ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 539.3:534.1

MSC 2010: 74H45

Влияние несовершенств формы на колебания кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа

С. В. Серёгин

Исследованы динамические характеристики простой расчетной модели несовершенного резонатора ВТГ — кольцевого элемента, находящегося в условиях плоской деформации, имеющего начальные отклонения от идеальной круговой формы. На частных примерах показано, что расщепление изгибного частотного спектра геометрически несовершенных колец может возникать в случаях, отличных от представлений современной теории. Установлена закономерность, при которой возникает расщепление изгибного частотного спектра несовершенного кольца. Расстройка частотного спектра имеет место в случаях, когда число формообразующих волн равно числу волн несовершенств формы кольца, а также в случаях, когда число формообразующих волн в два, в три, в четыре, и так далее, раза больше волн несовершенств формы. Если число волн несовершенств кольца четное, то расщепление изгибного частотного спектра имеет место и в том случае, когда число формообразующих волн в два раза меньше волн несовершенств формы, а также в случаях, когда число формообразующих волн в полтора, в два с половиной, в три с половиной, и так далее, раза больше волн несовершенств формы, при этом в первом случае расстройка частотного спектра может быть весьма значительной.

Ключевые слова: кольцо, волновой твердотельный гироскоп, резонатор, начальные несовершенства, колебания, расщепление, частотный спектр, резонанс

Получено 03 мая 2017 года
После доработки 30 августа 2017 года

Серёгин Сергей Валерьевич
Seregina-komsHome@yandex.ru, <http://sereginsv.ru/>
Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет
681013, Россия, г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, д. 27

1. Введение

Разработка и совершенствование устройств, способных реагировать на изменение углов ориентации тела (гироскопов), является на сегодняшний день одним из приоритетных направлений развития науки и техники [1, 2]. Принцип действия ВТГ основан на явлении прецессии упругой стоячей волны, возбужденной в осесимметричном упругом теле (резонаторе) при его вращении вокруг оси симметрии [3–5]. Чувствительным элементом (резонатором) волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) является оболочка вращения либо упругое кольцо [6–8], закрепленные относительно оси чувствительности. Резонаторы имеют динамическую асимметрию, вызванную наличием неизбежных начальных отклонений от идеальной круговой формы [9–13]. Такие несовершенства формы приводят к специфическим особенностям при изгибных колебаниях колец [14–17], что, в свою очередь, может привести к неустойчивой работе ВТГ [7, 18–21].

Согласно результатам работ [22, 23] считается, что расщепление изгибного частотного спектра оболочки и кольца возникает только в том случае, когда число формообразующих волн равно числу волн несовершенств формы, $n = n_0$. В статье [12] методом возмущений исследованы свободные колебания кольцевого резонатора ВТГ, имеющего малые неосесимметричные отклонения от идеальной круговой формы. Показано, что расщепление спектра частот кольца имеет место в случае, когда число формообразующих волн в два раза меньше числа волн несовершенств формы [12, 15–17].

В настоящей работе подробно изучаются возможные зоны расщепления изгибного частотного спектра простой расчетной модели несовершенного резонатора ВТГ — кольцевого невращающегося элемента, находящегося в условиях плоской деформации.

2. Математическая модель

Рассматривается кольцо единичной ширины, радиусом R и толщиной h . Считается, что кольцо имеет начальные отклонения от идеальной круговой формы $w_0(y)$.

Анализ основан на известных уравнениях движения теории пологих оболочек [17, 22]. Устремив длину оболочки к бесконечности, получим

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial(w + w_0)}{\partial y} \right) + \frac{N_y}{R} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

где N_y — динамическое усилие, y — окружная координата, $w(y, t)$ — упругий динамический прогиб, $D = Eh^3 / [12(1 - \mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, ρ — массовая плотность, t — время.

Из первого уравнения (2.1) следует, что окружное погонное динамическое усилие N_y зависит только от времени:

$$N_y(y, t) = N_y(t) = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \alpha(t). \quad (2.2)$$

Из условия периодичности решения определяем окружное перемещение $v(y, t)$:

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[\frac{w}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha(t) \right] dy = 0. \quad (2.3)$$

Известно, что наибольшее влияние на динамические характеристики оболочек и колец оказывают несовершенства, находящиеся в «резонансе» с формой ожидаемого динамического прогиба или повторяющие ее [22]. Поэтому будем считать, что кольцо имеет начальные отклонения от идеальной круговой формы, изменяющиеся по закону

$$w_0(y) = ha_0 \sin(\beta_0 y + \varphi_0), \quad (2.4)$$

где a_0 — безразмерная амплитуда, φ_0 — начальный угол, $\beta_0 = n_0/R$, где n_0 — число окружных волн несовершенств формы (см. рис. 1). Выражение (2.4) можно представить и в ином виде: $w_0(y) = h(a_{10} \sin \beta_0 y + a_{20} \cos \beta_0 y)$, где $a_{10} = a_0 \cos \varphi_0$, $a_{20} = a_0 \sin \varphi_0$.

Рис. 1. Схематическое изображение рассматриваемых несовершенств.

Для построения конечномерной модели используем подход, предложенный в [23] для оболочек с несовершенствами формы, который позже был обобщен для задач различных классов [24–27]. Данный подход предполагает, что начальные несовершенства формы вида (2.4) приводят к связанности низкочастотных изгибных форм колебаний с высокочастотными радиальными формами. Тогда упругий динамический прогиб кольца аппроксимируем выражением

$$w(y, t) = h[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y + a_3(t)], \quad (2.5)$$

где $a_1(t)$, $a_2(t)$ — безразмерные обобщенные координаты, соответствующие изгибным формам колебаний, а $a_3(t)$ — радиальной форме, $\beta = n/R$, n — число волн окружных динамических деформаций.

Подстановка (2.4) и (2.5) в (2.3) позволяет найти функцию $\alpha(t)$, а затем и окружное динамическое усилие $N_y(t)$. Ортогонализация второго уравнения (2.1) к форме прогиба (2.5) приводит к системе связанных модальных уравнений следующего вида (обозначения общепринятые [17, 22]):

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_n^2 a_1 - \frac{12}{\varepsilon^{0.5}} \omega_n^2 a_3 a_{10} + 6\omega_n^2 a_{10} (a_1 a_{10} + a_2 a_{20}) &= 0, \\ \ddot{a}_2 + \omega_n^2 a_2 - \frac{12}{\varepsilon^{0.5}} \omega_n^2 a_3 a_{20} + 6\omega_n^2 a_{20} (a_2 a_{20} + a_1 a_{10}) &= 0, \\ \ddot{a}_3 + \frac{12}{\varepsilon} \omega_n^2 a_3 - \frac{6}{\varepsilon^{0.5}} \omega_n^2 (a_1 a_{10} + a_2 a_{20}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из системы динамических уравнений (2.6) видно, что возбуждение колебаний кольца по одной из собственных изгибных форм приводит к возникновению радиальных форм колебаний ($\omega_n^2 = Dn^4/\rho h R^4$ — приближенное значение квадрата частоты свободных изгибных колебаний динамически симметричного кольца, $\varepsilon = n^4 (h/R)^2$ — параметр волнообразования, характеризующий относительную толщину кольца).

3. Собственные частоты колебаний

Частотное уравнение, соответствующее (2.6), определяет три собственные частоты $\Omega_{ni} = \omega_{ni}/\omega_n$ ($i = 1, 2, 3$). Первым двум частотам, Ω_{n1} , Ω_{n2} , соответствуют преимущественно изгибные, а третьей, Ω_{n3} , — преимущественно радиальные формы колебаний. В полученном решении начальные несовершенства уменьшают низшую из расщепленных собственных частот Ω_{n1} , при этом ее снижение зависит от величины отклонений начальных несовершенств и от параметра ε , большая частота Ω_{n2} равна 1. Расстройка частот оказывается незначительной.

В традиционном решении [22] при устремлении длины оболочки к бесконечности получается система из двух первых уравнений (2.6) и $a_3 = 0$. Характеристическое уравнение определяет две расщепленные частоты изгибных колебаний несовершенного кольца. Меньшая из расщепленных частот Ω_{n1} равна 1, то есть равна частоте колебаний геометрически совершенного кольца, а большая частота Ω_{n2} резко увеличивается с ростом амплитуды несовершенств [22].

Рассмотрим кольцо со следующими характеристиками: $R/h = 200$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, ширина $a = 0.005$ м, толщина $h = 0.005$ м, радиус $R = 1$ м. Количество конечных элементов 31 500. Кольцо совершает колебания в своей плоскости, имеет начальные отклонения от идеальной круговой формы, изменяющиеся по закону (2.4).

На рисунке 2 представлен график зависимости расщепленных безразмерных собственных частот $\Omega_{ni} = \lambda_{ni}/\lambda_n$ колебаний несовершенного кольца от числа формообразующих волн n , где $i = 1, 2$, λ_{ni} — большая или меньшая из расщепленных собственных частот колебаний кольца с $w_0(y)$, λ_n — частота колебаний геометрически идеального кольца. Кольцо имеет по окружности шесть волн начальных несовершенств, $n_0 = 6$. Сплошной синей^a линией обозначена большая из расщепленных безразмерных собственных частот Ω_{n2} , штриховой красной — меньшая Ω_{n1} .

Рис. 2. Зависимость безразмерных расщепленных собственных частот несовершенного кольца ($n_0 = 6$) от количества формообразующих волн n .

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1703009/>

Видим, что расщепление изгибного частотного спектра имеет место не только в случаях, когда число волн окружных динамических деформаций равно числу волн несовершенств кольца, $n = n_0$ (в рассматриваемом примере $n = n_0 = 6$), как это принято считать исходя из результатов работ [22, 23] и многих других, но и в тех случаях, когда число формообразующих волн в два раза меньше числа волн несовершенств формы, $n = n_0/2$ ($n = 3$). При этом во втором случае расщепление спектра частот в три раза больше, чем в случае $n = n_0$. Расстройка наблюдается также при $n = n_0 + n_0/2$, $n = 2n_0$, $n = 2n_0 + n_0/2$, $n = 3n_0$ (в данном случае при $n = 9$, $n = 12$, $n = 15$), и так далее. Однако в этих случаях расстройка спектра менее существенна.

В случае $n = n_0 = 6$ расщепление изгибного частотного спектра составляет 0.2 %. В новом случае $n = n_0/2$ (здесь $n = 3$) расстройка частотного спектра более существенна, чем в случае $n = n_0$, и составляет порядка 0.6 %.

На следующем графике представлены результаты расчета для оболочки с $n = 4$ окружными волнами несовершенств формы (рис. 3).

Видим, что расщепление частотного спектра происходит в случаях, когда числа формообразующих волн равны: $n = n_0/2$, $n = n_0$, $n = n_0 + n_0/2$, $n = 2n_0$, $n = 2n_0 + n_0/2$, $n = 3n_0$, и так далее (в данном случае $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$). Наибольшее расщепление происходит на участке $n = n_0/2 = 2$ и составляет 0.5 %. В известном случае $n = 4$ расстройка порядка 0.15 %. В случае $n = n_0 + n_0/2$ имеем $\Delta = 0.1$ %. Расщепление изгибного частотного спектра уменьшается при увеличении количества формообразующих волн.

Если оболочка по окружности имеет нечетное количество волн несовершенств формы, то расщепление спектра частот имеет место только в случаях $n = n_0$, $n = 2n_0$, $n = 3n_0$, $n = 4n_0$, и так далее (см. рис. 4). Расщепление спектра частот на первом участке (при $n = n_0 = 3$) составляет порядка 0.15 %. Когда число окружных волн динамических деформаций $n = 2n_0 = 6$, расстройка составляет 0.05 %. В остальных случаях расщепление менее существенно, $\Delta \leq 0.05$ %.

Интересными являются результаты, представленные на рисунке 5, для кольца, имеющего слегка приплюснутую форму (по окружности образуется две волны несовершенств).

Рис. 3. Зависимость безразмерных расщепленных собственных частот несовершенного кольца ($n_0 = 4$) от количества формообразующих волн n .

Рис. 4. Зависимость безразмерных расщепленных собственных частот несовершенного кольца ($n_0 = 3$) от количества формообразующих волн n .

Рис. 5. Зависимость безразмерных расщепленных собственных частот несовершенного кольца ($n_0 = 2$) от количества формообразующих волн n .

Можно допустить, что этот случай подчиняется той же, установленной выше, закономерности, что и для оболочки с четным числом окружных волн начальных несовершенств. Тогда расщепление спектра частот имеет место при каждом значении n : когда число формообразующих волн составляет $n = n_0$, $n = n_0 + n_0/2$, $n = 2n_0$, $n = 2n_0 + n_0/2$, $n = 3n_0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Разумеется, с практической точки зрения, наиболее интересны случаи, когда число волн начальных несовершенств минимально: $n_0 = 2$, $n_0 = 3$, $n_0 = 4$. Такие несовершенства наиболее часто встречаются при изготовлении конструкций или получаются при деформациях кольцевых элементов в условиях эксплуатации.

Таким образом, следует заключить, что при действии периодических нагрузок, неизбежно возникающих в условиях эксплуатации кольцевых резонаторов волновых твердо-

тельных гироскопов, нерезонансные зоны, определяем согласно традиционному подходу, по существу, могут оказаться резонансными. Резонансно опасные режимы колебаний с несовершенствами такого рода могут возникать на частотах, намного меньших и/или больших, чем это предсказывает традиционная теория. Такое поведение несовершенных кольцевых элементов машин может привести к нежелательному напряженно-деформируемому состоянию, специфическим явлениям [3, 9, 17] и сложным видам динамической неустойчивости в условиях эксплуатации.

4. Выводы

По итогам тщательного исследования и анализа большого количества полученных результатов установлена закономерность возникновения расщепления изгибного частотного спектра несовершенного кольца. Показано, что расстройка спектра частот имеет место в случаях, когда

- число n формообразующих волн кратно числу n_0 волн несовершенств формы кольца, $n = kn_0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$),
- $n = n_0/2$, если n_0 — четное,
- $n = (k + 1/2)n_0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

В случае $n = n_0/2$ расстройка частотного спектра может быть существенной и в несколько раз превосходить величины расщепления спектра частот в других зонах.

References

- [1] Matveev V. A., Lunin B. S., Basarab M. A. *Navigation systems based on solid-state wave gyroscopes*, Moscow: Fizmatlit, 2008 (Russian).
- [2] Dzhandzhgava G. I., Bakhonin K. A., Vinogradov G. M., Trebukhov A. V. Hemispherical resonance gyro-based strapdown inertial navigation system, *Gyroscopy and Navigation*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 91–97; see also: *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2008, no. 1, pp. 22–32.
- [3] Martynenko Yu. G., Merkuriev I. V., Podalkov V. V. Dynamics of a ring micromechanical gyroscope in the forced-oscillation mode, *Gyroscopy and Navigation*, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 43–51; see also: *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2009, no. 3, pp. 10–22.
- [4] Guskov A. M., Korovaitseva E. A., Panovko G. Ya., Shokhin A. E. *Dynamics of the oscillator under external vibration*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2014 (Russian).
- [5] Ayazi F., Najafi K. A HARPSS polysilicon vibrating ring gyroscope, *IEEE J. Microelectromech. Syst.*, 2001, vol. 10, no. 2, pp. 169–179.
- [6] Zhuravlev V. F., Klimov D. M. *Wave solid-state gyroscopes*, Moscow: Nauka, 1985 (Russian).
- [7] Merkuryev I. V., Podalkov V. V. *The dynamics of MEMS and wave solid-state gyroscopes*, Moscow: Fizmatlit, 2009 (Russian).
- [8] Lysov A. N., Vinichenko N. T., Lysova A. A. *Applied theory of gyroscopes*, Chelyabinsk: Yuzhno-Uralsk. Univ., 2009 (Russian).
- [9] Zhuravlev V. Ph. Drift of an imperfect hemispherical resonator gyro, *Mech. Solids*, 2004, vol. 39, no. 4, pp. 15–18; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2004, no. 4, pp. 19–23.

- [10] Kozubnyak S. A. Splitting of natural frequencies of cylindrical resonator gyro due to non-ideal shape, *Vestn. MGTU. Ser. Priborostroenie*, 2015, no. 3, pp. 39–49 (Russian).
- [11] Lin Zh., Fu M., Deng Zh., Liu N., Liu H. Frequency split elimination method for a solid-state vibratory angular rate gyro with an imperfect axisymmetric-shell resonator, *Sensors*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 3204–3223.
- [12] Narajkin O. S., Sorokin F. D., Kozubnyak S. A. Form perturbation-produced frequency splitting of solid-state wave gyroscope ring resonator, *Inzhenern. Zhurnal: Nauka i Innovatsii*, 2012, no. 6, pp. 48 (Russian).
- [13] Vakhlyarskiy D. S., Guskov A. M., Basarab M. A., Matveev V. A. Using a combination of FEM and perturbation method in frequency split calculation of a nearly axisymmetric shell with middle surface shape defect, *Nauka i obrazovanie*, 2016, no. 5, pp. 152–174 (Russian).
- [14] Seregin S. V. Qualitative effects of vibrations of reinforcing ring elements with attached mass, as a special case of an infinitely long thin circular cylindrical shell, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mashinost.*, 2017, no. 1(682), pp. 31–43 (Russian).
- [15] Leizerovich G. S., Prihod'ko N. B., Seregin S. V. Influence of low additional mass on splitting of the frequency spectrum of a circular ring with initial irregularities, *Stroitel'mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2013, no. 6, pp. 49–51 (Russian).
- [16] Seregin S. V., Leizerovich G. S. Free vibration of infinite length circular cylindrical shell with initial imperfections and a small added mass, *Uchen. Zap. Komsomolsk-na-Amure Gos. Tekhn. Univ.*, 2014, vol. 1, no. 4(20), pp. 36–43 (Russian).
- [17] Seregin S. V. *Dynamics of thin cylindrical shells with added mass*, Komsomolsk-na-Amure: KnAGTU, 2016 (Russian).
- [18] Sorenson L. D., Shao P., Ayazi F. Effect of thickness anisotropy on degenerate modes in oxide micro-hemispherical shell resonators, in *Proc. of the IEEE 26th Internat. Conf. on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS'2013): Vol. 1*, Piscataway: IEEE, 2013, pp. 169–172.
- [19] Vakhlyarskiy D. S., Guskov A. M., Basarab M. A., Matveev V. A. Numerical study of differently shaped HRG resonators with various defects, *Nauka i obrazovanie*, 2016, no. 10, pp. 1–22 (Russian).
- [20] Yilmaz E., Bindel D. Effects of imperfections on solid-wave gyroscope dynamics, in *Proc. IEEE Sensors (Baltimore, Md., USA, Nov. 2013)*, 4 pp.
- [21] Matveev V. A., Lunin B. S., Basarab M. A., Chumankin E. A. Balancing of metallic resonators of cylindrical vibratory gyroscopes for low and medium accuracy applications, *Nauka i obrazovanie*, 2013, no. 6, pp. 251–266 (Russian).
- [22] Kubenko V. D., Koval'chuk P. S., Krasnopol'skaya T. S. *Nonlinear interaction of flexural vibration forms of cylindrical shells*, Kiev: Naukova Dumka, 1984 (Russian).
- [23] Leizerovich G. S. Study of dynamic characteristics of circular cylindrical shells with initial imperfections: *Doctoral Dissertation*, Komsomolsk-na-Amure, Komsomolsk-na-Amure State Technical University, 2011, 329 pp.
- [24] Seregin S. V. Free flexural radial vibrations of a thin circular cylindrical shell bearing added mass, *Vestn. MGSU*, 2014, no. 11, pp. 74–81 (Russian).
- [25] Seregin S. V. Numerical and analytical investigation of free vibrations of circular cylindrical shells with added mass linearly distributed along generatrix, *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 378–384 (Russian).
- [26] Seregin S. V. Free vibrations of a thin circular cylindrical shell weakened by a hole, *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 3, pp. 258–262; see also: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Aviats. Tekh.*, 2015, no. 3, pp. 9–13.
- [27] Leizerovich G. S., Seregin S. V. Free vibrations of circular cylindrical shells with a small added concentrated mass, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 841–846; see also: *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 90–96.

The influence of shape imperfections on the vibrations of a ring resonator of a wave solid-state gyroscope

Sergei V. Seregin

Komsomolsk-na-Amure State Technical University
prosp. Lenina 27, Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russia
Seregin-komsHome@yandex.ru

This paper investigates the dynamic characteristics of a simple estimation model of the imperfect resonator of a wave solid-state gyroscope — a circumferential element under planar deformation conditions with initial deviations from the perfect circular form. Particular examples are given to show that the splitting of the bending frequency spectrum of geometrically imperfect rings may arise in cases different from those presented in modern theory. A pattern was established in which the splitting of the bending frequency spectrum of an imperfect ring arises. The unbalancing of the frequency content occurs when the number of forming waves is equal to the number of waves of imperfection of the ring's shape and when the number of forming waves is twice, three, four and more times larger than that of the waves of shape imperfection. If the number of waves of ring shape imperfection is even, then the splitting of the bending frequency spectrum occurs even in the case where the number of forming waves is half the number of waves of shape imperfection, and also in cases where the number of forming waves is one and a half times, twice, two and a half times, three and a half, and more times larger than that of waves of shape imperfection; in the former case the unbalancing of the frequency content can be very significant.

MSC 2010: 74H45

Keywords: ring, wave solid-state gyroscope, resonator, initial imperfections, vibrations, fission, frequency spectrum, resonance

Received May 03, 2017, accepted August 30, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 423–431 (Russian)