–412.
- [10] Isaeva O. B., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P. Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators, *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 74, no. 4, 046207, 5 pp.
- [11] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors, *Phys. D*, 2007, vol. 232, no. 2, pp. 87–102.
- [12] Kuznetsov S. P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale–Williams attractor, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2010, vol. 15, nos. 2–3, pp. 348–353.
- [13] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Pikovski A. S., Turukina L. V. Chaotic dynamics in the systems of coupling nonautonomous oscillators with resonance and nonresonance communicator of the signal, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinam.*, 2007, vol. 15, no. 6, pp. 75–85 (Russian).
- [14] Kruglov V. P., Kuznetsov S. P. An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2011, vol. 16, no. 8, pp. 3219–3223.
- [15] Kuznetsov A. S., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. Parametric generator of hyperbolic chaos based on two coupled oscillators with nonlinear dissipation, *Tech. Phys.*, 2010, vol. 55, no. 12, pp. 1707–1715; see also: *Zh. Tekh. Fiz.*, 2010, vol. 80, no. 12, pp. 1–9.
- [16] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos of Turing patterns, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, vol. 108, no. 19, 194101, 4 pp.
- [17] Kuznetsov S. P., Pikovsky A., Rosenblum M. Collective phase chaos in the dynamics of interacting oscillator ensembles, *Chaos*, 2010, vol. 20, no. 4, 043134, 8 pp.
- [18] Aronson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators, *Phys. D*, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 403–449.
- [19] Ermentrout G. B., Kopell N. Oscillator death in systems of coupled neural oscillators, *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, no. 1, pp. 125–146.
- [20] Matthews P. C., Strogatz S. H. Phase diagram for the collective behavior of limit-cycle oscillators, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 65, no. 14, pp. 1701–1704.
- [21] Matthews P. C., Mirollo R. E., Strogatz S. H. Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators, *Phys. D*, 1991, vol. 52, nos. 2–3, pp. 293–331.
- [22] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them: P. 1: Theory; P. 2: Numerical application, *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.

- [23] Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems, *Progr. Theoret. Phys.*, 1979, vol. 61, no. 6, pp. 1605–1616.
- [24] Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic?, *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, no. 5, pp. 779–797.
- [25] Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems, *Phys. Lett. A*, 2000, vol. 270, no. 6, pp. 301–307.
- [26] Kuptsov P. V. Fast numerical test for hyperbolic chaos, *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 1, 015203, 4 pp.
- [27] Kuznetsov S. P., Kruglov V. P. Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 160–174.

Chaos generator with the Smale – Williams attractor based on oscillation death

Valentina M. Doroshenko¹, Vyacheslav P. Kruglov², Sergey P. Kuznetsov³

¹Saratov State University

ul. Astrahanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

^{2,3}Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

ul. Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

¹Dorvalentina9@gmail.com, ²kruglovyacheslav@gmail.com, ³spkuz@yandex.ru

A nonautonomous system with a uniformly hyperbolic attractor of Smale – Williams type in a Poincaré cross-section is proposed with generation implemented on the basis of the effect of oscillation death. The results of a numerical study of the system are presented: iteration diagrams for phases and portraits of the attractor in the stroboscopic Poincaré cross-section, power density spectra, Lyapunov exponents and their dependence on parameters, and the atlas of regimes. The hyperbolicity of the attractor is verified using the criterion of angles.

MSC 2010: 37D20, 37D45, 34C15, 34D08

Keywords: uniformly hyperbolic attractor, Smale – Williams solenoid, Bernoulli map, oscillation death, Lyapunov exponents

Received July 21, 2017, accepted August 31, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 303–315 (Russian)