ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.355 + 532.582

MSC 2010: 70Exx, 76-05

Идентификация параметров модели движения тороидального тела на основе экспериментальных данных

Е. В. Ветчанин, Е. С. Гладков

В работе изучается движение тяжелых тороидальных тел в жидкости. Для проведения экспериментов методом литья из химически отверждаемого полиуретана (плотность 1100 кг/м^3) были изготовлены образцы сплошных торov толщиной 3 см и с внешними диаметрами 10 см, 12 см и 15 см. С помощью подводной системы Motion Capture, состоящей из 4 камер, рабочей станции и специализированного программного обеспечения, был выполнен трекинг изготовленных натурных моделей. Для теоретического описания движения построены уравнения, учитывающие воздействие инерционных сил, сил трения и циркуляционного движения жидкости через отверстие в теле. С помощью генетических алгоритмов был выполнен подбор значений параметров модели, обеспечивающих наилучшее согласование экспериментальных и теоретических результатов.

Ключевые слова: падение в жидкости, тор, тело с отверстием, неодносвязное тело, конечномерная модель, трекинг объекта, генетические алгоритмы

Получено 07 декабря 2017 года
После доработки 12 марта 2018 года

Работа выполнена в рамках государственного задания ИжГТУ 1.2405.2017/4.6 и поддержана грантом РФФИ 15-08-09093-а.

Ветчанин Евгений Владимирович
eugene186@mail.ru

Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

Гладков Егор Сергеевич
gladkovyegor@gmail.com
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Введение

1. Тяжелые твердые тела, падающие в жидкости, могут демонстрировать как регулярные, так и хаотические режимы движения. Наиболее полную информацию о динамике таких систем удастся получить на основе совместного численного решения уравнений движения тела и уравнений Навье–Стокса. Однако в силу большого объема вычислений достаточно сложно проследить изменение динамических режимов в широком диапазоне изменения значений параметров. Поэтому для качественного описания движения твердых тел обычно используют конечномерные модели, в основе которых лежат уравнения Кирхгофа, дополненные слагаемыми, учитывающими вязкое трение и циркуляцию. Классическим примером применения таких моделей является задача Максвелла о падении пластинки [7]. Как правило, уравнения движения содержат множество параметров, от которых существенным образом зависит динамика системы. Данные параметры могут определяться либо из численных расчетов на основе уравнений Навье–Стокса [1, 8], либо из эксперимента [5].

2. Более сложные трехмерные движения наблюдаются при падении в жидкости дисков. В работе [11] исследовалась устойчивость падения диска в зависимости от числа Рейнольдса и момента инерции диска. В [12] экспериментально изучался переход от зигзагообразной плоской траектории к спиралевидной, в зависимости от числа Рейнольдса и момента инерции построена карта режимов. В работе [6] по результатам эксперимента построены функции плотности вероятности для определения места падения диска. Более сложные объекты винтовой формы рассматривались в работе [2].

3. Экспериментальное исследование падения неодносвязного тела (монета с отверстием) представлено в работе [10]. Авторами [10] на основе экспериментальных данных были построены карты режимов в зависимости от числа Рейнольдса, момента инерции и диаметра отверстия. На основе PIV-измерений показано образование вихрей на внешней и внутренней кромках тора. Отмечается, что внутренний вихрь способствует стабилизации движения за счет уменьшения циркуляции.

В данной работе изучается движение тороидальных тел в жидкости. В разделе 1 приведены уравнения движения тора в безграничном объеме жидкости, учитывающие инерционные свойства жидкости, вязкое трение и влияние циркуляционного движения жидкости через отверстие в теле. В разделе 2 описан экспериментальный стенд и натурные модели торов. В разделе 3 приведены экспериментально определенные траектории движения различных торов и изменение их ориентации в процессе движения. С помощью генетических алгоритмов вычислены значения параметров уравнений движения, обеспечивающие наилучшее согласование с экспериментом.

1. Математическая модель

1.1. Основные допущения и кинематические соотношения

Рассмотрим движение тороидального тела в жидкости.

Для описания движения введем две системы координат: неподвижную $Oxyz$ и подвижную $O_1e_1e_2e_3$, жестко связанную с телом (см. рис. 1). Положение начала подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$. Обозначим через α, β, γ единичные векторы, направленные вдоль осей неподвижной системы координат. Их проекции на подвижные оси образуют ортогональную матрицу перехода

Рис. 1. Тороидальное тело: $Oxyz$ — неподвижная система координат, $O_1e_1e_2e_3$ — подвижная система координат, R_1 — внешний радиус тора, R_2 — радиус образующей окружности тора.

от неподвижной системы координат в подвижную:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3). \quad (1.1)$$

Пара $(\mathbf{r}, Q)$ полностью определяет конфигурацию рассматриваемого тела. Эволюция конфигурационных переменных описывается следующими кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= Q^T \mathbf{v}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Относительно рассматриваемой системы примем два допущения:

- (1) *тело однородно, центр масс совпадает с геометрическим центром тела;*
- (2) *влияние свободной поверхности и твердых границ на движение тела пренебрежимо мало.*

Таким образом, на тело действуют сила тяжести, силы вязкого трения и силы, обусловленные эффектом присоединенных масс и циркуляционным движением жидкости через отверстие.

1.2. Уравнения движения

Движение произвольного тела в идеальной жидкости в отсутствие внешних сил описывается уравнениями Кирхгофа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

где T — суммарная кинетическая энергия тела и жидкости, включая кинетическую энергию циркуляционного движения жидкости через отверстие.

Кинетическая энергия тела описывается выражением

$$T_b = \frac{1}{2} m(v, v) + \frac{1}{2} (\omega, J\omega), \quad (1.4)$$

где m — масса тела, $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — центральный тензор инерции.

Кинетическая энергия жидкости, обусловленная эффектом присоединенных масс, определяется выражением

$$T_f = \frac{1}{2} (v, \Lambda_v v) + \frac{1}{2} (\omega, \Lambda_\omega \omega), \quad (1.5)$$

где $\Lambda_v = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3)$ — тензор присоединенных масс, $\Lambda_\omega = \text{diag}(\lambda_4, \lambda_4, \lambda_6)$ — тензор присоединенных моментов инерции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Диагональный вид тензоров J , Λ_v , Λ_ω обусловлен выбором системы координат, формой тела и допущением 1.

Кинетическая энергия, связанная с циркуляционным движением жидкости [3], описывается линейной по скоростям функцией вида

$$T_c = (a, v) + (b, \omega), \quad (1.6)$$

где a, b — постоянные векторы, определяемые циркуляционным движением жидкости через отверстие в теле.

С учетом выражений (1.4), (1.5), (1.6) полная кинетическая энергия системы определяется следующим образом:

$$T = T_b + T_f + T_c = \frac{1}{2} (v, Cv) + \frac{1}{2} (\omega, I\omega) + (a, v) + (b, \omega), \quad (1.7)$$

где $C = mE + \Lambda_v$, $I = J + \Lambda_\omega$.

Определим импульс и момент импульса

$$p = \frac{\partial T}{\partial v} = Cv + a, \quad M = \frac{\partial T}{\partial \omega} = I\omega + b, \quad (1.8)$$

тогда уравнения (1.3) примут вид

$$C\dot{v} = (Cv + a) \times \omega, \quad I\dot{\omega} = (I\omega + b) \times \omega + (Cv + a) \times v. \quad (1.9)$$

При наличии вязкости и силы тяжести уравнения (1.9) примут вид

$$C\dot{v} = (Cv + a) \times \omega - \mu\gamma - F, \quad I\dot{\omega} = (I\omega + b) \times \omega + (Cv + a) \times v - G, \quad (1.10)$$

$$F_i = f_i v_i |v_i|, \quad G_i = g_i \omega_i |\omega_i|,$$

где μ — вес тела в жидкости, f_i, g_i — коэффициенты сопротивления, причем $f_1 = f_2, g_1 = g_2$ в силу вращательной симметрии исследуемого тела.

Параметры a, b, f_i, g_i уравнений (1.10) не могут быть вычислены без дополнительной информации о движении жидкости. Поэтому для рассматриваемой системы мы ставим следующую задачу:

вычислить компоненты векторов a, b и коэффициенты сопротивления f_i, g_i по результатам трекинга натурной модели.

2. Описание эксперимента

2.1. Лабораторный стенд

Экспериментальные исследования проводились в бассейне размерами $2 \times 1.5 \times 1.8$ м, заполненном водой (см. рис. 2) Для отслеживания движения исследуемых объектов использовалась система подводного трекинга Contemphas, состоящая из 4 камер, калибровочного объекта, рабочей станции и специализированного программного обеспечения Templo и Vicon Motus.

На противоположных сторонах бассейна устанавливались по две камеры, нацеленные на центр емкости (см. рис. 2). Каждая камера обеспечивала съемку с частотой 50 кадров в секунду. В центре бассейна был установлен калибровочный объект (см. рис. 3), необхо-

Рис. 2. Бассейн, использованный для съемки объектов.

Рис. 3. Калибровочный объект, установленный в центре бассейна.

димый для определения системы координат. Калибровочный объект состоит из штатива и центрального куба, к которому прикрепляются штанги с маркерами. Координаты маркеров известны из документации к оборудованию. После выполнения калибровки данный объект из бассейна извлекался.

2.2. Модели торов

Для проведения экспериментов методом отливки из химически отверждаемого полиуретана (плотность 1100 кг/м^3) были изготовлены торы с радиусом образующей окружности $R_2 = 0.015 \text{ м}$ и внешними радиусами R_1 , равными $0.05, 0.06, 0.075 \text{ м}$, показанные на рисунке 4. Каждый из образцов был изготовлен в двух вариантах: с гнездами для крепления маркеров и без крепежных гнезд. Первый вариант объекта использовался для определения траектории движения, второй — для оценки влияния маркеров на процесс падения. Отметим, что визуально оба варианта объектов двигались практически одинаково.

Рис. 4. Модели торов.

С помощью маркеров были заданы направления подвижных осей, жестко связанных с телом (см. рис. 5). Оси e_1 и e_2 вычисляются по координатам маркеров, а $e_3 = e_1 \times e_2$. Из-за неизбежных погрешностей измерений оси e_1 , e_2 , e_3 , изображенные на рисунке 5, не будут взаимно ортогональными и при обработке результатов эксперимента необходимо выполнить ортогонализацию.

Рис. 5. Система координат, связанная с движущимся объектом.

С помощью непосредственного взвешивания и на основе компьютерных моделей были определены объемы, массы, центральные тензоры инерции, тензоры присоединенных масс и тензоры присоединенных моментов инерции торов, изображенных на рисунке 4.

Тор без маркеров, изображенный на рисунке 4а, обладает следующими характеристиками:

- объем $V = 1.409 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$,
- масса $m = 0.155 \text{ кг}$,
- центральный тензор инерции $\mathbf{J} = (1.119, 1.119, 2.058) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$,
- тензор присоединенных масс $\mathbf{\Lambda}_v = (0.06249, 0.06249, 0.15903) \text{ кг}$,
- тензор присоединенных моментов инерции $\mathbf{\Lambda}_\omega = (7.4113 \cdot 10^{-5}, 7.4113 \cdot 10^{-5}, 0) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Тор без маркеров, изображенный на рисунке 4б, обладает следующими характеристиками:

- объем $V = 1.907 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$,
- масса $m = 0.210 \text{ кг}$,
- центральный тензор инерции $\mathbf{J} = (2.372, 2.372, 4.503) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$,
- тензор присоединенных масс $\mathbf{\Lambda}_v = (0.0847, 0.0847, 0.2017) \text{ кг}$,
- тензор присоединенных моментов инерции $\mathbf{\Lambda}_\omega = (1.686 \cdot 10^{-4}, 1.686 \cdot 10^{-4}, 0) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Тор без маркеров, изображенный на рисунке 4с, обладает следующими характеристиками:

- объем $V = 2.567 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$,
- масса $m = 0.282 \text{ кг}$,
- центральный тензор инерции $\mathbf{J} = (5.413, 5.413, 10.506) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$,
- тензор присоединенных масс $\mathbf{\Lambda}_v = (0.1182, 0.1182, 0.2657) \text{ кг}$,
- тензор присоединенных моментов инерции $\mathbf{\Lambda}_\omega = (4.2209 \cdot 10^{-4}, 4.2209 \cdot 10^{-4}, 0) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

3. Результаты эксперимента и идентификация параметров математической модели

3.1. Методика обработки экспериментальных данных

При проведении эксперимента система обработки видеозаписей восстанавливает положения $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, каждого из 4 маркеров, установленных на торе. По координатам маркеров восстанавливаются радиус-вектор геометрического центра тора

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \quad (3.1)$$

и направления осей, связанных с телом (см. рис. 5),

$$\mathbf{e}_{1,0} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad \mathbf{e}_{2,0} = \frac{\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1|}, \quad \mathbf{e}_{3,0} = \mathbf{e}_{1,0} \times \mathbf{e}_{2,0}. \quad (3.2)$$

Здесь индекс «0» обозначает данные, полученные в эксперименте. Поскольку экспериментальные данные неизбежно содержат некоторые погрешности, то перед их анализом было выполнено сглаживание компонент векторов $\mathbf{r}_0, \mathbf{e}_{1,0}, \mathbf{e}_{2,0}, \mathbf{e}_{3,0}$ методом Савицкого–Голая [9] и последующее ортонормирование векторов $\mathbf{e}_{1,0}, \mathbf{e}_{2,0}, \mathbf{e}_{3,0}$ для каждого момента времени. Напомним, что $\mathbf{e}_{i,0} = (\alpha_{i,0}, \beta_{i,0}, \gamma_{i,0})$.

При численном интегрировании уравнений (1.2), (1.10) с начальными условиями, взятыми из эксперимента, значения динамических переменных $\mathbf{r}, \alpha, \beta, \gamma$ в каждый момент времени зависят от параметров системы, то есть

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_i) &= \mathbf{r}(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3), & \alpha(t_i) &= \alpha(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3), \\ \beta(t_i) &= \beta(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3), & \gamma(t_i) &= \gamma(t_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3).\end{aligned}$$

Определим отклонение расчетных данных от экспериментальных следующим образом:

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, f_1, f_3, g_1, g_3) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \left(k_0(\mathbf{r}_0(t_i) - \mathbf{r}(t_i))^2 + k_1(\alpha_0(t_i) - \alpha(t_i))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + k_2(\beta_0(t_i) - \beta(t_i))^2 + k_3(\gamma_0(t_i) - \gamma(t_i))^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

где k_i — масштабные коэффициенты. Для обеспечения наилучшего согласования экспериментальных и расчетных данных необходимо найти значения параметров $\mathbf{a}, \mathbf{b}, f_i$ и g_i , доставляющие минимум функционалу (3.3):

$$L \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

Для минимизации функционала (3.3) применялся генетический алгоритм с вещественным кодированием [4].

3.2. Движение тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м

Рассмотрим движение тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м (см. рис. 4а). В проведенных экспериментах (независимо от начального угла) данный объект стремился занять положение, близкое к горизонтальному. Во время движения тор совершает небольшие колебания около горизонтального положения. Положения тора в последовательные моменты времени при движении с различной начальной ориентацией изображены на рисунке 6.

Рассмотрим подробнее реализацию, показанную на рисунке 6а. В результате минимизации функционала (3.3) были получены следующие значения параметров:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (1.575 \cdot 10^{-3}, 3.026 \cdot 10^{-3}, 1.544 \cdot 10^{-2}), \\ \mathbf{b} &= (1.014 \cdot 10^{-2}, 3.639 \cdot 10^{-3}, -8.525 \cdot 10^{-4}), \\ f_1 = f_2 &= 1.624 \cdot 10^{-6}, \quad f_3 = 2.219, \quad g_1 = g_2 = 5.009 \cdot 10^{-4}, \quad g_3 = 9.135 \cdot 10^{-3}.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Экспериментальные данные и расчетные результаты приведены на рисунках 7–10.

Из рисунков 7–10 видно, что при значениях параметров (3.5) удастся добиться качественного согласования между расчетными и экспериментальными данными. При решении задачи минимизации функции (3.3) принимались следующие значения масштабных коэффициентов: $k_0 = 10, k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Значениям (3.5) соответствует $L \approx 3.69$.

Рис. 6. Падение тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м при различной начальной ориентации. Начальный угол: а) 0° , б) 45° , в) 90° .

Рис. 7. Проекция траектории движения тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м на координатные плоскости (x, z) и (y, z) .

Рис. 8. Изменение компонент вектора α во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м.

Рис. 9. Изменение компонент вектора β во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м.

Рис. 10. Изменение компонент вектора γ во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.05$ м.

3.3. Движение тора с радиусом $R_1 = 0.06$ м

Рассмотрим движение тора с радиусом $R_1 = 0.06$ м (см. рис. 4b). В проведенных экспериментах (независимо от начального угла) данный объект стремится занять положение, близкое к горизонтальному. Во время движения тор совершает небольшие колебания около горизонтального положения. Положения тора в последовательные моменты времени при движении с различной ориентацией изображены на рисунке 11.

Рис. 11. Падение тора с радиусом $R_1 = 0.06$ м при различных начальных углах. Начальный угол: а) 0° , б) 45° , в) 90° .

Рассмотрим подробнее реализацию, показанную на рисунке 11а. В результате обработки экспериментальных данных были получены следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (2.145 \cdot 10^{-3}, 3.237 \cdot 10^{-3}, -2.354 \cdot 10^{-2}), \\ \mathbf{b} &= (1.656 \cdot 10^{-3}, -6.006 \cdot 10^{-3}, 6.333 \cdot 10^{-3}), \\ f_1 = f_2 &= 5.217 \cdot 10^{-4}, \quad f_3 = 10.144, \quad g_1 = g_2 = 0.0124, \quad g_3 = 0.234. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Экспериментальные данные и расчетные результаты приведены на рисунках 12–15.

Из рисунков 12–15 видно, что при значениях параметров (3.6) удастся добиться качественного согласования между расчетными и экспериментальными данными. При решении задачи минимизации функции (3.3) принимались следующие значения масштабных коэффициентов: $k_0 = 10$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Значениям (3.6) соответствует $L \approx 13.9$.

Рис. 12. Проекция траектории движения тора с радиусом $R_1 = 0.06$ м на плоскости (x, z) и (y, z) .

3.4. Движение тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м

Рассмотрим движение тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м (см. рис. 4с). В проведенных экспериментах (независимо от начального угла) данный объект стремится занять положение, близкое к горизонтальному. Во время движения тор совершает небольшие колебания около горизонтального положения. Последовательные положения тора изображены на рисунке 16.

Рассмотрим подробнее реализацию, показанную на рисунке 16а. В результате обработки экспериментальных данных были получены следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (1.996 \cdot 10^{-3}, 4.678 \cdot 10^{-3}, 1.056 \cdot 10^{-2}), \\ \mathbf{b} &= (-7.329 \cdot 10^{-3}, -1.050 \cdot 10^{-2}, 4.420 \cdot 10^{-3}), \\ f_1 = f_2 &= 1.743 \cdot 10^1, \quad f_3 = 2.172, \quad g_1 = g_2 = 2.573 \cdot 10^{-8}, \quad g_3 = 6.052 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Экспериментальные данные и расчетные результаты приведены на рисунках 17–20.

Из рисунков 17–20 видно, что при значениях параметров (3.7) лишь частично удастся добиться качественного согласования между расчетными и экспериментальными данными. При решении задачи минимизации функции (3.3) принимались следующие значения масштабных коэффициентов: $k_0 = 10$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Значениям (3.7) соответствует $L \approx 9.66$.

Рис. 13. Изменение компонент вектора α во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.06$ м.

Рис. 14. Изменение компонент вектора β во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.06$ м.

Рис. 15. Изменение компонент вектора γ во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.06$ м.

Рис. 16. Падение тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м при различных начальных углах. Начальный угол: а) 0° , б) 45° , в) 90° .

Рис. 17. Проекция траектории движения тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м на плоскости (x, z) и (y, z) .

Рис. 18. Изменение компонент вектора α во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м.

Рис. 19. Изменение компонент вектора β во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м.

Рис. 20. Изменение компонент вектора γ во времени для тора с радиусом $R_1 = 0.075$ м.

4. Заключение

В данной работе для описания движения тороидальных тел в жидкости используется конечномерная модель, учитывающая инерционные свойства жидкости, вязкое трение и влияние циркуляционного движения жидкости через отверстие в теле. Значения параметров модели для каждого конкретного случая вычислялись на основе результатов эксперимента по трассировке тела в жидкости. Было показано, что на коротких промежутках времени данные уравнения удовлетворительно описывают динамику системы для торов с внешними радиусами $R_1 = 0.05$ и $R_1 = 0.06$ м и радиусом образующей $R_2 = 0.015$ м. Для тора с внешним радиусом $R_1 = 0.075$ и радиусом образующей $R_2 = 0.015$ м удовлетворительного согласования расчетных и экспериментальных данных добиться не удалось.

Для лучшего согласования экспериментальных и расчетных результатов необходимо принять во внимание зависимость векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от поступательной и угловой скорости движения тела (см. [1]). Данное предположение основано на том, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ учитывают влияние циркуляции, уровень которой определяется образованием и отрывом вихревых структур [10], причем процесс вихреобразования существенным образом зависит от режима движения тела. Построение данной модели является открытой проблемой. Кроме того, для определения коэффициентов сопротивления f_i и g_i следует использовать методы численного моделирования движения тела в жидкости на основе уравнений Навье–Стокса.

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову и И. С. Мамаеву за постановку задачи, С. С. Алалыкину за помощь в подготовке экспериментальных образцов и Е. М. Артемовой за помощь в подготовке фотоизображений.

References

- [1] Borisov A. V., Kuznetsov S. P., Mamaev I. S., Tenenev V. A. Describing the motion of a body with an elliptical cross section in a viscous incompressible fluid by model equations reconstructed from data processing, *Tech. Phys. Lett.*, 2016, vol. 42, no. 9, pp. 886–890; see also: *Pis'ma Zh. Tekh. Fiz.*, 2016, vol. 42, no. 17, pp. 9–19.
- [2] Vetchanin E. V., Klenov A. I. Experimental investigation of the fall of helical bodies in a fluid, *Nelin. Dinam.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 585–598 (Russian).
- [3] Lamb H. *Hydrodynamics*, 6th ed., New York: Dover, 1945.
- [4] Yakimovich B. A., Tenenyov V. A. *Genetic algorithms in system simulation*, Izhevsk: IzhGTU, 2010.
- [5] Andersen A., Pesavento U., Wang Z. J. Unsteady aerodynamics of fluttering and tumbling plates, *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 541, pp. 65–90.
- [6] Heisinger L., Newton P., Kanso E. Coins falling in water, *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 742, pp. 243–253.
- [7] Kuznetsov S. P. Plate falling in a fluid: Regular and chaotic dynamics of finite-dimensional models, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 345–382.
- [8] Pesavento U., Wang Z. J. Falling paper: Navier–Stokes solutions, model of fluid forces, and center of mass elevation, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 14, 144501, 4 pp.
- [9] Savitzky A., Golay M. J. E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.*, 1964, vol. 36, no. 8, pp. 1627–1639.
- [10] Vincent L., Shambaugh W. S., Kanso E. Holes stabilize freely falling coins, *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 801, pp. 250–259.

- [11] Willmarth W. W., Hawk N. E., Harvey R. L. Steady and unsteady motions and wakes of freely falling disks, *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, no. 2, pp. 197–208.
- [12] Zhong H., Chen S., Lee C. Experimental study of freely falling thin disks: Transition from planar zigzag to spiral, *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, no. 1, 011702, 4 pp.

Identification of parameters of the model of toroidal body motion using experimental data

Evgeny V. Vetchanin¹, Egor S. Gladkov²

^{1,2}Udmurt State University

ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

¹M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

ul. Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069, Russia

¹eugene186@mail.ru, ²gladkovyegor@gmail.com

This paper is concerned with the motion of heavy toroidal bodies in a fluid. For experimental purposes, models of solid tori with a width of 3 cm and external diameters of 10 cm, 12 cm and 15 cm have been fabricated by the method of casting chemically solidifying polyurethane (density 1100 kg/m³). Tracking of the models is performed using the underwater Motion Capture system. This system includes 4 cameras, computer and specialized software. A theoretical description of the motion is given using equations incorporating the influence of inertial forces, friction and circulating motion of a fluid through the hole. Values of the model parameters are selected by means of genetic algorithms to ensure an optimal agreement between experimental and theoretical data.

MSC 2010: 70Exx, 76-05

Keywords: fall through a fluid, torus, body with a hole, multiply connected body, finite-dimensional model, object tracking, genetic algorithms

Received December 07, 2017, accepted March 12, 2018

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 99–121 (Russian)