ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70E17

К теории волчка Лагранжа

О. Э. Зубелевич, Т. В. Сальникова

Эта статья написана по мотивам заметки Адамара [1], посвященной одному довольно тонкому (и хорошо забытому) вопросу в задаче о движении волчка Лагранжа. Этот вопрос не обсуждается в русскоязычной литературе.

Ключевые слова: гироскопы, механика твердого тела с неподвижной точкой

1. Постановка задачи и формулировка теоремы

Ниже мы используем стандартные сведения из теории волчка Лагранжа (см., например, [2]).

В случае Лагранжа уравнения движения твердого тела в углах Эйлера имеют следующие первые интегралы:

$$A\dot{\psi} \sin^2 \theta + B(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta = k, \quad (1.1)$$

$$B(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = c, \quad (1.2)$$

$$\frac{A}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(k - c \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mga \cos \theta = h. \quad (1.3)$$

Получено 02 ноября 2017 года
После доработки 05 декабря 2017 года

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-01-03747.

Зубелевич Олег Эдуардович
ozubel@yandex.ru

Сальникова Татьяна Владимировна
tatiana.salnikova@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

Рис. 1

Здесь m — масса волчка, a — расстояние от точки подвеса O до центра масс, B — момент инерции волчка относительно оси симметрии Oz (см. рис. 1), A — момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через точку подвеса волчка.

Из уравнений (1.1) и (1.2) находим

$$\dot{\psi} = \frac{k - c \cos \theta}{A \sin^2 \theta}. \quad (1.4)$$

Нас интересуют движения, при которых угол нутации θ периодичен по времени, $\theta(t + \omega) = \theta(t)$, $\omega > 0$, а константы первых интегралов k, c, h таковы, что числитель дроби в правой части формулы (1.4) меняет знак дважды за период, при этом $\sin \theta(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Выберем начало отсчета времени так, что функция $\theta(t)$ возрастает на отрезке $[0, t']$ и убывает на отрезке $[t', \omega]$. Введем обозначения

$$\theta_- = \theta(0) = \theta(\omega), \quad \theta_+ = \theta(t'), \quad u_{\pm} = \cos \theta_{\pm}.$$

Итак, мы исследуем случай, когда

$$c \neq 0, \quad \frac{k}{c} \in (u_+, u_-). \quad (1.5)$$

В силу (1.4) функция $\psi(t)$ является первообразной ω -периодической функции. Имеются две возможности: либо функция ψ сама ω -периодична, и тогда ось симметрии волчка вращается, заметая конус, не содержащий вертикальной оси Oz_0 , либо функция ψ имеет вид

$$\psi(t) = \lambda t + w(t),$$

где $\lambda \neq 0$ — константа, а w — ω -периодическая функция. Вторая возможность соответствует стандартной картине, при которой ось симметрии волчка описывает на сфере Пуассона кривую с петлями.

Покажем, что первая возможность не реализуется.

Теорема 1 (Адамар [1]). Верно следующее неравенство

$$\int_0^{\omega} \frac{k - c \cos \theta}{A \sin^2 \theta} dt \neq 0. \quad (1.6)$$

2. Доказательство теоремы 1

Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$\frac{A}{2} \dot{u}^2 = p(u), \quad (2.1)$$

где

$$p(u) = (1 - u^2)(h - m g a u) - \frac{(k - c u)^2}{2A}, \quad u = \cos \theta.$$

Этот многочлен имеет три различных корня: $u_{\pm} \in (-1, 1)$, $u_* > 1$.

На отрезке $[0, t']$ функция $u(t)$ убывает, а на отрезке $[t', \omega]$ она возрастает, следовательно, из уравнения (2.1) мы получаем

$$du = -\sqrt{\frac{2p(u)}{A}} dt$$

при $t \in [0, t']$, и

$$du = \sqrt{\frac{2p(u)}{A}} dt$$

при $t \in [t', \omega]$.

Делая замену переменных $t \mapsto u$ в интеграле (1.6), получаем

$$\int_0^{\omega} \frac{k - c \cos \theta}{A \sin^2 \theta} dt = \int_0^{t'} \dots + \int_{t'}^{\omega} \dots = 2 \int_{u_+}^{u_-} \frac{k - cu}{(1 - u^2) \sqrt{2Ap(u)}} du.$$

Таким образом, наша задача — доказать, что

$$\int_{u_+}^{u_-} \frac{k - cu}{1 - u^2} \frac{1}{\sqrt{p(u)}} du \neq 0.$$

В комплексной плоскости переменной u подынтегральная функция

$$f(u) = \frac{k - cu}{1 - u^2} \frac{1}{\sqrt{p(u)}}$$

имеет два полюса в точках ± 1 и три точки ветвления второго порядка $u_{\pm}, u_*$. Чтобы выделить однозначную ветвь функции $\sqrt{p(u)}$, проведем в комплексной плоскости переменной u два разреза вдоль оси x : один по лучу (u_*, ∞) , а другой по интервалу (u_+, u_-) (см. рис. 2). Ветвь выберем таким образом, чтобы значение функции $\sqrt{p(u)}$ на верхнем берегу интервала (u_*, ∞) было положительным. Значения функции $\sqrt{p(u)}$ на верхнем и нижнем берегах каждого из разрезов отличаются знаком.

В соответствии с указанным выбором ветви, выпишем следующие формулы:

$$f(u) = -i \frac{\operatorname{sgn}(k - c)}{1 - u} \sqrt{A/2} + \lambda_1(u)$$

Рис. 2

и

$$f(u) = i \frac{\operatorname{sgn}(k+c)}{1+u} \sqrt{A/2} + \lambda_2(u).$$

Функции λ_1 и λ_2 голоморфны в окрестностях точек $u = 1$ и $u = -1$ соответственно.

В силу (1.5) выражения $k-c$ и $k+c$ имеют разные знаки, следовательно, сумма вычетов функции f в точках 1 и -1 равна нулю.

Через S_R обозначим окружность радиуса R с центром в нуле. Интеграл по этой окружности от функции f стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Действительно, при больших R верна оценка

$$|f(u)| \leq \frac{C}{R^{5/2}}, \quad u \in S_R,$$

где C — положительная константа.

Интегралы от функции f по дугам окружностей, окаймляющих точки u_* , $u_{\pm}$, стремятся к нулю при стремлении радиусов дуг к нулю.

Через C_R обозначим контур, состоящий из дуги окружности S_R , дуги, окаймляющей точку u_* , и отрезков, идущих выше и ниже оси x и соединяющих эти дуги. Через L обозначим контур, состоящий из дуг окружностей, окаймляющих точки $u_{\pm}$, и отрезков, идущих выше и ниже оси x и соединяющих эти дуги.

Из общих теорем теории функций комплексного переменного в силу замечания о вычетах функции f в точках ± 1 , верна следующая формула:

$$\int_{C_R} f(u) du = \int_L f(u) du.$$

Переходя к пределу $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{u_*}^{\infty} f(u) du = - \int_{u_+}^{u_-} f(u) du.$$

Функция f — знакопостоянна на интервале (u_*, ∞) , поэтому оба интеграла не равны нулю.

Теорема доказана.

References

- [1] Hadamard J. Sur la précession dans le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe, *Bull. Sci. Math.*, 1895, vol. 19, pp. 228–230.
- [2] Bolotin S. V., Karapetyan A. V., Kugushev E. I., Treschev D. V. *Theoretical mechanics*, Moscow: Academia, 2010 (Russian).

A note on Lagrange's top theory

Oleg E. Zubelevich¹, Tatyana V. Salnikova²

^{1,2}Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory 1, Moscow, 119991, Russia

¹ozubel@yandex.ru, ²tatiana.salnikova@gmail.com

This article is an extended version of Hadamard's note devoted to some subtle question that has arisen in the Lagrange top theory. As a rule, this question is not discussed in textbooks.

MSC 2010: 70E17

Keywords: gyroscopes, motion of a rigid body with a fixed point

Received November 02, 2017, accepted December 05, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 139–143 (Russian)