ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 537.86/530.182

MSC 2010: 34C15, 34D06, 70K05, 70K50

Бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с запаздыванием в цепи связи

А. Б. Адилова, С. А. Герасимова, Н. М. Рыскин

В работе рассмотрен процесс фазовой синхронизации в системе двух генераторов с запаздыванием. Представлены результаты бифуркационного анализа в приближении, когда время задержки мало по сравнению с временем установления колебаний. Анализируются условия устойчивости режимов синфазной и противофазной синхронизации при различных значениях параметров. Построены области синхронизации на плоскости параметров «расстройка – коэффициент связи».

Ключевые слова: бифуркация, запаздывание, связанные генераторы, синхронизация

Введение

Изучение взаимной синхронизации в ансамблях связанных осцилляторов является фундаментальной проблемой нелинейной динамики и имеет большое значение для многих приложений в области радиофизики, электроники, лазерной физики, биофизики, и т. д. [1–5]. В частности, системы связанных микроволновых электронных генераторов применяются для сложения мощностей (см., например, [6]). В последние годы внимание исследователей

Получено 31 октября 2016 года

После доработки 29 декабря 2016 года

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-32-00124 мол-а.

Адилова Асель Булатовна

AdilovaAB@info.sgu.ru

Герасимова Светлана Александровна

usasva@mail.ru

Рыскин Никита Михайлович

RyskinNM@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

привлекла задача о синхронизации ансамбля мощных гиротронов (мазеров на циклотронном резонансе) [7], поскольку они используются для электронно-циклотронного нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза. Однако на сверхвысоких частотах расстояние между связанными генераторами может существенно превышать длину волны, поэтому необходимо учитывать запаздывание сигнала, распространяющегося между ними. Как известно, картина синхронизации в системах с запаздыванием имеет много специфических особенностей по сравнению с системами с малым числом степеней свободы (см., например, [8]). В частности, в работе [9] исследовалась синхронизация простой модели двух осцилляторов с предельным циклом, связанных с задержкой. Как известно, в подобной системе можно выделить два основных типа связи: диссипативную (диффузионную) и инерционную (реактивную) [10, 11]. Эти случаи отличаются устройством областей синхронизации в пространстве параметров, в которых синхронный режим является устойчивым, причем при инерционной связи режим синхронизации становится бистабильным: возможна синхронизация как на синфазной, так и на противофазной моде. В [9] было обнаружено, что в зависимости от набега фазы сигнала в канале связи доминирует либо диссипативная связь, либо инерционная. Поскольку набег фазы определяется временем распространения сигнала между генераторами, характер связи и, соответственно, устройство областей синхронизации может сильно меняться при смещении генераторов на расстояние порядка длины волны.

Однако анализ, проведенный в [9], ограничивался фазовым приближением, которое справедливо в случае слабой связи и при слабой расстройке собственных частот генераторов. В этом случае синхронизация наступает в результате седло-узловой бифуркации (такой механизм обычно называют частотным или фазовым захватом [2–5]). Однако приведенные в [9] результаты численного моделирования показали, что при увеличении расстройки синхронизация наступает в результате другого механизма, известного как подавление собственных колебаний одного из генераторов [2–5]. При этом имеет место бифуркация Андронова–Хопфа. Этот режим уже не описывается фазовым приближением. В настоящей работе синхронизация системы связанных с задержкой генераторов исследуется в амплитудно-фазовом приближении, когда связь и расстройка частот уже не являются малыми.

1. Основные уравнения

В работе [9] была введена в рассмотрение модель двух связанных генераторов с запаздыванием в цепи связи, которая описывается уравнениями с запаздывающим аргументом для медленно меняющихся амплитуд колебаний $A_{1,2}$:

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= (\lambda_1 - |A_1|^2) A_1 + \rho_1 e^{-i\psi} A_2(t - \tau), \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= (\lambda_2 - |A_2|^2) A_2 + \rho_2 e^{-i\psi} A_1(t - \tau).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь $\Delta \sim (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$ — нормированная расстройка собственных частот генераторов, $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ — средняя частота, $\lambda_{1,2}$ — параметры возбуждения, $\rho_{1,2}$ — коэффициенты связи, τ — нормированное время задержки, $\psi = \omega_0 \tau$ — набег фазы сигнала за время прохождения по цепи связи. В отсутствие связи ($\rho_{1,2} = 0$) решение имеет вид

$$A_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}} e^{\mp i\Delta t/2},$$

то есть каждая из подсистем генерирует гармоническое колебание на соответствующей собственной частоте.

В дальнейшем будем полагать, что за исключением небольшой расстройки собственных частот остальные параметры обоих генераторов идентичны, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Рассмотрим случай, когда амплитуды $A_{1,2}$ меняются медленно по сравнению с временем задержки, то есть в правой части (1.1) можно положить $A_{1,2}(t - \tau) \approx A_{1,2}(t)$. С учетом сделанных предположений уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= (\lambda - |A_1|^2) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2, \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= (\lambda - |A_2|^2) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Из этих уравнений можно исключить параметр λ в результате перенормировки

$$A'_{1,2} = A_{1,2}/\sqrt{\lambda}, \quad \rho' = \rho/\lambda, \quad \Delta' = \Delta/\lambda, \quad t' = \lambda t. \quad (1.3)$$

Разделив систему (1.2) на уравнения для вещественных амплитуд и фаз, полагая $A_j = R_j \exp(i\varphi_j)$, можно в итоге прийти к системе уравнений третьего порядка [9] (штрихи у перенормированных переменных далее опускаем)

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= (1 - R_1^2) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (1 - R_2^2) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi), \\ \dot{\varphi} + \Delta &= \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right],\end{aligned}\quad (1.4)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз. Неподвижные точки этой системы соответствуют режимам синхронизации.

Несмотря на то, что (1.4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в ней опосредованно учитываются эффекты запаздывания, поскольку набег фазы ψ определяется временем задержки.

2. Бифуркационный анализ амплитудно-фазовых уравнений

Для бифуркационного анализа системы амплитудно-фазовых уравнений (1.4) используем известный программный пакет XPPAUT [12]. На рисунке 1 приведены области синхронизации, то есть области устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров «частотная расстройка Δ – коэффициент связи ρ », при различных значениях набег фазы ψ . Построены линии седло-узловой бифуркации $SN_{1,2}$ и бифуркации Андронова – Хопфа $AH_{1,2}$. Здесь индекс 1 соответствует синфазной моде колебаний, индекс 2 — противофазной.

Полученные результаты обнаруживают ряд отличий по сравнению с фазовым приближением, рассмотренным в работе [9]. Прежде всего отметим, что область, соответствующая синхронизации на противофазной моде, появляется только при $\psi > \pi/4$. В рамках фазового приближения она существует при любых ψ , однако при малых ψ лежит в области больших ρ , где фазовое приближение уже не справедливо. Еще одно отличие от фазового приближения состоит в том, что граница устойчивости для противофазной моды является замкнутой в области больших ρ (рис. 1б,с).

Тем не менее, подтверждается сам факт наличия бистабильности, то есть сосуществования режимов как синфазной, так и противофазной синхронизации. При увеличении значения ψ область синхронизации на противофазной моде увеличивается в размерах, опускаясь вниз. При $\psi = \pi/2$ (рис. 1д) границы областей синхронизации для противофазной

Рис. 1. Разбиение плоскости параметров (Δ, ρ) при различных значениях ψ : (а) 0.2π , (б) 0.3π , (с) 0.4π , (д) 0.5π . Области устойчивости синхронных режимов закрашены.

и синфазной моды сливаются, то есть фазовая бистабильность существует во всей области синхронизации. В области малых расстройк область синхронизации имеет характерную корневую особенность (то есть $\rho \sim \sqrt{\Delta}$), что также согласуется с результатами анализа в фазовом приближении [9].

Покажем, что противофазная синхронизация возникает при $\psi = \pi/4$. Для этого проанализируем неподвижные точки системы (1.4) в случае нулевой частотной расстройки. Такая ситуация подробно анализировалась в работе [13]. При $\Delta = 0$ неподвижные точки определяются из уравнений

$$\begin{aligned} (1 - R_1^2) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (1 - R_2^2) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi) &= 0, \\ \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) имеют два очевидных решения:

$$R_1 = R_2 = R, \quad \varphi = 0 \quad (2.2)$$

(в случае синфазной моды) и

$$R_1 = R_2 = R, \quad \varphi = \pi \quad (2.3)$$

(в случае противофазной моды). Кроме того, существуют и асимметричные решения, для которых $R_1 \neq R_2$. Как показано в [13], таких неподвижных точек может либо две, либо четыре, они симметричны друг другу относительно замены $R_{1,2} \rightarrow R_{2,1}$.

Для синфазных и противофазных решений из уравнений (2.1) получаем

$$(1 - R^2) R \pm \rho R \cos \psi = 0, \quad (2.4)$$

где синфазной моде соответствует знак «плюс», а противофазной — знак «минус». Соответственно, для амплитуды колебаний находим

$$R^2 = 1 \pm \rho \cos \psi. \quad (2.5)$$

Если провести анализ этих решений на устойчивость, следуя [13], то после стандартной процедуры линеаризации относительно малых возмущений придем к характеристическому уравнению, которое для противофазной моды имеет вид

$$p^3 + 4p^2(1 - 2\rho \cos \psi) + 4p(1 - 5\rho \cos \psi + 4\rho^2 \cos^2 \psi) + 8\rho(\rho - (1 + \rho^2) \cos \psi + 2\rho \cos^2 \psi - \rho^2 \cos^3 \psi) = 0. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) можно найти условия возникновения седло-узловой бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа. Для седло-узловой бифуркации корень характеристического уравнения равен нулю. Тогда из уравнения (2.6) получаем

$$\rho = \frac{\cos \psi}{1 + \cos^2 \psi}. \quad (2.7)$$

В случае бифуркации Андронова–Хопфа имеется два чисто мнимых корня характеристического уравнения, $p = \pm i\omega$. Подставив в (2.6) и разделив в нем действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} (4 - \rho \cos \psi) \omega^2 + 8\rho \cos \psi - 8\rho^2(1 + 2\cos^2 \psi) + 8\rho^3 \cos \psi(1 + \cos^2 \psi) &= 0, \\ \omega^3 - 4\omega + 20\omega\rho \cos \psi - 4\omega\rho^2(1 + 4\cos^2 \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исключая из этих соотношений ω , получим кубическое уравнение относительно ρ , один из корней которого задает порог бифуркации Андронова–Хопфа (см. [13]):

$$\rho = \frac{1}{3 \cos \psi}. \quad (2.9)$$

Значения ρ , определенные по формулам (2.7) и (2.9), соответствуют нижней и верхней границам области противофазной синхронизации при $\Delta = 0$ на рисунке 1. На рисунке 2 приведены зависимости $\rho(\psi)$, построенные в соответствии с (2.7), (2.9). Поскольку точка седло-узловой бифуркации лежит ниже точки бифуркации Андронова–Хопфа только при $\psi > \pi/4$, область противофазной синхронизации появляется только при выполнении этого условия. Результаты численного моделирования, показанные на рисунке 2 кружками, полностью согласуются с теоретическими формулами. При $\psi = \pi/2$ порог бифуркации Андронова–Хопфа (2.9) стремится к бесконечности (рис. 2), что также хорошо согласуется с результатами, полученными при анализе плоскости параметров Δ, ρ (рис. 1d).

Рис. 2. Границы седло-узловой бифуркации (SN) и бифуркации Андронова–Хопфа (AH) при $\Delta = 0$, построенные по формулам (2.7) и (2.9) соответственно. Кругами отмечены точки, полученные в результате численного моделирования.

Структуру областей синхронизации помогают прояснить бифуркационные диаграммы, представленные на рисунке 3. На этих рисунках сплошными линиями показаны устойчивые положения равновесия, штриховыми — неустойчивые, кружками — предельные циклы. На бифуркационных диаграммах отложены только значения R_1 . Приводить значения для амплитуды колебаний второго осциллятора нет необходимости, так как для синфазной и противофазной мод $R_2 = R_1$, а асимметричные решения попарно симметричны друг другу.

Рассмотрим вначале случай $\psi = 0.2\pi$ (рис. 3а), когда доминирует диссипативная связь. При малых значениях коэффициента связи ρ существует устойчивая неподвижная точка, соответствующая синфазной моде (I), и три неустойчивых точки, соответствующие противофазной моде (A) и двум несимметричным решениям ($U_{1,2}$). Точка A имеет двумерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразия, для точек $U_{1,2}$, наоборот, устойчивые многообразия одномерны, а неустойчивые — двумерны. С увеличением ρ несимметричные решения приближаются к точке A и при $\rho \approx 0.49$, когда выполняется условие (2.7), они сливаются друг с другом и исчезают.

Более сложная ситуация имеет место в случае, когда доминирует инерционная связь (рис. 3б). Условие седло-узловой бифуркации (2.7) в данном случае выполняется при $\rho \approx 0.28$.

Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для состояний равновесия и предельных циклов при различных значениях ψ : (а) 0.2π , (б) 0.4π . Сплошными линиями показаны устойчивые стационарные состояния, пунктирными — неустойчивые, кружками — неустойчивый предельный цикл.

При этом противофазная мода становится устойчивой, а от нее ответвляются еще два несимметричных решения, которые обозначим $U_{3,4}$. С дальнейшим увеличением ρ они попарно приближаются друг к другу и в результате двойной седло-узловой бифуркации сливаются и исчезают. Это происходит при $\rho = \lambda/\sqrt{8(1 - \cos^2 \psi)} \approx 0.372$ [13]. В результате происходит образование неустойчивого предельного цикла C , который показан на рисунке 3б. Этот цикл лежит на поверхности, которая разграничивает бассейны притяжения точек I и A .

При увеличении ρ цикл уменьшается в размерах, и при $\rho \approx 1.076$, когда удовлетворяется условие (2.9), происходит обратная бифуркация Андронова–Хопфа. Цикл сливается с решением на противофазной моде, в результате чего оно теряет устойчивость. С этим связан механизм исчезновения мультистабильности.

Поскольку детальный бифуркационный анализ случая $\Delta = 0$ дан в работе [13], не будем далее рассматривать этот случай, а остановимся на анализе поведения при изменении частотной расстройки. На рисунках 4, 5 показаны бифуркационные диаграммы в координатах (R_1, Δ) при $\psi = 0.2\pi$ (рис. 4) и $\psi = 0.4\pi$ (рис. 5) и различных значениях коэффициента связи. Эти кривые фактически представляют собой зависимости амплитуды колебаний от частотной расстройки, то есть амплитудно-частотные характеристики или резонансные кривые [4].

Рис. 4. Зависимость амплитуды первого осциллятора для $\psi = 0.2\pi$ при различных значениях параметра связи: (а) $\rho = 0.197$, (б) $\rho = 0.204$. Сплошными линиями показаны устойчивые стационарные состояния, пунктирными — неустойчивые.

В случае, когда преобладает диссипативная связь (рис. 4), устойчивой является только синфазная мода (I). Также присутствуют решения, соответствующие противофазной моде (A) и двум несимметричным модам ($U_{1,2}$), которые неустойчивы. Видно, что при увеличении расстройки происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой точки I и A сливаются и исчезают. Помимо этого, происходят также бифуркации, связанные со сливанием точек A и $U_{1,2}$ (см. рис. 4б). Они приводят к перезамыканию резонансных кривых.

На рисунке 6а приведены границы седло-узловой бифуркации на плоскости параметров (Δ, ρ) (это, по сути, увеличенный фрагмент рис. 1а) и отмечено, слияние каких точек происходит на той или иной границе. На боковых границах, то есть при выходе за пределы области синхронизации, сливаются точки I и A . Верхняя граница состоит из двух участков, которые соответствуют слиянию точки A с точкой U_1 или U_2 .

В случае, когда доминирует инерционная связь (рис. 5), устойчивыми могут быть колебания как на синфазной, так и на противофазной моде. При малом значении параметра связи помимо устойчивых точек I и A существуют также четыре несимметричные неустойчивые точки (рис. 5а). Имеют место седло-узловые бифуркации, связанные со сливанием

Рис. 5. Зависимость амплитуды первого осциллятора для $\psi = 0.4\pi$ при различных значениях параметра связи: (a) $\rho = 0.3$, (b) $\rho = 0.388$, (c) $\rho = 0.6$. Сплошными линиями показаны устойчивые стационарные состояния, пунктирными — неустойчивые. Закрашенными кружками показаны устойчивые циклы, пустыми — неустойчивые.

Рис. 6. Границы седло-узловых бифуркаций на плоскости параметров (Δ, ρ) при различных значениях ψ : (a) 0.2π , (b) 0.4π .

точек I , A с точками $U_{3,4}$. При увеличении ρ также происходят бифуркации, связанные со слиянием точек U_1 и U_3 , U_2 и U_4 . При этом происходит перезамыкание резонансных кривых (см. рис. 5b). На рисунке 6b приведены границы седло-узловой бифуркации на плоскости (Δ, ρ) для этого случая (ср. рис. 1c). Видно, что наличие разнообразных седло-узловых бифуркаций обуславливает сложную структуру бифуркационных линий. Ранее подобная структура обсуждалась в работе [14], где рассматривалась синхронизация двух инерционно связанных осцилляторов ван дер Поля.

При достаточно больших значениях параметра связи синхронные режимы теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова – Хопфа, что соответствует механизму синхронизации подавлением. Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рисунке 5с. Видно, что при этом происходит рождение устойчивых предельных циклов. Однако циклы $C_{1,2}$, образовавшиеся на основе противофазной моды, существуют только в очень узком интервале параметра Δ . При дальнейшем увеличении расстройки они сливаются с неустойчивым циклом C_3 . Этот цикл лежит на поверхности, которая разграничивает бассейны притяжения двух аттракторов. После этого мультистабильность в системе исчезает и остается единственный аттрактор (точка I). Отметим, что похожее поведение было ранее описано в [14].

3. Заключение

В работе проведен бифуркационный анализ синхронизации двух связанных генераторов в приближении, когда время задержки считается малым по сравнению с характерным временем установления колебаний. В отличие от работы [9], анализ проводился в рамках амплитудно-фазового приближения. Переход к синхронному режиму при малых расстройках осуществляется в результате взаимного захвата частот, а при достаточно больших — в результате подавления собственных колебаний одного из генераторов. В области малых расстройек и малых значений коэффициента связи результаты согласуются с представленными в [9]. В частности, картина областей синхронизации сильно зависит от набега фазы ψ . В случае, когда $\psi \rightarrow 0$, доминирует диссипативная связь, при $\psi \rightarrow \pi/2$ — инерционная. Однако с увеличением параметра связи, когда фазовое приближение уже не справедливо, обнаружен ряд отличий.

В частности, помимо двух неподвижных точек I и A , соответствующих режимам синфазной и противофазной синхронизации, существуют также от двух до четырех неустойчивых точек U_1 – U_4 . С увеличением параметра связи имеют место седло-узловые бифуркации, связанные со слиянием этих точек, и происходит перезамыкание резонансных кривых. Наличие разнообразных седло-узловых бифуркаций обуславливает сложную структуру бифуркационных линий на плоскости параметров (Δ, ρ) .

Бистабильность режимов синхронизации имеет место только при $\psi > \pi/4$. На плоскости параметров область синхронизации на противофазной моде лежит внутри области синхронизации на синфазной моде и ограничена линией бифуркации Андронова – Хопфа. При выходе из этой области аттрактор, соответствующий противофазной моде, сталкивается с неустойчивым циклом, который лежит на поверхности, разграничивающей бассейны притяжения двух аттракторов. После этого мультистабильность в системе исчезает и остается единственный аттрактор, соответствующий синфазному режиму синхронизации.

Авторы выражают благодарность д. ф.-м. н. профессору В. В. Астахову и к. ф.-м. н. доценту М. И. Балакину за ценные советы и обсуждение.

References

- [1] Landa P. S. *Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems*, Math. Appl., vol. 360, Dordrecht: Springer, 2013.
- [2] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, New York: Cambridge Univ. Press, 2001.

- [3] Anishchenko V., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L. *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: Tutorial and modern developments*, Berlin: Springer, 2007.
- [4] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Ryskin N. M. *Nonlinear oscillations*, 2nd ed., Moscow: Fizmatlit, 2005 (Russian).
- [5] Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. *Synchronization: From simple to complex*, Berlin: Springer, 2009.
- [6] York R. A., Compton R. C. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1991, vol. 39, no. 6, pp. 1000–1009.
- [7] Rozental R. M., Ginzburg N. S., Glyavin M. Yu., Sergeev A. S., Zotova I. V. Mutual synchronization of weakly coupled gyrotrons, *Phys. Plasmas*, 2015, vol. 22, no. 9, 093118, 5 pp.
- [8] Klinshov V. V., Nekorkin V. I. Synchronization of delay-coupled oscillator networks, *Physics–Uspekhi*, 2013, vol. 56, no. 12, pp. 1217–1229; see also: *Uspekhi Fiz. Nauk*, 2013, vol. 183, no. 12, pp. 1323–1336.
- [9] Usacheva S. A., Ryskin N. M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling, *Chaos*, 2014, vol. 24, no. 2, 023123, 9 pp.
- [10] Aronson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators, *Phys. D*, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 403–449.
- [11] Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., Turukina L. V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues, *Phys. D*, 2009, vol. 238, no. 14, pp. 1203–1215.
- [12] <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>
- [13] Wirkus S., Rand R. The dynamics of two coupled van der Pol oscillators with delay coupling, *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 30, no. 3, pp. 205–221.
- [14] Balanov A. G., Janson N. B., Astakhov V. V., McClintock P. V. E. Role of saddle tori in the mutual synchronization of periodic oscillations, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 72, no. 2, 026214, 6 pp.

Bifurcation analysis of mutual synchronization of two oscillators coupled with delay

Asel B. Adilova¹, Svetlana A. Gerasimova², Nikita M. Ryskin³

^{1,2,3}Saratov State University

ul. Astrakhanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

¹AdilovaAB@info.sgu.ru, ²usasva@mail.ru, ³RyskinNM@info.sgu.ru

In this paper, mutual synchronization of two limit-cycle oscillators coupled with delay is studied. The results of bifurcation analysis are presented under the assumption that the delay is small in comparison with the oscillation build-up time. The stability conditions for in-phase and anti-phase modes of synchronization are analyzed at different values of parameters. The synchronization tongues on the frequency mismatch — coupling strength plane are presented.

MSC 2010: 34C15, 34D06, 70K05, 70K50

Keywords: bifurcation, delay, coupled oscillators, synchronization

Received October 31, 2016, accepted December 29, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 3–12 (Russian)