УДК: 514.755

MSC 2010: 37D50, 37J50

Динамика бильярда: обзорная статья с акцентом на нерешенные задачи

Е. Гуткин

Статья представляет собой обзор по вопросам динамики бильярда с акцентом на нерешенные задачи.

Ключевые слова: бильярдный поток, бильярдное отображение, периодические орбиты, эллиптическая динамика, гиперболическая динамика, параболическая динамика, гипотеза Биркгофа, замыкание фазы, безопасность

Введение

Под бильярдной динамикой в широком смысле понимается геодезический поток на римановом многообразии с границей. Но даже такое общее определение не является достаточно полным. Некоторые физические модели соответствуют финслерову бильярду [48], то есть исследуемым будет не риманово, а финслерово многообразие. Другие модели приводят к бильярду на многообразиях с сингулярностями. Исследуемое «многообразие» — это конфигурационное пространство физической системы. Часто это *многообразие с углами*. Простейшими такими пространствами будут плоские многоугольники, и существуют физические модели, которые приводят к бильярдам в треугольнике [18, 26, 31, 50].

Конфигурационное пространство знаменитого газа из круглых упругих шаров [53, 110] имеет сингулярную границу. Комбинаторно оно устроено как многогранник с большим чис-

Получено: 23 августа 2011 года

Впервые опубликовано в журнале *Regular and Chaotic Dynamics* в 2003 г.: Eugene Gutkin, Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems on billiards, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2003, 8 (1), pp. 1–13.

Перевод с английского, публикуется с дополнениями, подготовленными автором специально для русской версии статьи.

Работа была частично поддержана грантом MNiSzW N N201 384834. Часть работы была выполнена во время посещения математического факультета Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе.

Евгений Гуткин

gutkin@mat.umk.pl

Department of Mathematics

Nicolaus Copernicus University

Chopina 12/18, 87-100 Torun, Poland;

IM PAN, Sniadeckich 8, Warszawa 10, Poland

лом граней всех размерностей. Но оно намного сложнее, чем многогранник, так как его грани не плоские. Математическое исследование этой системы привело к знаменитой эргодической гипотезе Больцмана. После основополагающих работ Синая [110, 111] появился модифицированный вариант первоначальной гипотезы, известный сейчас как гипотеза Синая – Больцмана.

Однако здесь будет рассматриваться только бильярд в ограниченной плоской области с кусочно-гладкой границей. Причин три. Прежде всего, такая постановка позволяет избежать длинного введения и громоздких формальных выкладок и сразу перейти к качественным математическим вопросам. (Такого же мнения придерживался и Д. Д. Биркгоф [8].) Во-вторых, существуют нетривиальные физические модели, которые соответствуют плоским бильярдам (см. [86] и обзор [31]). Третья (и самая важная причина) состоит в том, что задача о плоском бильярде является источником захватывающих нерешенных задач. Задачи эти фундаментальны — они просты по своей постановке и касаются основных характеристик этих динамических систем.

В статье обсуждается несколько нерешенных задач динамики бильярдов. Выбор вопросов мотивируется частично личным вкусом автора, а частично простотой формулировок. Кроме того, приводятся предварительные сведения, обсуждается мотивировка задач и набрасываются возможные подходы к решению. В тех случаях, когда это возможно, приведены частичные результаты и другие вспомогательные факты. Собственно говоря, все необходимые сведения содержатся в статье, но для более глубокого понимания предмета читателю будет полезно ознакомиться с литературой. Всестороннее введение в задачу о бильярдном шаре можно найти в работе [86], а материал § 1 подробно описан в [108]. Кроме того, полезными будут глава 9 из [62], и главы 1, 13 из [52].

По очевидным причинам будем называть исследуемую плоскую область *бильярдным столом*. Его геометрическая форма определяет качественный характер движения. Исторически сложилось так, что наибольшее внимание исследователей привлекли три класса форм. Во-первых, это гладкие и строго выпуклые бильярдные столы. По нескольким причинам соответствующая бильярдная динамика называется эллиптической. Во-вторых, это кусочно-вогнутые и кусочно-гладкие бильярдные столы. Соответствующая динамика называется гиперболической. Однако существуют и выпуклые бильярдные столы, которые приводят к гиперболической динамике. Бильярдные столы третьего класса представляют собой многоугольники. Соответствующая динамика будет параболической. Перечисленные типы бильярдов описываются, соответственно, в § 1, § 2, § 3.

Я признателен многим людям (в частности, рецензентам) за комментарии, касающиеся предварительных вариантов этой обзорной работы. Н. Чернов терпеливо ответил на мои вопросы по гиперболической бильярдной динамике и предложил две задачи в § 2. А. Каток указал на свою похожую по структуре работу, в основу которой легла его лекция в Независимом Московском университете [107].

Введем обозначения и терминологию (в качестве иллюстрации см. рис. 1 и [86, (с. 3–4)]). Пусть $Y \subset \mathbb{R}^2$ — (замкнутый) бильярдный стол. Его граница ∂Y есть конечное объединение C^1 -гладких кривых. Она может состоять из нескольких связных компонент. *Бильярдный поток* в Y моделируется движением материальной точки. Далее будем называть ее «частицей» или «бильярдным шаром». В каждый момент времени состояние системы определяется положением шара, $y \in Y$, и его скоростью, единичным вектором $v \in \mathbb{R}^2$. (Достаточно рассмотреть движение с единичной скоростью.) Шар катится вдоль прямой через y в направлении v . В тот момент, когда шар достигает ∂Y , его направление движения меняется. Пусть $x \in \partial Y$ — соответствующая точка границы, и пусть v' — новое направление.

Рис. 1. Бильярдный поток.

Преобразование $v \mapsto v'$ — это *ортогональное отражение* от касательной к ∂Y в точке x . Вектор v' направлен внутрь, и шар продолжает катиться.

Эти правила определяют: 1) *фазовое пространство* Ψ бильярдного потока, как фактор-множество $Y \times S^1$, получаемое отождествлением пар $(x, v) = (x, v')$; 2) бильярдный поток $T^t: \Psi \rightarrow \Psi$. Если стол Y односвязный и граница ∂Y является C^1 -гладкой, то Ψ гомеоморфно трехмерной сфере. Это хорошо известное наблюдение, но я не знаю никаких его применений в бильярдной динамике. Так или иначе, $\dim \Psi = 3$, и читатель может считать, что Ψ — это множество пар (y, v) , таких, что вектор v направлен внутрь, если $y \in \partial Y$.

Сделаем несколько замечаний. Правила, определяющие поток T^t , опираются на предположения, что бильярдное движение свободно от трения и что граница бильярдного стола идеально упругая. Правило ортогонального отражения $v \mapsto v'$ гарантирует, что бильярдные орбиты доставляют локальный экстремум функционалу длины. (Это свойство распространяется на финслеровы бильярды [48].) Бильярдное отражение не определено в углах границы. Обычно полагают, что шар останавливается, если он попадает в угол. Таким образом, если ∂Y не является C^1 -гладкой, то некоторые орбиты бильярдов определены не для всех моментов времени. Из наших предположений следует, что их объединение в Ψ имеет нулевой объем относительно меры Лиувилля.

Пусть $X = \partial Y$, и пусть граница положительно ориентирована. Выбирая начало отсчета на каждой связной компоненте и вводя параметризацию длиной дуги, отождествим X с несвязным объединением $k = k(Y)$ окружностей. В данной работе (за исключением § 3) $k = 1$. Множество $\Phi \subset \Psi$, определяемое условием $y \in \partial Y$, — это сечение бильярдного потока. Соответствующее отображение Пуанкаре $\phi: \Phi \rightarrow \Phi$ — это *бильярдное отображение*, а Φ — его фазовое пространство. Терминология появилась благодаря Биркгофу, который популяризировал «задачу о бильярдном шаре» (см. [8] и § 1 ниже). Пусть x — параметр

длины дуги на X . Для $(x, v) \in \Phi$ пусть θ — угол между v и положительной касательной к ∂Y в точке x . Тогда $0 \leq \theta \leq \pi$, где 0 и π соответствуют прямому и обратному касательным направлениям. Введенные координаты не определены в углах ∂Y . Если ∂Y является C^1 -гладкой, то $\Phi = X \times [0, \pi]$. Далее будем использовать обозначение $\phi(x, \theta) = (x_1, \theta_1)$.

Рис. 2. Биллиардное отображение.

Пусть p, q — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^2$, и пусть $0 \leq \alpha < 2\pi$ — угловая координата на единичной окружности. Мера Лиувилля на Ψ имеет плотность $dv = dp dq d\alpha$. Она инвариантна относительно биллиардного потока. Порожденная мера μ на Φ инвариантна относительно биллиардного отображения и $d\mu = \sin \theta dx d\theta$. Она также называется мерой Лиувилля. Обе меры μ и ν конечны. Непосредственным вычислением получим

$$\nu(\Psi) = 2\pi \text{Area}(Y), \quad \mu(\Phi) = 2 \text{Length}(\partial Y). \quad (1)$$

1. Гладкие строго выпуклые биллиарды: эллиптическая динамика

Первое глубокое исследование этого биллиарда принадлежит Д. Д. Биркгофу (см. [8, т. 2]). По этой причине он часто называется *биллиардом Биркгофа*. Биллиардное отображение — это *сохраняющее площадь закручивающее отображение* [62]. *Инвариантная окружность* — это ϕ -инвариантная кривая $\Gamma \subset \Phi$, которая является нестягиваемой топологической окружностью. Напомним, что Φ — это топологическое кольцо. Обе компоненты $\partial\Phi$ — тривиальные инвариантные окружности. Интерпретируя Φ как пространство лучей, пересекающих биллиардный стол, и рассматривая Γ как кривую в этом пространстве, обозначим через $F(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$ ее *огibaющую*. С физической точки зрения, $F(\Gamma)$ — это множество фокусных точек световых лучей в Γ . Важно понимать, что $F(\Gamma)$ не является подмножеством Y для общей инвариантной кривой. Например, пусть Y — эллипс, и пусть $f, f' \in Y$ — его фокусы. Существуют такие инвариантные кривые Γ , что $F(\Gamma)$ — это конфокальная гипербола.

Пусть Γ — инвариантная окружность, и пусть $\gamma = F(\Gamma)$. Тогда $\gamma \subset \text{Int}(Y)$ [43]. Эти кривые называются *каустиками* биллиардного стола. В примере выше каустиками являются

конфокальные эллипсы. Их объединение образует область $Y \setminus [ff']$. Предположим, что Y — это не круг. Тогда инвариантные окружности заполняют область, $C(\Phi) \subset \Phi$, дополнение к которой выглядит как пара «глаз» (см. рис. 3).

Рис. 3. Фазовое пространство бильярдного отображения в эллипсе.

Определение 1. Бильярдный стол Y *интегрируем*, если объединение инвариантных окружностей в фазовом пространстве имеет непустую внутренность.

Остается еще много нерешенных вопросов, касающихся каустик. Самый известный общепринято называть «гипотезой Биркгофа», хотя он впервые появился в печати в работе Порицкого [73].

ЗАДАЧА 1. Эллипсы — это единственные интегрируемые бильярдные столы.

Диск — это вырожденный эллипс, у которого $f = f'$. Предыдущие рассуждения применимы, но теперь инвариантные окружности заполняют все фазовое пространство. М. Бялый доказал обратное: если все пространство $\Phi(Y)$ расслаивается на инвариантные окружности, то Y — является кругом [7].

Пусть Y — произвольный овал. Если граница ∂Y достаточно гладкая и ее кривизна строго положительна, то инвариантные окружности заполняют множество положительной меры в Φ . Этот факт был доказан В. Лазуткиным в предположении, что ∂Y принадлежит классу C^{333} [109]. Теперь требование гладкости снизилось до класса C^6 (см. [86]). По теореме Д. Мазера [70], положительность кривизны является необходимым условием для существования каустик.

Инвариантное нестягиваемое топологическое кольцо, $\Omega \subset \Phi$, внутренность которого не содержит инвариантных окружностей, это *область (или зона) неустойчивости Биркгофа*. Это важное понятие для сохраняющих площадь закручивающих отображений [62]. Предположим, что гипотеза Биркгофа выполняется, и пусть Y — бильярдный стол Биркгофа, но не эллипс. Тогда Φ содержит по крайней мере одну зону неустойчивости Биркгофа. Область неустойчивости имеет положительную *топологическую энтропию* [2]. Следовательно, из гипотезы Биркгофа следует, что любой бильярд Биркгофа, не являющийся

эллипсом, имеет положительную топологическую энтропию. Под (*метрической*) *энтропией* бильярда подразумевается энтропия меры Лиувилля. Единственными примерами выпуклых бильярдных столов с положительной энтропией является стадион Бунимовича и его обобщения. Эти столы не являются строго выпуклыми, и их граница не принадлежит классу C^2 . Соответствующая бильярдная динамика будет гиперболической (см. § 2). Таким образом, приходим к следующей задаче.

ЗАДАЧА 2. а) Построить строго выпуклый C^1 -гладкий бильярдный стол с положительной энтропией. б) Построить выпуклый C^2 -гладкий бильярдный стол с положительной энтропией.

С помощью простого вариационного рассуждения Биркгоф доказал существование некоторых периодических орбит бильярдных [8]. Его подход распространяется на сохраняющие площадь закручивающие отображения и приводит к такому же результату [62]. Однако использование бильярдных делает рассуждение особенно прозрачным. Периодическая орбита с периодом q соответствует вписанному в ∂Y (ориентированному) замкнутому многоугольнику с q сторонами. Углы многоугольника, образованные с ∂Y , удовлетворяют очевидному условию. Биркгоф назвал их *гармоническими многоугольниками*. И наоборот, любой гармонический q -угольник P определяет периодическую орбиту с периодом q . Пусть $1 \leq p < q$ — число оборотов, которые совершает карандаш вокруг ∂Y , если обвести им P . Отношение $0 < p/q < 1$ называется *числом вращения* периодической орбиты. Зафиксируем пару $1 \leq p < q$, где p и q — взаимно простые. Пусть $X(p, q)$ — множество всех вписанных q -угольников, которые делают p оборотов вокруг ∂Y . Пространство $X(p, q)$ является многообразием с углами. Для $P \in X(p, q)$ обозначим через $f(P)$ длину границы P . Тогда гармонические многоугольники будут критическими точками функции f . Биркгоф доказал, что f имеет по меньшей мере две разные критические точки. Одна из них доставляет максимум, а вторая является минимаксом длины. Соответствующие периодические орбиты бильярда называются *периодическими орбитами Биркгофа* с числом вращения p/q .

В качестве примера рассмотрим число вращения $1/2$. В этом случае максимальная орбита Биркгофа определяет диаметр Y . Минимаксная орбита соответствует ширине Y . Если ширина и диаметр совпадают, то ∂Y — это *кривая постоянной ширины*, и мы имеем однопараметрическое семейство периодических орбит с числом вращения $1/2$. Они заполняют «экватор» Φ . Можно привести и другие примеры овалов с однопараметрическими семействами периодических орбит, имеющих такие же длину и число вращения. Независимые подходы описаны в работах [58] и [30].

Одной из основных характеристик динамической системы является *скорость роста периодических точек*. Чтобы говорить о ней, введем понятие *считающей функции*. Классическая считающая функция $f_Y(n)$ для бильярдного отображения определяется как число периодических точек с периодом не больше, чем n . (Другие примеры см. в § 2 и § 3.) Множество периодических точек состоит из периодических орбит. Пусть $F_Y(n)$ — число периодических орбит с периодом не больше, чем n . Теорема Биркгофа дает оценку на $F_Y(n)$ снизу числом взаимно простых пар $1 \leq p < q \leq n$. Отсюда получим универсальную кубическую нижнюю оценку $f_Y(n) \geq cn^3$. (См., например, [54].)

Так как овал может иметь бесконечно много периодических точек с одним и тем же периодом, не существует универсальной верхней оценки для $f_Y(n)$. Естественным будет оценить размер множества с помощью меры. Пусть $\mathcal{P} \subset \Phi$ (соответственно, $\mathcal{P}_n \subset \Phi$) — множество периодических точек (соответственно, периодических точек с периодом n). Например, если Y — это стол постоянной ширины, то $\mathcal{P}_2 \subset \Phi$ — экватор. Несмотря на то, что

он бесконечен, $\mu(\mathcal{P}_2) = 0$. Так как $\mathcal{P} = \cup_{n=2}^{\infty} \mathcal{P}_n$ — это несвязное объединение, то следующая задача имеет две эквивалентные формулировки.

ЗАДАЧА 3. Пусть Y — произвольный бильярдный стол Биркгофа. а) Доказать, что $\mu(\mathcal{P}) = 0$. б) Доказать, что $\mu(\mathcal{P}_n) = 0$ для всех n .

Естественный аналог этого утверждения для сохраняющих площадь закручивающих отображений общего вида не выполняется! Эта задача касается только бильярдов. Задача 3б) была решена для $n < 4$. Для $n = 2$ доказательство очевидно. Если $n = 3$, получим теорему М. Рыхлика [75]. Его доказательство зависит от формального тождества, проверенного с помощью Maple. Л. Стоянов упростил доказательство и исключил компьютерную проверку [84]. Я. Воробец привел независимое доказательство [102]. Его доказательство также применимо к бильярдам большей размерности. М. Войтковский [95] получил это утверждение как приложение *уравнения зеркала* из геометрической оптики. Другие приложения можно найти в [43].

При $n \geq 4$ вопрос остается открытым. Существует много частичных доказательств, что это утверждение справедливо. Например, оно верно для столов из § 2 и § 3. Оно было доказано для бильярдных столов с кусочно вещественно-аналитической границей [76]. Кроме того, из теоремы В. Петкова и Л. Стоянова [72] следует, что для типичного бильярдного стола произвольного вида (не только для бильярда Биркгофа!) множества $\mathcal{P}_n$ конечны для всех n .

Известная *гипотеза Вейля* [92] предсказывает второй член и дает оценку ошибки для спектральной асимптотики оператора Лапласа (с граничными условиями Дирихле или Неймана) в ограниченной области. Теорема В. Иврия [106] доказывает гипотезу Вейля при условии, что объединение периодических орбит бильярдной области имеет меру нуль. Таким образом, решение задачи 3 привело бы к доказательству гипотезы Вейля для плоских областей.

2. Кусочно-вогнутые бильярдные столы: гиперболическая динамика

Обычно говорят, что бильярдный стол гиперболический, если соответствующая ему динамика гиперболическая. Исследуемой динамикой может быть бильярдный поток, бильярдное отображение или индуцированное отображение на подмножестве фазового пространства. Чтобы избежать двусмысленности, назовем бильярдный стол гиперболическим, если соответствующее бильярдное отображение, $\phi: \Phi \rightarrow \Phi$, гиперболическое. Современный подход к гиперболической динамике основан на мультипликативной эргодической теореме Оселедца и экспонентах Ляпунова. В литературе по данной тематике есть несколько введений в предмет. Более подробную информацию о гиперболической динамике в целом читатель может найти в [62] и [52], а о гиперболической бильярдной динамике можно узнать из работ [11, 63] и § 5 работы [86].

Первыми примерами гиперболических бильярдных столов были столы, образованные соединением вогнутых дуг. В качестве геометрической мотивации рассмотрим следующее построение. Возьмем выпуклый многоугольник P . Заменяем некоторые из его сторон дугами окружностей. Если их центры достаточно удалены от P , результатом будет «криволинейный многоугольник» Y , аппроксимирующий P . При правильном выборе этих дуг мы гарантируем, что его «искривленные стороны» выпуклы внутрь. Для гиперболично-

сти не принципиально, что искривленные стороны Y — это дуги окружностей; достаточно, чтобы они были гладкие и выпуклые внутрь.

Этот класс билиардных столов возник в работе Синая о газе Больцмана — Синая [110]. (Более подробно по этой теме см. приложение, написанное Сасом в [53].) В газе Больцмана круглые молекулы двигаются внутри стенок контейнера. Синай заменил стенки контейнера периодическими граничными условиями. Таким образом, круглые молекулы газа Больцмана — Синая двигаются по тору. В «реальном мире» число двигающихся молекул огромно. Синай рассматривал «математическую карикатуру» газа, всего с двумя круглыми молекулами и двумерное пространство. Путем разделения центра масс движения система сводится к геодезическому потоку на плоском торе с круглым отверстием. Представим тор квадратом 2×2 , так что отверстием будет центральный диск радиуса $1/2$. Симметрия задачи сводит ее к билиарду в единичном квадрате с удаленной четвертью диска радиуса $1/2$, с центром в вершине (см. рис. 4).

Рис. 4. Билиардный стол Синая.

Эта область известна как *билиард Синая*¹. Введем терминологию. Пусть P — (не обязательно выпуклый) n -угольник. Пусть Y — билиардный стол, полученный заменой $1 \leq m < n$ (соответственно, всех) сторон P круговыми дугами, удовлетворяющими выше-названным условиям. Тогда Y — это *полурассеивающий* (соответственно, *рассеивающий*) *многоугольник*. Круговые дуги (соответственно, отрезки) границы ∂Y являются ее *рас-*

¹К сожалению, терминология, используемая в литературе, порой может привести в замешательство. Математики часто взаимозаменяемо оперируют такими выражениями, как «билиард Синая», «стол Синая» и «рассеивающий билиард». Физики обычно под «билиардом Синая» подразумевают специальный билиардный стол, хотя и не обязательно такой, как на рисунке 4.

сеивающими (соответственно, нейтральными) компонентами. Эта терминология естественным образом распространяется на столы, рассеивающие компоненты границы которых не обязательно круговые, но произвольные гладкие кривые, выпуклые внутрь. Это полурассеивающие бильiardные столы. В отсутствие нейтральных компонент говорят о рассеивающих бильiardных столах. Например, стол на рисунке 4 имеет одну рассеивающую и четыре нейтральные компоненты границы.

В [111] Синай доказал гиперболичность рассеивающих бильiardных столов. После того, как Л. Бунимович открыл, что стадион и подобные ему бильiardные столы являются гиперболическими [99], начался поиск геометрических критериев гиперболичности. Очень полезным здесь оказывается понятие *инвариантного поля конусов* [60, 93].

Ограничим наше обсуждение бильiardными отображениями. Обозначим через V_z касательную плоскость к фазовому пространству в точке $z \in \Phi$. Дифференциал ϕ_* — это линейное отображение из V_z в $V_{\phi(z)}$.

Определение 2. Семейство $\mathcal{C} = \{C_z \subset V_z : z \in \Phi\}$ — это инвариантное поле конусов, если выполнены следующие условия:

1. замкнутый конус C_z определен почти для всех $z \in \Phi$, и «функция» $z \mapsto C_z$ измерима;
2. конус C_z нетривиальный и имеет непустую внутренность;
3. $\phi_*(C_z) \subset C_{\phi(z)}$;
4. существует $n = n(z)$, такое, что $\phi_*^n(C_z) \subset \text{int}(C_{\phi^n(z)})$.

Существование инвариантного поля конусов эквивалентно гиперболичности бильiardа [93]. Используя геометрический подход, Войтковский построил инвариантные поля конусов для нескольких классов бильiardных столов [95]. Помимо «старых» классов гиперболических столов (т. е. рассеивающих столов и обобщенных стадионов), он нашел инвариантные поля конусов для широкого класса локально строго выпуклых столов. Подход Войтковского был дальше расширен Бунимовичем, Доннеем и Маркарианом (см. § 5 в [86]). В работе [47] эти идеи используются при построении гиперболических бильiardов на поверхностях произвольной постоянной кривизны.

ЗАДАЧА 4. i) Будет ли произвольный полурассеивающий бильiardный стол гиперболическим? ii) Всякий ли полурассеивающий многоугольник является гиперболическим?

При $m = n - 1$ полурассеивающий многоугольник Y имеет только одну нейтральную компоненту. Пусть Y' — отражение Y относительно этой стороны и $Z = Y \cup Y'$. Так как Z — это рассеивающий бильiardный стол, он гиперболический. Благодаря осевой симметрии Z , бильiardные отображения в Y и Z по существу эквивалентны. Следовательно, стол Y гиперболический. В частных случаях трюк с отражением позволяет доказать гиперболичность полурассеивающих многоугольников при $m < n - 1$. Например, пусть P — треугольник с углом π/n . Пусть Y — полурассеивающий треугольник, рассеивающая компонента которого расположена на стороне P , противоположной к углу π/n . Отражая Y последовательно $2n$ раз, очевидным образом получим рассеивающий бильiardный стол Z . Таким образом, Z является гиперболическим. Так как Y и Z связаны $2n$ -кратной симметрией, стол Y также будет гиперболическим. Подходящее обобщение трюка с отражением сработает, если P — *рациональный многоугольник* (см. § 3 ниже). Критический частный случай $m = 1$ задачи 4 эквивалентен задаче 9 из § 3.

Рассеивающие билиардные столы являются эргодическими [101]. Можно привести примеры неэргодических гиперболических столов [95], однако считается, что типичный гиперболический билиард является эргодическим. Например, стадион и подобные ему билиардные столы эргодические [85]. Не существует примеров строго выпуклых гиперболических билиардных столов (см. задачу 2).

Чтобы упростить изложение, ограничимся в последующем обсуждении рассеивающими билиардными столами. Билиардная динамика на этих столах имеет сильные хаотические свойства [15, 53, 100, 101]. Вопрос об *убывании корреляций* ставит несколько нерешенных задач [14, 97], но здесь они рассматриваться не будут. Обсудим статистику периодических орбит в гиперболических билиардах. Множество периодических точек любого периода конечно, и естественная считающая функция корректно определена. Пусть $f_Y(n)$ — число периодических орбит, период которых меньше или равен n . Асимптотика $f_Y(n)$ — это важная динамическая характеристика.

По теореме Стоянова [83], $f_Y(n) \leq e^{h_+ n}$ для некоторого положительного числа h_+ при $n \rightarrow \infty$. Теорема Чернова [100] дает экспоненциальную нижнюю оценку: $e^{h_- n} \leq f_Y(n)$. Комбинируя обе оценки, получим

$$0 < h_- \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f_Y(n)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f_Y(n)}{n} \leq h_+ < \infty. \quad (2.1)$$

Следующие две задачи были предложены Н. Черновым.²

ЗАДАЧА 5. Существует ли следующий предел?

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f_Y(n)}{n} \quad (2.2)$$

Согласно уравнению (2.1), если этот предел существует, то $0 < h < \infty$.

ЗАДАЧА 6. Если предел в уравнении (2.2) действительно существует, является ли h *топологической энтропией* билиардного отображения?

Естественные аналоги этих задач открыты для всех гиперболических билиардных столов. Более того, задачи 5 и 6 вписываются в общую взаимосвязь между распределением периодических точек и топологической энтропией [61]. Однако сингулярности, которые составляют главную черту билиардной динамики, препятствуют применению гладкой эргодической теории. Необходимо создание других подходов [39, 112].

3. Билиарды в многоугольниках: параболическая динамика

Многоугольник P , который служит билиардным столом, не обязательно должен быть выпуклым или односвязным, т. е. простым. Он может также иметь внутренние *стенки*, т. е. препятствия без внутренности, или барьеры. Многоугольник называется *рациональным*, если углы между его сторонами имеют вид $\pi t/n$. Пусть $N = N(P)$ — наименьший общий знаменатель этих рациональных чисел. Классическое построение связывает с P замкнутую поверхность $S = S(P)$, покрытую $2N$ копиями P . Поверхность S имеет конечное число конических точек. Полный конический угол каждой из них кратен 2π . Предположим, что

²Личное сообщение.

многоугольник P простой, и пусть $m_i\pi/n_i$, $1 \leq i \leq p$, — углы его вершин. Тогда род поверхности $S(P)$ удовлетворяет соотношению [29]

$$g(S(P)) = 1 + \frac{N}{2} \sum_{i=1}^p \frac{m_i - 1}{n_i}. \quad (3.1)$$

Из уравнения (3.1) следует, что $S(P)$ является тором тогда и только тогда, когда многоугольник P замощает плоскость отражениями. Бильярд в P по существу эквивалентен геодезическому потоку на $S(P)$. Это наблюдение было впервые использовано А. Катоком и А. Земляковым [105], поэтому $S(P)$ часто называется *поверхностью Катока – Землякова*. Однако построение поверхности $S(P)$ можно найти в литературе начиная (по меньшей мере) с начала XX столетия [24, 82]. Обзорный материал по этой теме содержится в работах [29, 31, 69, 80] и главе 3 из [86].

Поверхности $S(P)$ — это частные случаи плоских поверхностей с коническими особенностями и тривиальной линейной голономией (translation surfaces). Для простоты терминологии будем называть их плоскими поверхностями. Эти поверхности представляют самостоятельный интерес [42]. С точки зрения классического анализа, это замкнутые римановы поверхности с голоморфными линейными дифференциалами. Замена линейных дифференциалов на квадратичные приводит к более широкому классу плоских поверхностей (half-translation surfaces). Здесь они рассматриваться не будут. Связь между бильярдом в многоугольниках и классическим комплексным анализом оказывается очень полезной [65–67, 90].

Геодезический поток любой плоской поверхности S разлагается на однопараметрическое семейство *направленных потоков* b_θ^t , $0 \leq \theta < 2\pi$. Поток b_θ^t отождествляется с линейным потоком на S в направлении θ . Мера Лебега на S сохраняется потоком b_θ^t . Следовательно, бильярдный поток в рациональном многоугольнике не является эргодическим. Он разлагается на однопараметрическое семейство *направленных бильярдных потоков*. Пусть S — произвольная плоская поверхность. Теорема Керкхофа, Мазура и Смайли [65] утверждает, что потоки b_θ^t строго эргодичны для почти всех θ по отношению к мере Лебега. Следовательно, направленный бильярдный поток рационального многоугольника является эргодическим почти для всех направлений. Множество $\mathcal{N}(S) \subset [0, 2\pi)$ неэргодических направлений имеет положительную размерность Хаусдорфа [68] для типичной плоской поверхности, и оно хорошо изучено для специальных рациональных многоугольников [17, 28, 90]. Типичная плоская поверхность не соответствует многоугольнику, что говорит об ограниченности этой взаимосвязи.

О бильярде в иррациональных (т. е. произвольных) многоугольниках известно меньше. Обозначим через $\mathcal{T}(n)$ параметрическое пространство евклидовых n -угольников (с точностью до масштаба). Заметим, что бильярд сохраняется при изменении масштаба. Пространство $\mathcal{T}(n)$ — это конечное объединение компонент, соответствующих некоторым комбинаторным данным. Каждая компонента гомеоморфна относительно компактному множеству максимальной размерности в евклидовом пространстве. Пусть λ — вероятностная мера на $\mathcal{T}(n)$, компоненты которой являются соответствующими мерами Лебега. Например, пространство $\mathcal{T}(3)$ треугольников — это подмножество $\mathbb{R}^2$, заданное в виде $\mathcal{T}(3) = \{(\alpha, \beta): 0 < \alpha \leq \beta < \pi/2\}$. Таким образом, пространство $\mathcal{T}(3)$ само является треугольником. Из [65] следует, что множество $\mathcal{E}(n) \subset \mathcal{T}(n)$ эргодических n -угольников — это остаточное множество (дополнительное к множеству первой категории) в смысле категории Бэра [71].

ЗАДАЧА 7. Верно ли, что $\lambda(\mathcal{E}(n)) > 0$?

Случай $n = 3$ особенно интересен, так как механическая система трех упругих частиц на окружности (см. рис. 5) сводится к бильярду в остроугольном треугольнике. Этот факт был отмечен независимо друг от друга авторами работ [26] и [13]. Более подробный отчет можно найти в [69]. Пусть m_1, m_2, m_3 — массы частиц. Тогда углы треугольника $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha_i = m_i \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Заметим, что в этом соответствии между механикой и бильярдом π -рациональность углов не имеет очевидного физического смысла. В пределе, при $m_3 \rightarrow \infty$, получим физическую систему двух упругих частиц на интервале. Предел треугольников $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ — это прямоугольный треугольник, углы которого удовлетворяют соотношениям $\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{m_1/m_2}$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \sqrt{m_2/m_1}$.

Рис. 5. Три идеально упругих частицы на окружности.

Если иррациональный многоугольник P допускает сверхэкспоненциально быструю аппроксимацию рациональными многоугольниками, то многоугольник P эргодический [103]. Этот результат позволяет получить примеры эргодических многоугольников, но он не имеет прямой связи с вышеописанной задачей. Численные свидетельства подтверждают, что иррациональные многоугольники являются эргодическими и имеют другие стохастические свойства [3, 13]. Теоремы, подтверждающей или опровергающей это наблюдение, нет.

ЗАДАЧА 8. Привести пример иррационального неэргодического многоугольника.

Пусть P — произвольный n -угольник, и пусть $a_1, \dots, a_n$ — его стороны. Для $1 \leq i \leq n$ пусть $\Phi_i \subset \Phi$ — множество элементов в фазовом пространстве бильярдного отображения, опорные точки которых лежат на стороне a_i . Тогда $\Phi = \cup_{i=1}^n \Phi_i$ — дизъюнктная декомпозиция (disjoint decomposition). Согласно уравнению (1), $\mu(\Phi_i) = 2 \operatorname{Length}(a_i)$. Следующий

вопрос касается структуры инвариантных множеств в фазовом пространстве неэргодического многоугольника. (Ср. с задачей 4 в § 2.) Сформулируем его в качестве гипотезы. Из [65] вытекает, что гипотеза справедлива для рациональных многоугольников.

ЗАДАЧА/ГИПОТЕЗА 9. Пусть P — произвольный n -угольник, и пусть $M \subset \Phi$ — измеримое инвариантное подмножество. Если $\Phi_i \subset M$ для некоторого $1 \leq i \leq n$, то $M = \Phi$.

Периодические орбиты бильярдов в многоугольниках — это тема, которая требует сведений только из элементарной геометрии и имеет непосредственные приложения к физике. Например, пусть $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ — остроугольный треугольник, соответствующий системе трех упругих масс (уравнение (3.2)). Периодические бильiardные орбиты в треугольнике $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ соответствуют периодическим движениям масс.³ К удивлению исследователей, вопросы о периодических орбитах в многоугольниках оказались особенно трудными.

ЗАДАЧА 10. Всякий ли многоугольник имеет периодическую орбиту?

Всякий рациональный многоугольник имеет периодические орбиты (см. ниже). Некоторые специальные классы иррациональных многоугольников имеют периодические орбиты [18, 50]. Любой остроугольный треугольник имеет классическую периодическую орбиту — орбиту Фаньяно [32]. Она соответствует вписанному треугольнику минимального периметра. Неизвестно, любой ли остроугольный треугольник имеет другие периодические орбиты, или любой ли тупоугольный треугольник имеет периодическую орбиту [51, 104].

Периодическая орбита с четным числом отрезков содержится в *параллельной полосе* периодических орбит той же самой длины. Граница полосы — это объединение сингулярных орбит или *обобщенных диагоналей* [59]. Это бильiardные орбиты, конечные точки которых находятся в вершинах многоугольника. Периодические орбиты с нечетным числом отрезков (например, орбита Фаньяно) изолированы. По-видимому, такие орбиты редки; рациональный многоугольник имеет не больше чем конечное число таких орбит. Обозначим через $f_P(\ell)$ число периодических полос длины, не превышающей ℓ . Это считающая функция периодических орбит в многоугольниках. Она возрастает субэкспоненциально [39, 59].

ЗАДАЧА 11. Найти нетривиальную (верхнюю и нижнюю) оценки для f_P для иррациональных многоугольников.

Далее будем рассматривать только рациональные многоугольники. Ввиду результатов Мазура [66, 67] и Бошерниана [9, 10], существуют такие $0 < c_*(P) \leq c^*(P) < \infty$, что $c_*(P)\ell^2 \leq f_P(\ell) \leq c^*(P)\ell^2$ для достаточно большого ℓ . Это так называемые квадратичные оценки. В качестве $c_*(P)$ и $c^*(P)$ можно взять нижние и верхние пределы $f_P(\ell)/\ell^2$, соответственно.

ЗАДАЧА 12. Найти эффективные оценки для $c_*(P)$ и $c^*(P)$.

Во всех до сих пор вычисленных примерах $f_P(\ell)/\ell^2$ имеет предел, т. е. $c_*(P) = c^*(P) = c(P)$. В этом случае будем говорить, что *многоугольник имеет квадратичную асимптотику*. Предшествующие определения и вопросы имеют очевидные аналоги для плоских поверхностей, где периодические орбиты бильiardов заменяются замкнутыми геодезическими. Существует частный класс многоугольников и поверхностей, которые удовлетворяют

³Другая связь между бильiardами и физикой обнаруживается при изучении механических связей. Более подробную информацию об этих «базовых механизмах» см. в [81].

так называемому свойству решетки (lattice condition). Для простоты терминологии мы будем называть их *решеточными многоугольниками и плоскими поверхностями* [41, 42, 91]. Они имеют квадратичную асимптотику и для их *квадратичной постоянной* получены общие формулы [28, 89, 91] и [42]. Кроме того, квадратичные постоянные для многих решеточных многоугольников известны в явном виде [89, 91]. Эти формулы содержат довольно сложную арифметику. (Нормированная) квадратичная постоянная любого решеточного многоугольника — это алгебраическое число [42].

Решеточные многоугольники встречаются редко. Все остроугольные решеточные треугольники уже определены [64, 74]. Для тупоугольных треугольников вопрос открыт. С другой стороны, известно, что типичная (относительно меры Лебега) плоская поверхность имеет квадратичную асимптотику. Пусть S — типичная плоская поверхность. Тогда величина ее квадратичной постоянной зависит только от связной компоненты страта пространства Тейхмюллера, к которому относится S [19]. Типичные квадратичные постоянные были вычислены [21, 22]. Эти результаты ничего не дают для многоугольников, так как соответствующее подмножество пространства модулей имеет меру нуль. Однако расширение той же методики доказывает квадратичную асимптотику для очень частного, но нетривиального класса рациональных многоугольников [20].

ЗАДАЧА 13. Всякий ли рациональный многоугольник имеет квадратичную асимптотику?

4. Дополнения для русского перевода

На июнь 2011 года все задачи, включенные в первоначальный вариант этого обзора [33], остаются открытыми. Однако за это время появилось несколько работ, содержащих дополнительный важный материал. Главная цель данного параграфа — обсудить этот материал. В то же время здесь появилась возможность добавить несколько замечаний, которые по той или иной причине не были включены в обзор [33]. Естественно, обновилась и библиография.

Обсуждения задачи о бильярдном шаре содержатся в нескольких недавно вышедших книгах [6, 16, 27, 88]. Книга [16] представляет собой исчерпывающий трактат по гиперболической бильярдной динамике (см. § 2). В монографии [6] подробно описываются несколько связей между задачей о бильярдном шаре и геометрией. Материал в книгах [6] и [88] касается всех трех типов бильярдных столов, описанных выше. Однако эти книги разные по существу. Некоторые из различий в [6] и [88] обусловлены структурой этих книг и ожидаемой читательской аудиторией. Работа [6] — это всесторонняя монография по геометрии, где задача о бильярдном шаре — лишь один из множества иллюстративных примеров и приложений, тогда как книга [88], предназначенная, главным образом, для американских студентов, описывает несколько вопросов, касающихся геометрических аспектов бильярда. Книга [27] содержит несколько приложений выпуклой геометрии к задаче о бильярдном шаре (см. материал в § 1).

4.1. Комментарии к гипотезе Биркгофа и связанному с ней материалу

Гипотеза интегрируемости Биркгофа традиционно формулируется в терминах бильярдного отображения (см. определение 1 и задачу 1). Бильярдный поток на гладком выпуклом столе — это гамильтонова система с двумя степенями свободы. Гамильтонова версия задачи 1 имеет следующий вид:

ЗАДАЧА 1а. Пусть Y — гладкий выпуклый бильярдный стол. Если бильярдный поток на Y — это интегрируемая гамильтонова система, то Y является эллипсом.

Хотя задачи 1 и 1а очевидно связаны, разрешение одной из них не имеет прямого отношения к решению другой. Результаты С. Болотина [98] свидетельствуют в пользу положительного решения задачи 1а.

Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая выпуклая кривая. Обозначим через $|\gamma|$ ее периметр. Конструкция *шагата* ставит в соответствие любому $\ell > |\gamma|$ замкнутую выпуклую кривую $G(\gamma, \ell)$, содержащую внутри себя γ . Кривую $G(\gamma, \ell)$ можно получить как результат следующего «физического процесса». Возьмем кольцо длины ℓ , изготовленное из мягкого, но нерастяжимого материала, и обернем вокруг γ . Потянем кольцо с помощью карандаша и, крепко прижимая его, будем вращать карандаш вокруг γ . Движущийся карандаш опишет кривую $G(\gamma, \ell)$. Садовники могут использовать этот прием для создания изгороди вокруг своих клумб, поэтому такая процедура иногда называется *построением садовника* [6].

Пусть $Y = Y(\gamma, \ell) \subset \mathbb{R}^2$ — бильярдный стол, граница которого $G(\gamma, \ell)$. Тогда γ — это каустика для бильярда на Y [43, 88, 109]. Если γ_1 — это эллипс и $\ell_1 > |\gamma_1|$, то $\gamma_2 = G(\gamma_1, \ell_1)$ — это конфокальный эллипс. Пусть теперь $\ell_2 > |\gamma_2|$. Тогда $\gamma_3 = G(\gamma_2, \ell_2)$ — конфокальный эллипс, содержащий γ_1 . Существует единственное значение ℓ_3 , такое, что $\gamma_3 = G(\gamma_1, \ell_3)$. Это свойство построения садовника есть следствие интегрируемости бильярда на эллипсах. Верно ли обратное утверждение?

ЗАДАЧА 1б. Эллипсы — это единственные замкнутые выпуклые кривые, удовлетворяющие вышеуказанной транзитивности.

Этот чисто геометрический вариант гипотезы Биркгофа появился благодаря Р. Мелроузу. Решение Задачи 1б стало предметом кандидатской диссертации его студента Э. Амирана [1]. Однако работа [1] содержит серьезный пробел и вопрос остается открытым.

Пусть теперь γ — произвольная замкнутая выпуклая кривая. Для $\ell > |\gamma|$ пусть $Y(\ell) = Y(\gamma, \ell)$ — соответствующее семейство выпуклых бильярдных столов и пусть $0 < \rho_\gamma(\ell) < 1/2$ — число вращения каустики $\gamma \subset Y(\ell)$. Функция вращения $\rho(\ell) = \rho_\gamma(\ell)$ непрерывна. Когда ℓ изменяется от $|\gamma|$ до бесконечности, $\rho(\ell)$ монотонно растет, но, в общем случае, не строго. Пусть $r \in (0, \infty)$ такое, что $\rho^{-1}(r) = [a(r), b(r)]$ — интервал. Тогда i) число r рациональное, ii) для $\ell \in [a(r), b(r)]$ ограничение бильярдного отображения $Y(\ell)$ на каустики γ не является вращением. Обратное утверждение также выполняется; эти интервалы называются интервалами *замыкания фазы* (phase locking). Явление «замыкание фазы» характерно для однопараметрических деформаций в эллиптической динамике. В работе [44] исследуются интервалы замыкания фазы, когда γ — треугольник. Много вопросов, касающихся связи между выпуклой кривой γ и функцией вращения $\rho_\gamma(\cdot)$, остаются открытыми [44].

Пусть теперь γ — произвольный выпуклый многоугольник. Кривые $G(\gamma, \ell)$ — это конкатенации дуг эллипсов с фокусами в углах γ . Они будут C^1 -гладкими и лишь кусочно C^2 -гладкими. Как упоминалось выше, γ — это каустика для бильярда на $Y(\gamma, \ell)$ для любого $\ell > |\gamma|$. А. Хубахер доказала, что стол $Y(\gamma, \ell)$ содержит окрестность $\Omega(\ell)$ своей границы, такую, что любая каустика в $Y(\gamma, \ell)$ принадлежит дополнению $\Omega(\ell)$ [57]. Теорема Хубахер аналогична результату в [43], согласно которому бильярдные каустики отделены от границы стола, если она содержит точки очень малой кривизны. В теореме Хубахер такие точки заменяются на точки скачков кривизны. В отличие от [43], работа [57] не дает оценок для размера $\Omega(\ell)$. Было бы интересно исследовать этот вопрос. Наиболее правдоподобным представляется, что $\Omega(\ell)$ — это область в $Y(\gamma, \ell)$ между границей стола и самой каустикой γ .

4.2. Комментарии по другим материалам § 1

Задача 3, а также связанные с ней вопросы остаются активным предметом исследований. Работа [5] развивает функционально теоретический подход к изучению бильiardных каустик. Как следствие этого метода, в [5] получено новое доказательство соотношения $\mu(\mathcal{P}_3) = 0$. В препринте [36] было анонсировано решение задачи 3. К сожалению, работа [36] содержит ошибку; таким образом, задача 3 остается нерешенной. Работа [49] содержит пример гладкого (не строго) выпуклого бильiardного стола на круглой сфере с открытым множеством периодических орбит. Существование таких бильiardных столов подчеркивает тонкость задачи 3.

Нетривиальные свойства бильiardа можно грубо поделить на три категории: i) свойства, которые выполняются для всех столов; ii) свойства, которые выполняются для типичного стола; iii) свойства, которые выполняются для специального класса бильiardных столов. Исследования столов из категории iii) можно описать следующим образом: пусть P — свойство, которому удовлетворяет некоторый специальный бильiardный стол, например, круглый диск. Существуют ли некруглые столы, которые имеют свойство P ? Если ответ «да», задача состоит в описании класса бильiardных столов, имеющих свойство P .

Рассмотрим пример. Пусть $0 < \alpha \leq \pi/2$ — угол. Пусть Y — бильiardный стол Биркгофа. Будем говорить, что стол Y имеет свойство P_α , если любая хорда в Y , которая образует угол α с ∂Y в одном конце, также образует угол α с ∂Y на другом конце. Круглый стол имеет свойство P_α для любого α . Бильiardные столы с свойством P_α имеют специфическую каустическую кривую Γ_α ; будем называть их *каустиками с постоянным углом*. Столы с каустиками $\Gamma_{\pi/2}$ хорошо известны геометрам: их границы представляют собой *кривые постоянной ширины* [6, 27]. Кривая ∂Y имеет постоянную ширину тогда и только тогда, когда ее кривизна периодическая с периодом π . В частности, существует бесконечно много некруглых бесконечно гладких бильiardных столов этого класса.

Пусть $\mathcal{P}_\alpha$ (при $0 < \alpha < \pi/2$) — класс некруглых столов с свойством P_α . Класс $\mathcal{P}_\alpha$ был исследован автором около 20 лет назад, а результаты были опубликованы в сборнике докладов на конференции по динамике и смежным вопросам в 1993 году в Пенсильванском университете [30]. Главные результаты следующие. i) Класс $\mathcal{P}_\alpha$ непустой тогда и только тогда, когда α удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg}(n\alpha) = n \operatorname{tg} \alpha \quad (4.1)$$

для некоторого $n > 1$. Пусть $A_n \subset (0, \pi/2)$ — множество решений уравнения (4.1). Множество A_n всегда конечное; оно непустое для $n \geq 4$. ii) Для любого $\alpha \in A_n$ существует вещественное аналитическое семейство бесконечно гладких столов $Y_\alpha(s) \in \mathcal{P}_\alpha$: $0 < s < 1$. Когда $s \rightarrow 0$, выпуклые столы $Y_\alpha(s)$ сходятся к единичному диску. Предел $Y_\alpha(s)$ при $s \rightarrow 1$ также существует, но имеет особенность.

Оказывается, что плоские области, удовлетворяющие свойству P_α для некоторого угла α , представляют интерес в механике жидкостей. Если $Y \in \mathcal{P}_\alpha$, то плавающий бесконечный цилиндр $C = Y \times \mathbb{R}$ находится в нейтральном положении равновесия при любой ориентации с контактным углом $\pi - \alpha$ [23]. В работе [38] содержится детальное изложение результатов из [30], предназначенное для математиков, исследующих механику жидкостей.

4.3. Комментарии по материалу § 3

Хотя задача 3 по-прежнему не решена, последние публикации [56, 77, 78] дают существенные основания полагать, что любой многоугольник действительно имеет периодиче-

скую орбиту. В этих работах исследуются периодические орбиты бильярдов в тупоугольных треугольниках. Пусть Δ — тупоугольный треугольник с острыми углами α, β и тупым углом $\gamma > \pi/2$. В [77, 78] Р.Шварц доказывает, что если γ меньше, чем 100 градусов, то Δ имеет периодическую орбиту. В работе [56] Хупер и Шварц доказывают, что если α, β достаточно близки, то Δ имеет периодическую орбиту. Если $\alpha = \beta$, то Δ — равнобедренный треугольник. Хорошо известно, что равнобедренные треугольники имеют периодические орбиты. Теорема Хупера и Шварца утверждает, что любой треугольник, который достаточно близок к равнобедренному, имеет периодическую орбиту. Заметим, что в теореме Хупера–Шварца α и β могут быть произвольно малыми, а следовательно, угол γ может быть произвольно большим.

Пусть a, b, c — стороны Δ . Работы [56, 77, 78] основаны на подходе работы [104]; в этой работе периодические орбиты кодируются словами, составленными из алфавита a, b, c , и исследуются связи между орбитами и соответствующими словами. Орбита бильярда называется *устойчивой*, если она сохраняется при всех достаточно малых деформациях Δ . Оказывается, что устойчивость орбиты эквивалентна комбинаторному свойству соответствующего слова [104]. Для краткости будем говорить, что слова, составленные из алфавита a, b, c и удовлетворяющие этому свойству, являются *устойчивыми*. Пусть $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ — пространство треугольников. Чтобы немного упростить условия, можем предположить, что $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Подмножества тупоугольных (соответственно, равнобедренных) треугольников определяются неравенством $x + y < 1$ (соответственно, равенством $x = y$). Пусть W_k — множество устойчивых слов из алфавита a, b, c длины k , и пусть $W = \cup_k W_k$. Для $w \in W$ пусть $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}$ — открытое множество треугольников, имеющих периодическую орбиту с кодом w . Хупер и Шварц назвали эти множества *плитками* (*tiles*).

Подход Хупера и Шварца состоит в том, чтобы найти такое подходящее подмножество $W_{\text{suff}} \subset W$, чтобы плитки $\mathcal{T}_w, w \in W_{\text{suff}}$ покрывали желаемую часть $\mathcal{T}$. Без сомнения, эту идею нельзя реализовать, не обращаясь к помощи мощного компьютера. Компьютерная программа «McBilliards» Хупера и Шварца выполняет эту работу. Помимо достаточных свидетельств в пользу гипотезы, утверждающей, что всякий многоугольник имеет периодические бильярдные орбиты, в работах [56, 77, 78] устанавливается несколько фактов, которые показывают, насколько нетривиальной является задача о периодических орбитах.

К сожалению, в обзоре [33] не затрагивается вопрос *сложности орбит бильярдов* в многоугольниках, хотя он очень близок к задаче 11. Кратко обсудим его ниже. Пусть P — многоугольник, и пусть $a, b, c, \dots$ — его стороны. Проследим за конечной орбитой бильярда γ и запишем стороны, с которыми бильярд сталкивается. Получим слово $w(\gamma)$ из алфавита $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots\}$. Будем говорить, что $w(\gamma)$ — это *код* γ ; число букв в $w(\gamma)$ называется *комбинаторной длиной* γ . Пусть $W_n(P)$ — множество кодов всех орбит бильярдов с комбинаторной длиной n . Функция $F(n) = \sum_{k \leq n} |W_k(P)|$ определяет *полную сложность* бильярда на P . Накладывая различные ограничения на орбиты бильярдов, которые кодируются, получим условные, или *частичные, сложности* $F_*(n)$. Например, функция $f_P(n)$ в задаче 11 дает периодическую сложность для бильярда на P . Таким образом, задача 11 — это частный случай следующих открытых вопросов.

Задача 14. Найти нетривиальные верхнюю и нижнюю оценки сложности бильярдов для *общих многоугольников*.

Выражение «общий многоугольник» в задаче 14 можно заменить на *иррациональный многоугольник*, так как для рациональных многоугольников полная сложность имеет верхнюю и нижнюю кубические оценки. Этот факт является следствием результатов Мазура,

касающихся асимптотики седловых соединений на поверхностях переноса. Согласно [39, 59], полная сложность бильярда в любом многоугольнике субэкспоненциальна. Это означает, что для достаточно большого n неравенство $F(n) < e^{an}$ выполняется для любого $a > 0$; однако это не дает конкретной оценки для $F(n)$.

Постановка задачи 14 нуждается в дополнительной интерпретации. Чтобы сделать ее более конкретной, сформулируем ниже широко принятую гипотезу.

Гипотеза 1. *Существует $d \geq 3$, такое, что полная сложность бильярда для любого многоугольника имеет кубическую нижнюю оценку и верхнюю оценку степени d .*

В настоящее время гипотеза 1 доказана только для рациональных многоугольников с $d = 3$. Кратко обсудим последние результаты для частичных сложностей, которые подтверждают гипотезу [45, 49]. Пусть P — произвольный многоугольник. Пусть $0 \leq \theta < 2\pi$ — направление, а $z \in P$ — произвольная точка. Кодирова те орбиты бильярдов, которые начинаются в направлении θ (соответственно, из точки z), и подсчитывая число слов с длиной меньшей или равной n , получим *сложность направления* $F_\theta(n)$ (соответственно *сложность положения* $F_z(n)$) для бильярда на P . Известно, что сложность направления растет полиномиально, т.е. существует $d > 0$, зависящее только от P , такое, что $F_\theta(n) = O(n^d)$ для всех направлений θ [50]. Теорема в [45] говорит, что для любого P и любого $\varepsilon > 0$ почти для всех направлений θ имеет место оценка $F_\theta(n) = O(n^{1+\varepsilon})$. Другая теорема в [45] утверждает, что для любого P и любого $\varepsilon > 0$ почти для всех точек $z \in P$ справедлива оценка $F_z(n) = O(n^{2+\varepsilon})$. Доказательства основаны на изучении связей между средней сложностью и индивидуальными сложностями. Работа [49] развивает новый подход к сложности бильярда, рассматривая бильярдное отображение как *кусочно-выпуклый многоугольный обмен* (piecewise convex polygon exchange). Этот подход работает для бильярдов в многоугольниках с любой постоянной кривизной.

4.4. Безопасность для бильярдных столов и связанные с ней вопросы

Данная тематика возникла после опубликования обзора [33]. Она касается геометрии орбит бильярдов и, таким образом, непосредственно связана с бильярдной динамикой. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольный бильярдный стол. Для любой пары $x, y \in \Omega$ (в частности, для пары x, x) пусть $\Gamma(x, y)$ — множество бильярдных орбит в Ω , которые соединяют x и y . Будем говорить, что *пара x, y безопасная*, если существует конечное множество $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \Omega \setminus \{x, y\}$, такое, что каждая орбита $\gamma \in \Gamma(x, y)$ проходит через некоторую точку z_i . Будем говорить, что точки $z_1, \dots, z_n$ — *блокирующие* для x, y . Стол Ω называется безопасным, если любая пара x, y безопасна. Таким образом, показать, что Ω *небезопасный*, — означает найти пару x, y , которая не может быть заблокирована с помощью конечного множества блокирующих точек. Возникает несколько общих вопросов. i) Какие столы Ω безопасны? ii) Если Ω небезопасный, то насколько он небезопасный? Например, верно ли, что любая пара $x, y \in \Omega$ небезопасна; что почти все пары $x, y \in \Omega$ небезопасны и т.д.

Вопросы о безопасности, под видом *задач о телохранителях*, встречаются в литературе по математическим олимпиадам. Однако автор заинтересовался ими несколько лет назад, после прочтения работы [55]. Авторы [55], будучи студентами Кембриджского университета, изучали безопасность многоугольников. Главным результатом в [55] стал вывод о том, что любой рациональный многоугольник безопасен. Из [34] следует, что это не так. Правильные n -угольники являются контрпримерами для утверждения о безопасности из [55]. Теорема из [34] утверждает, что правильный n -угольник безопасен тогда и только тогда, когда $n = 3, 4, 6$. Хотя это утверждение элементарно, доказательство в [34] отнюдь таким

не является. Утверждение следует из исследования безопасности на плоских поверхностях и основано на результатах из [28, 40, 42, 89, 91]. Однако общее исследование безопасности для многоугольников еще только начинается (см. [34, 35]).

Задача 15. Охарактеризовать безопасные многоугольники. В частности, установить критерий безопасности для рациональных многоугольников.

Такие многоугольники, как треугольники с углами 30, 60, 90 и 45, 45, 90 градусов, а также равносторонний треугольник и прямоугольники очень специальные. Это единственные многоугольники, плоскими поверхностями которых будут плоские торы, и, следовательно, их бильiardные потоки интегрируемы [28]. Следуя [28], будем называть их *интегрируемыми многоугольниками*. Многоугольник P является *почти интегрируемым*, если P покрывается при отражениях одним из интегрируемых многоугольников Δ . Согласно [34], все почти интегрируемые многоугольники безопасны.

Гипотеза 2. *Многоугольник безопасен тогда и только тогда, когда он почти интегрируем.*

Почти интегрируемые многоугольники, очевидно, являются рациональными. Из гипотезы 2, в частности, следует, что любой иррациональный многоугольник небезопасен. В настоящее время задача о небезопасности для общих многоугольников кажется безнадежной. Однако концепция безопасности имеет смысл для произвольных бильiardных столов. Заметим, что вышеприведенная постановка имеет смысл для произвольных римановых многообразий M (в общем случае, с границей, углами и сингулярностями). Достаточно заменить орбиты бильiardов, соединяющие точки $x, y \in \Omega$, геодезическими, соединяющими точки $x, y \in M$. Безопасность римановых многообразий связана с ростом числа соединяющихся геодезических при увеличении их длины и, следовательно, с их *топологической энтропией* [12, 37]. Не так много известно о безопасности в бильiardных столах Ω , не являющихся многоугольниками. Пусть Ω — бильiardный стол Биркгофа. При локальном сравнении $\partial\Omega$ с круговыми дугами, интуитивно ясно, что пары достаточно близких точек $x, y \in \partial\Omega$ будут небезопасными, и работа [87] подтверждает это.

Намного больше известно о безопасности компактных гладких римановых многообразий. Если такое многообразие M плоское, то оно безопасно [12, 34]. Так, если M — плоский тор, существует элементарное доказательство [34]. Для плоских M общего вида этот факт следует из теоремы Бибербаха [12].

Гипотеза 3. *Компактное гладкое риманово многообразие безопасно тогда и только тогда, когда оно плоское.*

Гипотеза 3 подтверждается для различных классов римановых многообразий [4, 12, 46]. В частности, она выполняется для всех компактных поверхностей положительного рода [4]. Таким образом, среди поверхностей остается проверить случай, когда M — риманова 2-сфера. Гипотеза верна для типичных римановых многообразий [25].

Список литературы

- [1] Amiran E. Caustics and evolutes for convex planar domains // J. Differential Geom., 1988, vol. 28, pp. 345–357.
- [2] Angenent S.B. A remark on the topological entropy and invariant circles of an area preserving twist map // Twist mappings and their applications. (IMA Vol. Math. Appl., vol. 44.) New York: Springer, 1992. P. 1–5.

- [3] Artuso R., Casati G., Guarneri I. Numerical study on ergodic properties of triangular billiards // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, pp. 6384–6390.
- [4] Bangert V., Gutkin E. Insecurity for compact surfaces of positive genus // *Geom. Dedicata*, 2010, vol. 146, pp. 165–191.
- [5] Baryshnikov Yu., Zharnitsky V. Sub-Riemannian geometry and periodic orbits in classical billiards // *Math. Res. Lett.*, 2006, vol. 13, pp. 587–598.
- [6] Berger M. *Geometry revealed: A Jacob's ladder to modern higher geometry*. Heidelberg: Springer, 2010. 831 pp.
- [7] Bialy M. Convex billiards and a theorem by E. Hopf // *Math. Z.*, 1993, vol. 214, pp. 147–154.
- [8] Birkhoff G.D. *Dynamical systems*. Providence, RI: AMS, 1927. 305 pp.; <http://www.ams.org/bookstore/collseries> [Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: УдГУ, 1999. 408 с.; М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2002. 406 с.].
- [9] Boshernitzan M. A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic // *Duke Math. J.*, 1985, vol. 52, pp. 733–752.
- [10] Boshernitzan M. (неопубликованная рукопись).
- [11] Bunimovich L. Billiards and other hyperbolic systems // *Dynamical systems, ergodic theory and applications* / Ya. G. Sinai et al. (Eds.) (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 100.) Berlin: Springer, 2000. P. 192–233.
- [12] Burns K., Gutkin E. Growth of the number of geodesics between points and insecurity for Riemannian manifolds // *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2008, vol. 21, pp. 403–413.
- [13] Casati G., Prosen T. Mixing property of triangular billiards // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 83, pp. 4729–4732.
- [14] Chernov N.I. Decay of correlations in dispersing billiards // *J. Stat. Phys.*, 1999, vol. 94, pp. 513–556.
- [15] Chernov N.I. Entropy, Lyapunov exponents and mean-free path for billiards // *J. Stat. Phys.*, 1997, vol. 88, pp. 1–29.
- [16] Chernov N., Markarian R. *Chaotic billiards*. (Math. Surveys Monogr., vol. 127.) Providence, RI: AMS, 2006. 316 pp. [Чернов Н., Маркариан Р. Хаотические бильярды. М.–Ижевск: ИКИ, НИЦ «РХД», 2012, готовится к печати.].
- [17] Cheung Y. Hausdorff dimension of the set of nonergodic directions // *Ann. of Math.* (2), 2003, vol. 158, no. 2, pp. 661–678 (with an appendix by M. Boshernitzan).
- [18] Cipra B., Hanson R., Kolan E. Periodic trajectories in right-triangle billiards // *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 52, pp. 2066–2071.
- [19] Eskin A., Masur H. Asymptotic formulas on flat surfaces // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2001, vol. 21, pp. 443–478.
- [20] Eskin A., Masur H., Schmoll M. Billiards in rectangles with barriers // *Duke Math. J.*, 2003, vol. 118, pp. 427–463.
- [21] Eskin A., Masur H., Zorich A. Moduli spaces of abelian differentials: The principal boundary, counting problems and the Siegel–Veech constants // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 2003, no. 97, pp. 61–179.
- [22] Eskin A., Okunkov A. Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials // *Invent. Math.*, 2001, vol. 145, pp. 59–103.
- [23] Finn R. Floating bodies subject to capillary attractions // *J. Math. Fluid Mech.*, 2009, vol. 11, pp. 443–458.
- [24] Fox R.H., Kershner R.B. Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron // *Duke Math. J.*, 1936, vol. 2, pp. 147–150.
- [25] Gerber M., Ku W.-K. A dense G -delta set of Riemannian metrics without the finite blocking property // *Math. Res. Lett.*, 2011, vol. 18, pp. 389–404.

- [26] Glashow S. L., Mittag L. Three rods on a ring and the triangular billiard // J. Stat. Phys., 1997, vol. 87, pp. 937–941.
- [27] Gruber P. M. Convex and discrete geometry. (Grundlehren Math. Wiss., vol. 336.) Berlin: Springer, 2007. 578 pp.
- [28] Gutkin E. Billiard flows on almost integrable polyhedral surfaces // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1984, vol. 4, pp. 560–584.
- [29] Gutkin E. Billiards in polygons // Phys. D, 1986, vol. 19, pp. 311–333.
- [30] Gutkin E. Billiard tables of constant width and the dynamical characterizations of the circle // Workshop on dynamics and related topics: Proc. Penn. State Univ., 1993, pp. 21–24.
- [31] Gutkin E. Billiards in polygons: Survey of recent results // J. Stat. Phys., 1996, vol. 83, pp. 7–26.
- [32] Gutkin E. Two applications of calculus to triangular billiards // Amer. Math. Monthly, 1997, vol. 104, pp. 618–623.
- [33] Gutkin E. Billiard dynamics: A survey with the emphasis on open problems // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 1, pp. 1–13.
- [34] Gutkin E. Blocking of billiard orbits and security for polygons and flat surfaces // Geom. Funct. Anal., 2005, vol. 15, no. 1, pp. 83–105.
- [35] Gutkin E. Insecure configurations in lattice translation surfaces, with applications to polygonal billiards // Discrete Contin. Dyn. Syst., 2006, vol. 16, pp. 367–382.
- [36] Gutkin E. A few remarks on periodic orbits for planar billiard tables, preprint [arXiv:math/0612039](https://arxiv.org/abs/math/0612039) (2006).
- [37] Gutkin E. Topological entropy and blocking cost for geodesics in Riemannian manifolds // Geom. Dedicata, 2009, vol. 138, pp. 13–23.
- [38] Gutkin E. Capillary floating and the billiard ball problem, J. Math. Fluid Mech., 2011, published on-line DOI 10.1007/s00021-011-0071-0; [arXiv:1012.2448](https://arxiv.org/abs/1012.2448).
- [39] Gutkin E., Haydn N. Topological entropy of polygon exchange transformations and polygonal billiards // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1997, vol. 17, pp. 849–867.
- [40] Gutkin E., Hubert P., Schmidt Th. A. Affine diffeomorphisms of translation surfaces: Periodic points, Fuchsian groups, and arithmeticity // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 2003, vol. 36, pp. 847–866.
- [41] Gutkin E., Judge C. The geometry and arithmetic of translation surfaces with applications to polygonal billiards // Math. Res. Lett., 1996, vol. 3, pp. 391–403.
- [42] Gutkin E., Judge C. Affine mappings of translation surfaces: Geometry and arithmetic // Duke Math. J., 2000, vol. 103, pp. 191–213.
- [43] Gutkin E., Katok A. Caustics for inner and outer billiards // Comm. Math. Phys., 1995, vol. 173, pp. 101–133.
- [44] Gutkin E., Knill O. Billiards that share a triangular caustic // New trends for Hamiltonian systems and celestial mechanics (Cocoyoc, 1994) / E. A. Lacombe, J. Llibre (Eds.). (Adv. Ser. Nonlinear Dynam., vol. 8.) River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1996. P. 199–213.
- [45] Gutkin E., Rams M. Growth rates for geometric complexities and counting functions in polygonal billiards // Ergodic Theory Dynam. Systems, 2009, vol. 29, pp. 1163–1183.
- [46] Gutkin E., Schroeder V. Connecting geodesics and security of configurations in compact locally symmetric spaces // Geom. Dedicata, 2006, vol. 118, pp. 185–208.
- [47] Gutkin B., Gutkin E., Smilansky U. Hyperbolic billiards on surfaces of constant curvature // Comm. Math. Phys., 1999, vol. 208, pp. 65–90.
- [48] Gutkin E., Tabachnikov S. Billiards in Finsler and Minkowski geometries // J. Geom. Phys., 2002, vol. 40, nos. 3–4, pp. 277–301.
- [49] Gutkin E., Tabachnikov S. Complexity of piecewise convex transformations in two dimensions, with applications to polygonal billiards on surfaces of constant curvature // Mosc. Math. J., 2006, vol. 6, pp. 673–701.

- [50] Gutkin E., Troubetzkoy S. Directional flows and strong recurrence for polygonal billiards // *Internat. conf. on dynamical systems (Montevideo, 1995)* / F. Ledrappier, J. Lewowicz, Sh. E. Newhouse. (Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 362.) Harlow: Longman, 1996. P 21–45.
- [51] Halbeisen L., Hungerbühler N. On periodic billiard trajectories in obtuse triangles // *SIAM Rev.*, 2000, vol. 42, pp. 657–670.
- [52] *Handbook of dynamical systems: Vol. 1A* / B. Hasselblatt, A. Katok (Eds.). Amsterdam: North-Holland, 2002. 1220 pp.
- [53] *Hard ball systems and the Lorentz gas* / D. Szasz (Ed.). (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 101.) Berlin: Springer, 2000. 458 pp.
- [54] Hardy G. H., Wright E. M. *An introduction to the theory of numbers*. 5th ed. Oxford: Oxford Univ. Press, 1984. 426 pp.
- [55] Hiemer P., Snurnikov V. Polygonal billiards with small obstacles // *J. Stat. Phys.*, 1998, vol. 90, pp. 453–466.
- [56] Hooper W. P., Schwartz R. E. Billiards in nearly isosceles triangles // *J. Mod. Dynam.*, 2009, vol. 3, pp. 159–231.
- [57] Hubacher A. Instability of the boundary in the billiard ball problem // *Comm. Math. Phys.*, 1987, vol. 108, pp. 483–488.
- [58] Innami N. Convex curves whose points are vertices of billiard triangles // *Kodai Math. J.*, 1988, vol. 11, pp. 17–24.
- [59] Katok A. The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard // *Comm. Math. Phys.*, 1987, vol. 111, pp. 151–160.
- [60] Katok A. Infinitesimal Lyapunov functions, invariant cone families and stochastic properties of smooth dynamical systems // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1994, vol. 14, pp. 757–785 (with the collaboration of K. Burns).
- [61] Katok A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1980, no. 51, pp. 137–173.
- [62] Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. 802 pp. [Каток А. Б., Хассельблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 767 с.].
- [63] Katok A., Strelcyn J.-M., Ledrappier F., Przytycki F. Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities. (Lecture Notes in Math., vol. 1222.) Berlin: Springer, 1986. 283 pp.
- [64] Kenyon R., Smillie J. Billiards on rational-angled triangles // *Comment. Math. Helv.*, 2000, vol. 75, pp. 65–108.
- [65] Kerckhoff S., Masur H., Smillie J. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials // *Ann. of Math. (2)*, 1986, vol. 124, pp. 293–311.
- [66] Masur H. Lower bounds for the number of saddle connection and closed trajectories of a quadratic differential // *Holomorphic functions and moduli (Berkeley, CA, 1986): Proc. of the workshop: Vol. 1* / D. Drasin, C. J. Earle, F. W. Gehring, I. Kra, A. Marden (Eds.). (Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 10.) New York: Springer, 1988. P. 215–228.
- [67] Masur H. The growth rate of trajectories of a quadratic differential // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1990, vol. 10, pp. 151–176.
- [68] Masur H., Smillie J. Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations // *Ann. of Math. (2)*, 1991, vol. 134, pp. 455–543.
- [69] Masur H., Tabachnikov S. Rational billiards and flat structures // *Handbook of dynamical systems: Vol. 1A* / B. Hasselblatt, A. Katok (Eds.). Amsterdam: North-Holland, 2002. P. 1015–1089.
- [70] Mather J. Glancing billiards // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1982, vol. 2, pp. 397–403.
- [71] Oxtoby J. C. *Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces*. 2nd ed. (Grad. Texts in Math., vol. 2.) New York – Berlin: Springer, 1980. 106 pp.

- [72] Petkov V., Stojanov L. On the number of periodic reflecting rays in generic domains // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1988, vol. 8, pp. 81–91.
- [73] Poritsky H. The billiard ball problem on a table with a convex boundary: An illustrative dynamical problem // *Ann. of Math. (2)*, 1950, vol. 51, pp. 446–470.
- [74] Puchta J.-Ch. On triangular billiards // *Comment. Math. Helv.*, 2001, vol. 76, pp. 501–505.
- [75] Rychlik M. Periodic points of the billiard ball map in a convex domain // *J. Diff. Geom.*, 1989, vol. 30, pp. 191–205.
- [76] Safarov Yu., Vassiliev D. The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential operators. (Transl. Math. Monogr., vol. 155.) Providence, RI: AMS, 1997. 354 pp.
- [77] Schwartz R. E. Obtuse triangular billiards: 1. Near the (2, 3, 6) triangle // *Experiment. Math.*, 2006, vol. 15, no. 2, pp. 161–182.
- [78] Schwartz R. E. Obtuse triangular billiards: 2. One hundred degrees worth of periodic trajectories // *Experiment. Math.*, 2009, vol. 18, no. 2, pp. 137–171.
- [79] Simányi N. The K -property of N billiard balls: 1 // *Invent. Math.*, 1992, vol. 108, no. 3, pp. 521–548.
- [80] Smillie J. The dynamics of billiard flows in rational polygons // *Dynamical systems, ergodic theory and applications* / Ya. G. Sinai (Ed.). (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 100.) Berlin: Springer, 2000. P. 360–382.
- [81] Sossinsky A. B. Configuration spaces of planar mechanical linkages with one degree of freedom // *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, vol. 15, pp. 530–541.
- [82] Stäckel P. Geodätische Linien auf Polyederflächen // *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1906, vol. 22, pp. 141–151.
- [83] Stojanov L. An estimate from above on the number of periodic orbits for semi-dispersed billiards // *Comm. Math. Phys.*, 1989, vol. 124, pp. 217–227.
- [84] Stojanov L. Note on the periodic points of the billiard // *J. Diff. Geom.*, 1991, vol. 34, pp. 835–837.
- [85] Szasz D. On the K -property of some planar hyperbolic billiards // *Comm. Math. Phys.*, 1992, vol. 145, pp. 595–604.
- [86] Tabachnikov S. Billiards. Paris: Soc. Math. de France, 1995. 142 pp.
- [87] Tabachnikov S. Birkhoff billiards are insecure // *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2009, vol. 23, pp. 1035–1040.
- [88] Tabachnikov S. Geometry and billiards. Providence, RI: AMS, 2005. 176 pp.
- [89] Veech W. The billiard in a regular polygon // *Geom. Funct. Anal.*, 1992, vol. 2, pp. 341–379.
- [90] Veech W. Modular spaces of quadratic differentials // *J. Anal. Math.*, 1990, vol. 55, pp. 117–171.
- [91] Veech W. Teichmüller curves in modular space, Eisenstein series, and an application to triangulated billiards // *Invent. Math.*, 1989, vol. 97, pp. 553–583.
- [92] Weyl H. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung) // *Math. Ann.*, 1912, vol. 71, pp. 441–479.
- [93] Wojtkowski M. Invariant families of cones and Lyapunov exponents // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1985, vol. 5, pp. 145–161.
- [94] Wojtkowski M. Measure theoretic entropy of the system of hard spheres // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1988, vol. 8, pp. 133–153.
- [95] Wojtkowski M. Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents // *Comm. Math. Phys.*, 1986, vol. 105, pp. 391–414.
- [96] Wojtkowski M. Two applications of Jacobi fields to the billiard ball problem // *J. Diff. Geom.*, 1994, vol. 40, pp. 155–164.
- [97] Young L. S. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity // *Ann. of Math. (2)*, 1998, vol. 147, pp. 585–650.
- [98] Болотин С. В. Интегрируемые бильярды Биркгофа // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 1990, т. 2, с. 33–36.

- [99] Бунимович Л. А. Об эргодических свойствах некоторых бильярдных // Функциональный анализ и его приложения, 1974, т. 8, № 3, с. 73–74.
- [100] Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Чернов Н. И. Марковские разбиения для двумерных гиперболических бильярдных // УМН, 1990, т. 45, № 3(273), с. 97–134.
- [101] Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Чернов Н. И. Статистические свойства двумерных гиперболических бильярдных // УМН, 1991, т. 46, № 4(280), с. 43–92.
- [102] Воробец Я. Б. О мере множества периодических точек бильярда // Матем. заметки, 1994, т. 55, № 5, с. 25–35.
- [103] Воробец Я. Б. Эргодичность бильярдных в многоугольниках // Матем. сб., 1997, т. 188, № 3, с. 65–112.
- [104] Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические бильярдные траектории в многоугольниках: Механизмы рождения // УМН, 1992, т. 47, № 3(285), с. 9–74.
- [105] Земляков А. Н., Каток А. Б. Топологическая транзитивность бильярдных в многоугольниках // Матем. заметки, 1975, т. 18, № 2, с. 291–300.
- [106] Иврий В. Я. О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа–Бельтрами на многообразиях с краем // Функциональный анализ и его приложения, 1980, т. 14, № 2, с. 25–34.
- [107] Каток А. Б. Бильярдный стол как игровая площадка для математика // МЦНМО, 2002 (в печати); <http://www.mcsme.ru/iium/stcht.html>
- [108] Козлов В. В., Трещев Д. В. Бильярды: Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: МГУ, 1991. 168 с.
- [109] Лазуткин В. Ф. Существование каустик для бильярдной задачи в выпуклой области // Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1973, т. 37, вып. 1, с. 186–216.
- [110] Синай Я. Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Докл. АН СССР, 1963, т. 153, с. 1261–1264.
- [111] Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдных // УМН, 1970, т. 25, № 2(152), с. 141–192.
- [112] Чернов Н. И. Топологическая энтропия и периодические точки двумерных гиперболических бильярдных // Функциональный анализ и его приложения, 1991, т. 25, № 1, с. 50–57.

Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems

Eugene Gutkin

Department of Mathematics

Nicolaus Copernicus University

Chopina 12/18, 87-100 Torun, Poland;

IM PAN, Sniadeckich 8, Warszawa 10, Poland

gutkin@mat.umk.pl

The survey of the subject, emphasizing the open problems.

With a supplement written by the author for a Russian translation.

(The 2003 English original: Eugene Gutkin, Billiard dynamics: A survey with the emphasis on open problems on billiards, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2003, 8 (1), pp. 1–13.)

Received August 23, 2011

MSC 2010: 37D50, 37J50

Keywords: billiard flow, billiard map, periodic orbits, elliptic dynamics, hyperbolic dynamics, parabolic dynamics, Birkhoff conjecture, phase locking, security

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 489–512 (Russian)