УДК: 531.31

MSC 2010: 70Ехх, 37J60

Исследование устойчивости стационарных движений сфероробота комбинированного типа

Е. Н. Пивоварова

В работе рассматривается динамика сфероробота комбинированного типа, состоящего из сферической оболочки и закрепленного в ее центре маятника, на конце которого установлен ротор. Для данной системы в работе проведено исследование устойчивости частного решения, которое в абсолютном пространстве соответствует движению сфероробота по окружности с постоянной скоростью. Найдены области устойчивости частного решения в зависимости от ориентации сфероробота во время движения, его скорости и радиуса описываемой окружности.

Ключевые слова: сфероробот, неголономная связь, частные решения, устойчивость

Введение

В настоящее время множество исследований посвящено поиску и разработке алгоритмов планирования траектории движения сферороботов различных конструкций [4–6, 10–12, 14]. Как показывают экспериментальные исследования, для реализации движения на практике наиболее эффективным и простым является использование стационарных движений. Однако такие движения могут быть неустойчивыми, поэтому важными задачами при исследовании динамики механических систем являются поиск стационарных движений, анализ их устойчивости и стабилизация.

Получено 04 октября 2017 года
После доработки 17 ноября 2017 года

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (1.2404.2017/4.6).

Пивоварова Елена Николаевна
archive@rcd.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

В данной работе рассматривается система, описывающая качение сфероробота комбинированного типа по плоскости и исследованная ранее в [13, 14], где показано, что для этой системы стационарными движениями являются качение по прямой и по окружности. Устойчивость частного решения, соответствующего движению по прямой, была исследована в [9]. Настоящая работа посвящена анализу устойчивости второго решения — стационарного движения по окружности, которое также является важным частным решением системы, реализуемым на практике.

В случае, когда стационарное решение неустойчиво, возникает задача его стабилизации. Также данная задача возникает на практике при наличии различных возмущений во время движения (например, при воздействии внешних факторов или из-за неровности опорной поверхности [7]). Как правило, стабилизация движения системы реализуется в форме обратной связи, которая чаще всего зависит от конкретного вида траектории [1, 5, 15, 16]. Другой подход заключается в стабилизации движения системы вдоль стационарного решения [8, 9] (аналогичный подход применялся в работах [2, 3]). Для рассматриваемой системы форма обратной связи, стабилизирующая качение сфероробота по прямой, была получена в работе [9].

Результаты анализа устойчивости второго частного решения, реализующего движение по окружности, полученные в данной работе, в дальнейшем позволят разработать алгоритмы стабилизации этого режима движения, которые можно применять на практике. Кроме того, результаты работы позволят выбрать оптимальные параметры (наклон сфероробота, скорость движения и радиус окружности), при которых движение системы по окружности будет устойчивым.

1. Уравнения движения

Рис. 1. Схематическая модель сфероробота комбинированного типа.

Рассмотрим качение без проскальзывания сфероробота комбинированного типа по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости (рис. 1). Сфероробот представляет собой сферическую оболочку радиуса R_s , внутри которой движется массивный ротор. При движении ротор может вращаться как вокруг собственной оси симметрии, которая проходит через центр сферической оболочки, так и вокруг центра оболочки в некоторой фиксированной, жестко связанной с оболочкой плоскости. Технически данная конструкция реализуется с помощью маятника, закрепленного в центре оболочки и представляющего собой невесомый стержень с ротором на конце.

Для описания динамики сфероробота определим две системы координат. Первая система $O\alpha\beta\gamma$ — неподвижная (инерциальная) с осями α, β, γ . Вторая $Ce_1e_2e_3$ — подвижная, с осями e_1, e_2, e_3 , оси которой жестко связаны с маятником так, что орт e_1 перпендикулярен плоскости вращения маятника, а орт e_3 направлен вдоль его оси симметрии. Начало координат подвижной системы совпадает с геометрическим центром оболочки C (см. рис. 1). Далее (если не оговаривается иное) все векторы будем задавать в проекциях на оси подвижной системы координат $Ce_1e_2e_3$.

Положение системы будем задавать координатами центра сферы $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ в неподвижной системе отсчета, углом поворота ϑ маятника вокруг оси $\mathbf{e}_1$ относительно сферы, углом поворота φ ротора относительно оси $\mathbf{e}_3$ и ортогональной матрицей поворота $\mathbf{Q}$ подвижной системы координат относительно неподвижной. По столбцам матрицы $\mathbf{Q}$ стоят координаты неподвижных векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$, записанные в проекциях на оси подвижной системы координат $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение $\mathcal{N} = \{(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi, \mathbf{Q})\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \times SO(3)$.

Отсутствие проскальзывания в точке контакта оболочки с плоскостью описывается неголономной связью

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} - R_s \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

где $\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}$ — скорость центра и угловая скорость вращения оболочки.

Кинетическую и потенциальную энергии системы «сфера+маятник» можно представить в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2}m_s \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{I}_s \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2}m_b \mathbf{v}_b^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_{bc} \boldsymbol{\omega}), \quad U = -m_b R_b g(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}_3),$$

где $m_s, \mathbf{I}_s = \text{diag}(I_s, I_s, I_s)$ — масса и тензор инерции сферической оболочки, $m_b, \mathbf{I}_{bc} = \text{diag}(I_{bc1}, I_{bc1}, I_{bc3})$ — масса и центральный тензор инерции маятника, g — ускорение свободного падения, а скорость центра масс маятника $\mathbf{v}_b$ и его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ задаются соотношениями

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v} - R_b \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{e}_1 \dot{\vartheta} + \mathbf{e}_3 \dot{\varphi},$$

где R_b — расстояние от центра сферы до центра масс маятника.

Уравнения динамики рассматриваемой системы можно записать в виде уравнений Даламбера – Лагранжа второго рода в квазискоростях с неопределенными множителями (подробный вывод см. в работе [14]). Как показано в [14], уравнения движения для переменных $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma}$ отделяются от полной системы и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{e}_3, \mathbf{I}_b(\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\varphi} \mathbf{e}_3) \right) = 0, \\ & \left(\mathbf{e}_1, \mathbf{I}_b(\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\vartheta} \mathbf{e}_1) + \boldsymbol{\Omega} \times ((\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_b)\boldsymbol{\Omega} + \dot{\varphi} \mathbf{I}_b \mathbf{e}_3) - \right. \\ & \quad \left. - m_b R_b R_s \mathbf{e}_3 \times ((\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\gamma}) + m_b R_b g \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_3 \right) = 0, \\ & (\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_b)\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\vartheta} \mathbf{I}_b \mathbf{e}_1 + \ddot{\varphi} \mathbf{I}_b \mathbf{e}_3 + (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1) \times ((\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_b)\boldsymbol{\Omega} + \dot{\vartheta} \mathbf{I}_b \mathbf{e}_1 + \dot{\varphi} \mathbf{I}_b \mathbf{e}_3) + \\ & + (m_s + m_b) R_s^2 \boldsymbol{\gamma} \times ((\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\gamma}) - m_b R_b R_s \left(\mathbf{e}_3 \times ((\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\gamma}) + \right. \\ & \quad \left. + \boldsymbol{\gamma} \times ((\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \ddot{\vartheta} \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_3 + (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1) \times ((\boldsymbol{\Omega} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_3)) \right) + m_b g R_b \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_3 = 0, \\ & \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{I}_b = \text{diag}(I_{b1}, I_{b1}, I_{b3}) = \text{diag}(I_{bc1} + m_b R_b^2, I_{bc1} + m_b R_b^2, I_{bc3})$ — тензор инерции маятника относительно центра сферы.

Дополнив уравнения (1.1) кинематическими соотношениями, описывающими движение центра сфероробота и поворот подвижных осей относительно неподвижных

$$\dot{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{Q} + \dot{\vartheta}\mathbf{A}\mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{v},$$

где матрицы $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ и $\mathbf{A}$ имеют вид

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим замкнутую систему уравнений, полностью описывающую качение сфероробота по плоскости.

2. Частные решения системы

Рассматриваемая система (1.1), помимо очевидного геометрического интеграла $\gamma^2 = 1$, допускает еще два интеграла движения:

- линейный по угловым скоростям интеграл

$$F_1 = (\mathbf{\Omega} + \mathbf{e}_3\dot{\varphi}, \mathbf{e}_3) = \Omega_3 + \dot{\varphi}; \quad (2.1)$$

- энергия

$$E = \frac{1}{2}m_s\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}I_s\mathbf{\Omega}^2 + \frac{1}{2}m_b\mathbf{v}_b^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_b\boldsymbol{\omega}) - m_bR_b g(\gamma, \mathbf{e}_3). \quad (2.2)$$

Найдем неподвижные точки приведенной системы (1.1). Для этого положим в (1.1) производные $\dot{\mathbf{\Omega}}, \dot{\gamma}, \ddot{\vartheta}, \ddot{\varphi}$ равными нулю. Получим систему алгебраических уравнений, допускающую следующие решения.

- 1) Два двухпараметрических семейства неподвижных точек

$$\gamma = \gamma_0 = \pm \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0 = \frac{v_0}{R_s}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\vartheta} = \omega_\vartheta = -\frac{v_0}{R_s}, \quad \dot{\varphi} = \omega_\varphi, \quad (2.3)$$

где v_0 и ω_φ — свободные параметры семейства. В абсолютном пространстве неподвижным точкам данного семейства соответствуют движения шара по прямой с постоянной скоростью v_0 , при которых маятник находится в вертикальном положении, а ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω_φ . Знак при $\mathbf{e}_3$ выбирается в зависимости от того, в каком положении находится маятник: «+» для нижнего и «-» для верхнего положения.

- 2) Трехпараметрическое семейство неподвижных точек

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} = \omega_\vartheta &= \frac{\gamma_1 (C_1^2(I_s + I_{b1} + m_bR_bR_s\gamma_3) - C_2)}{C_1 (I_s - (m_s + m_b)R_s^2\gamma_3^2 - m_bR_bR_s\gamma_3)}, \\ \dot{\varphi} = \omega_\varphi &= -\frac{C_1^2 (\gamma_3(I_s + I_{b3}) - m_bR_bR_s\gamma_1^2) - C_1(m_s + m_b)R_s^2\omega_\vartheta\gamma_1\gamma_3 - C_2\gamma_3 + m_bR_b g}{I_{b3}C_1}, \\ \gamma &= \gamma_0 = (\sin \xi, 0, \cos \xi), \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0 = C_1\gamma_0 - \mathbf{e}_1\dot{\vartheta}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где C_1, C_2, ξ — свободные параметры семейства. Два параметра семейства соответствуют первым интегралам системы (2.1), (2.2), следовательно, на произвольном уровне интегралов движения существует однопараметрическое семейство неподвижных точек.

В абсолютном пространстве это решение соответствует движению сфероробота по окружности радиуса ρ со скоростью v_0 и постоянным углом наклона плоскости вращения маятника ξ . Зависимость ρ и v_0 от параметров семейства (2.4) имеет вид

$$v_0 = R_s \omega_\vartheta \gamma_3, \quad \rho = \frac{v_0}{C_1}. \quad (2.5)$$

Величины ρ и v_0 являются более удобными для параметризации семейства (2.4), так как описывают физические величины и могут наблюдаться в эксперименте.

Переходя к указанным параметрам, семейство неподвижных точек (2.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \omega_\vartheta &= \frac{v_0}{R_s \gamma_3}, \quad \gamma_0 = (\sin \xi, 0, \cos \xi), \quad \Omega_0 = \frac{v_0}{\rho} \gamma - \frac{v_0}{R_s \gamma_3} e_1, \\ \omega_\varphi &= - \frac{\left(\rho \tilde{I} - \gamma_1 \gamma_3 R_s (I_{b1} - I_{b3}) + m_b R_b R_s (R_s \gamma_1 - \rho \gamma_3) \right) v_0^2 + m_b R_b g R_s \rho^2 \gamma_1}{\rho R_s v_0 I_{b3} \gamma_1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\tilde{I} = I_s + (m_s + m_b) R_s^2$. Данное частное решение соответствует движению сфероробота с постоянной скоростью v_0 по закону

$$x(t) = x_0 + \rho \cos \left(\frac{v_0 t}{2\pi \rho} \right), \quad y(t) = y_0 + \rho \sin \left(\frac{v_0 t}{2\pi \rho} \right),$$

при этом точка контакта описывает на плоскости Oxy окружность радиуса ρ (см. рис. 2), а полную окружность сфероробот проезжает за время $T = 2\pi \rho / v_0$.

Рис. 2. (а) Схематическая модель движения сфероробота по окружности в соответствии с частным решением (2.6). (б) Сечение схемы (а) плоскостью $e_1 e_3$: при движении выделенная плоскость отклонена на угол ξ от вертикали, при этом вектор скорости центра сфероробота направлен по касательной к описываемой точкой контакта окружности (на рисунке отложен от точки контакта).

Анализ устойчивости решения (2.3) для свободной системы проведен в работе [9], где показано, что нижнее положение маятника является устойчивым при любых значениях свободных параметров семейства, а верхнее становится устойчивым при достаточно больших угловых скоростях маятника ω_φ . Целью данной работы является анализ устойчивости второго частного решения (2.6), соответствующего движению сфероробота по окружности.

3. Анализ устойчивости частного решения (2.6)

Для исследования устойчивости данного частного решения запишем уравнения (1.1) в виде

$$\dot{z} = F(z),$$

где $z = (\Omega, \gamma, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$, $F(z)$ — вектор, компоненты которого являются функциями переменных z и параметров системы. Раскладывая $F(z)$ около частного решения (2.6), получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{z}} = L\tilde{z}, \quad L = \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=z_0}, \quad (3.1)$$

где $\tilde{z} = z - z_0$, $z_0 = (\Omega_0, \gamma_0, \omega_{\vartheta}, \omega_{\varphi})$ — вектор, компоненты которого соответствуют частному решению (2.6), L — матрица линеаризации.

Характеристическое уравнение системы (3.1)

$$\det(L - \lambda E) = 0 \quad (3.2)$$

имеет вид

$$\lambda^4 P_4(\lambda) = 0, \quad P_4(\lambda) = a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_3, \quad (3.3)$$

где λ — корни характеристического уравнения (3.2), a_1, a_2, a_3 — постоянные коэффициенты, зависящие от массо-геометрических параметров системы, а также от свободных параметров решения (2.6) v_0, ρ, ξ . Данные коэффициенты имеют громоздкий вид, поэтому здесь мы их приводить не будем, а ограничимся лишь численным анализом решений уравнения (3.3).

Из (3.3) следует, что четыре собственных числа равны нулю; три из них соответствуют существованию трех интегралов движения, а четвертое — свободному параметру решения (2.6). Для решения вопроса об устойчивости в полной нелинейной постановке необходимо провести разложение системы (1.1) до более высоких порядков, что выходит за рамки данной работы.

Полином $P_4(\lambda)$ можно записать в виде

$$P_4(\lambda) = P_2(\chi) = a_1 \chi^2 + a_2 \chi + a_3, \quad \chi = \lambda^2. \quad (3.4)$$

В работах [9, 14], где рассматривается управляемое движение описанной системы, показано, что управление возможно только при выполнении условия

$$I_{b1} > m_b R_b R_s, \quad (3.5)$$

поэтому в настоящей работе также будем полагать, что данное условие выполняется.

Нетрудно показать, что коэффициент a_1 является положительным при любых параметрах:

$$a_1 = I_s R_s^2 \rho^4 \cos^2 \xi \sin^2 \xi p_1 p_2 > 0,$$

где

$$p_1 = I_{b1} \tilde{I} - m_b^2 R_b^2 R_s^2, \quad p_2 = \tilde{I} + I_{b1} - 2m_b R_b R_s.$$

Действительно, с учетом (3.5), константы p_1 и p_2 , а следовательно, и a_1 всегда положительны. Таким образом, в зависимости от знаков дискриминанта D и коэффициентов a_2 и a_3 возможны следующие случаи:

1. $D = a_2^2 - 4a_1 a_3 < 0$. В этом случае корнями уравнения (3.4) является пара комплексно-сопряженных чисел, а неподвижные точки являются фокусами (устойчивыми/неустойчивыми по части переменных).

2. $D = a_2^2 - 4a_1a_3 > 0$. В этом случае, в свою очередь, возможны два варианта.

- (а) $a_3 > 0$: корни уравнения (3.4) одного знака, неподвижные точки типа центр (при $a_2 > 0$) либо седло (при $a_2 < 0$).
- (б) $a_3 < 0$: корни разных знаков, неподвижные точки типа седло-центр.

Нетрудно убедиться, что выбранная нами параметризация (2.5) частного решения (2.6) обладает особенностями, поэтому не все точки в пространстве параметров (v_0, ρ, ξ) соответствуют решению (2.4) с конечными скоростями. В частности, такие особенности появляются при $\xi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Рассмотрим эти значения ξ отдельно.

При $\xi = 0$ и $\xi = \pi$ решениям (2.4) соответствуют только бесконечно удаленная прямая $v_0 = \text{const}$ при $\rho \rightarrow \infty$ и точка $v_0 = 0$ при $\rho = 0$. Используя параметризацию (2.4) и (2.5), можно показать, что прямой соответствует качение сфероробота с постоянной скоростью по прямой, а точке — вращение сфероробота на месте вокруг вертикали. Всем остальным значениям v_0 и ρ при заданных ξ не соответствует никакое стационарное движение с конечными угловыми скоростями.

При $\xi = \pi/2$ и $\xi = 3\pi/2$ решению (2.4) в пространстве параметров также соответствует только точка $v_0 = 0$ при $\rho = 0$. Этой точке соответствует вращение сфероробота вокруг вертикали «на боку», то есть в положении, когда плоскость вращения маятника горизонтальна и параллельна опорной плоскости. Вращение происходит с произвольной угловой скоростью Ω_0 , при этом маятник вращается относительно центра сферы с произвольной угловой скоростью ω_ϑ , а ротор должен вращаться со скоростью

$$\omega_\varphi = \frac{1}{I_{b3}(\Omega_0 + \omega_\vartheta)} ((\Omega_0 + \omega_\vartheta)^2 m_b R_b R_s - m_b R_b g).$$

Всем остальным значениям ρ и v_0 при $\xi = \pi/2$ и $\xi = 3\pi/2$ так же, как и в предыдущем случае, не соответствует решение (2.4) с конечными угловыми скоростями.

Таким образом, указанные особые решения ξ делят область параметров на четыре отрезка, каждый из которых мы будем рассматривать отдельно. Перечислим эти четыре области параметров и соответствующие им положения сфероробота и маятника в пространстве.

- I. При $\xi \in (0, \pi/2)$ плоскость вращения маятника отклонена от вертикали, при этом маятник наклонен к центру описываемой точкой контакта окружности P и находится в нижней части сферической оболочки (нижней полусфере).

- II. При $\xi \in (\pi/2, \pi)$ плоскость вращения маятника отклонена так, что маятник наклонен к центру окружности P и находится в верхней части сферической оболочки (зеркальное отражение случая (I) относительно горизонтальной плоскости, проходящей через центр сфероробота).

- III. При $\xi \in (\pi, 3\pi/2)$ маятник отклонен от центра окружности P и находится в верхней части сферической оболочки (зеркальное отражение случая (II) относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр сфероробота).

- IV. При $\xi \in (3\pi/2, 2\pi)$ маятник отклонен от центра окружности P и находится в нижней части сферической оболочки (зеркальное отражение случая (I) относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр сфероробота).

Для определенности будем считать, что параметры ρ и v_0 положительны и не равны нулю, и будем проводить численное моделирование при следующих параметрах системы:

$$m_b = 1, \quad m_s = 0.1, \quad R_s = 1, \quad R_b = R_s/4, \quad I_{b1} = 0.3, \quad I_{b3} = 0.47, \quad I_s = 2/30.$$

Рассмотрим более подробно все четыре области параметров для движения сфероробота по окружности.

I. $\xi \in (0, \pi/2)$. Маятник наклонен к центру окружности и находится в нижней части сферической оболочки.

Численные эксперименты показывают, что в этом случае дискриминант уравнения (3.4) всегда положителен, как и коэффициент a_2 , следовательно, решение имеет два корня, причем один из них всегда отрицателен $\chi_1 < 0$, а второй корень χ_2 , в зависимости от параметров решения (2.6), то есть от знака a_3 , может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дискриминант уравнения (3.4) для данного случая (и вообще для всех четырех случаев) имеет громоздкий вид, поэтому строгое аналитическое доказательство того, что для этого случая дискриминант не обращается в нуль, является достаточно трудоемкой задачей и выходит за рамки данной статьи. Мы ограничимся только численным моделированием.

На рисунках 3 и 4 изображена поверхность $\chi_2 = 0$ в пространстве параметров (v_0, ρ, ξ) , и сечения поверхности плоскостью $v_0 = \text{const}$. Область параметров, расположенная ниже поверхности на рисунке 3 (и показанная серым цветом на рисунке 4), соответствует положительным значениям χ_2 , выше (белая область) — отрицательным.

Таким образом, уравнение (3.4) имеет один отрицательный корень $\chi_1 < 0$, а второй χ_2 , в зависимости от параметров, может принимать как положительные, так и отрицательные

Рис. 3. Поверхность $\chi_2 = 0$ для случая $\xi \in (0, \pi/2)$.

Рис. 4. Сечение поверхности $\chi_2 = 0$ плоскостью $v_0 = \text{const}$ для случая $\xi \in (0, \pi/2)$.

значения. В результате соответствующее биквадратное уравнение (3.3) имеет пару чисто мнимых собственных значений λ и либо пару действительных чисел с противоположными знаками (серая область параметров), либо пару чисто мнимых корней (белая область). Следовательно, при малых скоростях движения частное решение является неустойчивым (седло-центр), при больших — устойчивым (центр).

II. $\xi \in (\pi/2, \pi)$. Маятник наклонен к центру окружности и находится в верхней части сферической оболочки.

Численные эксперименты показывают, что в этом случае при любых значениях параметров ρ , v_0 , ξ дискриминант уравнения (3.4), а также коэффициенты a_2 и a_3 положительны. Следовательно, корни уравнения (3.4) отрицательны, а решение (2.6) при $\xi \in (\pi/2, \pi)$ является устойчивым (неподвижная точка типа центр).

III. $\xi \in (\pi, 3\pi/2)$. Маятник отклонен от центра окружности и находится в верхней части сферической оболочки.

В этом случае как дискриминант, так и параметры a_2 и a_3 меняют знак, следовательно, неподвижные точки могут быть как типа фокус, так и типа седло и центр.

На рисунке 5 изображены поверхности $D = 0$ (b), $a_2 = 0$ (c) и $a_3 = 0$ (d) по отдельности и все вместе (a). На рисунке 6 приведены сечения этих поверхностей различными значениями $v_0 = \text{const}$. Серым цветом обозначены области, соответствующие неподвижной точке типа седло-центр (корни уравнения (3.4) действительны и разных знаков), темно-серым — седло (корни действительны и положительны), штриховкой — фокус (пара комплексно-сопряженных корней), белые области соответствуют устойчивым точкам типа центр (корни действительны и отрицательны).

Таким образом, в случае, когда маятник находится в верхней части сферической оболочки и отклонен от центра окружности, при малых скоростях движения это решение является неустойчивым, но становится устойчивым при больших скоростях.

IV. $\xi \in (3\pi/2, 2\pi)$. Маятник отклонен от центра окружности и находится в нижней части сферической оболочки.

Как и в первом случае, коэффициент a_2 и дискриминант уравнения (3.4) всегда положительны. Один из корней всегда отрицателен $\chi_1 < 0$, а знак второго корня χ_2 определяется знаком a_3 , причем a_3 может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Рис. 5. Поверхности (b) $D = 0$, (c) $a_2 = 0$, (d) $a_3 = 0$ и (a) все три на одном графике в пространстве параметров (v_0, ρ, ξ) для случая $\xi \in (\pi, 3\pi/2)$.

Рис. 6. Сечения поверхностей $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$, $D = 0$ плоскостью $v_0 = \text{const}$ для случая $\xi \in (\pi, 3\pi/2)$.

Рис. 7. Поверхность $\chi_2 = 0$ в пространстве параметров (v_0, ρ, ξ) для случая $\xi \in (3\pi/2, 2\pi)$. Рис. 8. Сечения поверхности $\chi_2 = 0$ плоскостью $v_0 = \text{const}$ для случая $\xi \in (3\pi/2, 2\pi)$.

На рисунках 7 и 8 изображены поверхность $\chi_2 = 0$ в пространстве параметров (v_0, ρ, ξ) и сечения поверхности плоскостью $v_0 = \text{const}$. Область параметров, расположенная внутри поверхности на рисунке 7 (и показанная серым цветом на рисунке 8), соответствует положительным значениям χ_2 (соответствующая неподвижная точка — седло-центр), вне поверхности — отрицательным (белая область на сечениях, соответствующая неподвижная точка — центр).

Таким образом, для этого случая решение является неустойчивым при малых скоростях движения сфероробота вдоль окружности.

Заключение

В данной работе проведен анализ динамики системы, описывающей свободное движение сфероробота комбинированного типа по плоскости. В частности, исследована устойчивость частного решения системы (1.1), соответствующего движению сфероробота по окружности, в линейном приближении. Показано, что устойчивость существенно зависит от ориентации (наклона) сфероробота и маятника при качении по окружности.

Дальнейшее развитие полученных результатов связано с экспериментальной проверкой существования рассмотренного частного решения, которое на практике может быть реализовано за счет вращения ротора и маятника с постоянными угловыми скоростями.

Кроме того, интересным является вопрос о стабилизации частного решения, соответствующего качению сфероробота по окружности. В работе [9] для данной модели сфероробота получены управления в форме обратной связи, которые стабилизируют частное решение (2.3), однако для решения (2.6) вопрос остался открытым. Интересно было бы, основываясь на результатах данной работы, найти управления, стабилизирующие решение (2.6), и проверить их существование экспериментально.

Автор выражает благодарность А. А. Килину и Т. Б. Ивановой за полезные обсуждения полученных результатов.

References

- [1] Balandin D. V., Komarov M. A., Osipov G. V. A motion control for a spherical robot with pendulum drive, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2013, vol. 52, no. 4, pp. 650–663; see also: *Izv. Akad. Nauk. Teor. i Sist. Upravlen.*, 2013, no. 4, pp. 150–163.
- [2] Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E., Sánchez de Alvarez G. Stabilization of rigid body dynamics by internal and external torques, *Automatica*, 1992, vol. 28, no. 4, pp. 745–756.
- [3] Bloch A. M., Reyhanoglu M., McClamroch N. H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1992, vol. 37, no. 11, pp. 1746–1757.
- [4] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [5] Gajbhiye S., Banavar R. N. Geometric tracking control for a nonholonomic system: A spherical robot, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, no. 18, pp. 820–825.
- [6] Halme A., Schonberg T., Wang Y. Motion control of a spherical mobile robot, in *Proc. of the 4th Internat. Workshop on Advanced Motion Control (AMC'96, Mie, Japan): Vol. 1*, pp. 259–264.
- [7] Hogan F. R., Forbes J. R., Barfoot T. D. Rolling stability of a power-generating tumbleweed rover, *J. Spacecraft Rockets*, 2014, vol. 51, no. 6, pp. 1895–1906.
- [8] Ivanova T. B., Kilin A. A., Pivovarov E. N. Controlled motion of a spherical robot with feedback: 1, *J. Dyn. Control Syst.*, 2017, 14 pp.
- [9] Ivanova T. B., Kilin A. A., Pivovarov E. N. Controlled motion of a spherical robot with feedback: 2, *J. Dyn. Control Syst.*, <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9390-7> (2017).
- [10] Ivanova T. B., Pivovarov E. N. Dynamics and control of a spherical robot with an axisymmetric pendulum actuator, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 507–520 (Russian).
- [11] Karavaev Yu. L., Kilin A. A. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 134–152.
- [12] Kayacan E., Bayraktaroglu Z., Saeys W. Modeling and control of a spherical rolling robot: A decoupled dynamics approach, *Robotica*, 2012, vol. 30, no. 4, pp. 671–680.
- [13] Kilin A. A., Karavaev Yu. L. Experimental research of dynamic of spherical robot of combined type, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 721–734 (Russian).
- [14] Kilin A. A., Pivovarov E. N., Ivanova T. B. Spherical robot of combined type: Dynamics and control, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 716–728.
- [15] Madhushani T. W. U., Maithripala D. H. S., Wijayakulasooriya J. V., Berg J. M. Semi-globally exponential trajectory tracking for a class of spherical robots, *Automatica J. IFAC*, 2017, vol. 85, pp. 327–338.
- [16] Yu T., Sun H., Jia Q., Zhang Y., Zhao W. Stabilization and control of a spherical robot on an inclined plane, *Res. J. Appl. Sci. Eng. Tech.*, 2013, vol. 5, no. 6, pp. 2289–2296.

Stability analysis of steady motions of a spherical robot of combined type

Elena N. Pivovarova

Udmurt State University

ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

archive@rcd.ru

The dynamics of a spherical robot of combined type consisting of a spherical shell and a pendulum attached at the center of the shell is considered. At the end of the pendulum a rotor is installed. For this system we carry out a stability analysis for a partial solution which in absolute space corresponds to motion along a circle with constant velocity. Regions of stability of a partial solution are found depending on the orientation of the spherical robot during the motion, its velocity and the radius of the circle traced out by the point of contact.

MSC 2010: 70Exx, 37J60

Keywords: spherical robot, nonholonomic constraint, partial solution, stability

Received October 04, 2017, accepted November 17, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 611–623 (Russian)