ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.5

MSC 2010: 70K20, 70K42, 70F05

О притяжении гантелеобразных тел, представленных парой пересекающихся шаров

А. А. Буров, А. Д. Герман, И. И. Косенко, В. И. Никонов

Рассматривается задача о движении частицы в поле притяжения однородного гантелеобразного тела, составленного из пары пересекающихся шаров, радиусы которых, вообще говоря, различны. Выписывается приближенное значение для ньютоновского потенциала притяжения. В предположении о равномерном вращении гантели изучаются положения относительного равновесия и их свойства.

Получено 15 марта 2017 года

После доработки 02 июня 2017 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00625а.

Буров Александр Анатольевич

jtm@narod.ru

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Герман Анна Дмитриевна

anna@ubi.pt

Centre for Aerospace Science and Technologies, University of Beira Interior

Convento de Sto. António. 6201-001 Covilhã, Portugal

Косенко Иван Иванович

kosenkoii@gmail.com

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

Никонов Василий Иванович

nikon_v@list.ru

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

Ключевые слова: плоская обобщенная задача двух тел, гравитирующие системы с неравномерным распределением масс, устойчивость установившихся движений, бифуркации установившихся движений

1. Основная идея

Пусть два тела $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ пересекаются по некоторой области $\mathcal{G}_{12}$:

$$\mathcal{G}_{12} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2.$$

Если плотность этих тел равна ρ , то потенциал ньютоновского притяжения составным телом $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ произвольной пробной точки $P(x, y, z)$ может быть записан как

$$U(P) = \iiint_{P' \in \mathcal{G}_1} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'})^{1/2}} + \iiint_{P' \in \mathcal{G}_2} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'})^{1/2}} - \iiint_{P' \in \mathcal{G}_{12}} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'})^{1/2}}. \quad (1.1)$$

Последнее выражение вычитается из суммы первых двух, так как в них оно учтено дважды. Положение точки $P(x, y, z)$ и положение пробегающей тело точки $P'(x', y', z')$ задаются координатами их радиус-векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OP'}$ в осях какой-либо декартовой системы координат $Oxyz$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (1.1) естественным образом распространяется на случай произвольного количества попарно пересекающихся тел. В случае, когда тел не менее трех, и они могут допускать тройные пересечения, соотношение (1.1) может быть естественным образом обобщено по аналогии с тем, как это делается в теории множеств в рамках принципа включения и исключения.

В некоторых случаях, когда тела $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ имеют форму, «удобную для интегрирования» (как, например, в случае двух однородных шаров, рассмотренном ниже), и нахождение первых двух слагаемых в выражении (1.1) может быть осуществлено достаточно просто. Вместе с тем, вклад в потенциал третьего слагаемого даже в случае двух шаров представлен достаточно громоздкими аналитическими выражениями (см., например, [3, 11, 12]), и зачастую его оставляют в непроинтегрированном виде. В настоящей работе на примере пары шаров показано, как можно заменить третье слагаемое приближенным выражением, в общем случае удобным для аналитического изучения динамики.

2. Приближение гравитирующего тела парой пересекающихся шаров

2.1. Естественные параметры задачи

Пусть $\mathcal{B}$ — шар радиуса R с центром в точке O , а Π — плоскость, удаленная от точки O на расстояние $\zeta = R - h$ (рис. 1, слева). Эта плоскость отсекает от шара сферический сегмент¹ с радиусом основания

$$c = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2} \quad \left(R = \frac{c^2 + h^2}{2h} \right). \quad (2.1)$$

Этим равенством будем пользоваться в дальнейшем при выводе основных соотношений.

¹В зарубежной литературе под сферическим сегментом понимают часть сферы, расположенную между парой параллельных плоскостей. Рассматриваемый нами объект называют сферической чашей (spherical cup).

Рис. 1. Основные обозначения.

Пусть шар однороден и плотность его равна единице. Тогда в принятых обозначениях масса отсеченного шарового сегмента составляет (см., например, [4])

$$\mathcal{M} = \frac{\pi h}{6} (3c^2 + h^2). \quad (2.2)$$

Удаление центра масс этого сегмента, естественным образом расположенного на оси симметрии, от отсекающей плоскости, задается величиной

$$d = \frac{h(2c^2 + h^2)}{2(3c^2 + h^2)}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим теперь два шара $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ радиусами R_1 и R_2 с центрами в точках O_1 и O_2 (рис. 1, справа). Если расстояние между центрами меньше суммы радиусов, то шары пересекаются по линзоподобному телу $\mathcal{L}$, составленному из пары сферических сегментов $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{L} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, и в силу (2.1)

$$c = \sqrt{2R_1h_1 - h_1^2} = \sqrt{2R_2h_2 - h_2^2} \iff R_k = \frac{c^2 + h_k^2}{2h_k}, \quad k = 1, 2.$$

Прежде всего нас будет интересовать масса и положение центра масс линзоподобного тела $\mathcal{L}$.

2.2. Массы и положения центров масс линзоподобного тела и системы в целом

Найти массу тела $\mathcal{L}$ можно, опираясь на формулу (2.2):

$$m_L = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{\pi(h_1 + h_2)}{6} [3c^2 + (h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2)]. \quad (2.4)$$

Такой массе отвечает шар радиуса

$$R_L = \left(\frac{(h_1 + h_2)}{8} [3c^2 + (h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2)] \right)^{1/3}.$$

Так как массы шаров составляют

$$m_k = \frac{4}{3} \pi R_k^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{c^2 + h_k^2}{2h_k} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{c^2 + h_k^2}{h_k} \right)^3, \quad k \in \{1, 2\},$$

то полную массу гантели можно представить в виде

$$m = m_1 + m_2 - m_L = \frac{\pi c^4 (h_1 + h_2) (c^2 (h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2) + 3h_1^2 h_2^2)}{6h_1^3 h_2^3}.$$

Для нахождения положения точки O_L — центра масс тела $\mathcal{L}$ — воспользуемся, помимо (2.2), соотношением (2.3) и системой отсчета с осями $Ozxy$ (ПСО) с началом в точке O — точке пересечения отсекающей плоскости и оси симметрии — и с осью Oz , направленной вдоль оси от точки O_1 к точке O_2 . В этой системе отсчета координаты центров шаров задаются соотношениями

$$\overrightarrow{OO_1} = (-(R_1 - h_1), 0, 0)^T = (-\zeta_1, 0, 0)^T, \quad \overrightarrow{OO_2} = (R_2 - h_2, 0, 0)^T = (\zeta_2, 0, 0)^T.$$

Если центры масс сферических сегментов $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ задаются векторами $\overrightarrow{OD_1} = (-d_1, 0, 0)^T$, $\overrightarrow{OD_2} = (d_2, 0, 0)^T$, то положение точки O_L — центра масс тела $\mathcal{L}$ в целом — определяется вектором $\overrightarrow{OO_L} = (\ell, 0, 0)^T$, где

$$\ell = m_L^{-1} (-\mathcal{M}_1 d_1 + \mathcal{M}_2 d_2) = \frac{(h_2 - h_1) (2c^2 + h_2^2 + h_1^2)}{2 (3c^2 + h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}.$$

Точка $Z = (z_0, 0, 0)^T$ — центр масс гантели в целом — определяется соотношением

$$\begin{aligned} z_0 &= m^{-1} (m_1(h_1 - R_1) + m_2(R_2 - h_2) - m_L d) = \\ &= \frac{(h_1 - h_2) [(h_1^2 + h_2^2)c^8 + 2h_1^2 h_2^2 (c^4 + 2h_1^2 h_2^2) + h_2^2 h_1^2 (h_1^2 + h_2^2)]}{2h_1 h_2 c^4 ((h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)c^2 + 3h_1^2 h_2^2)}, \end{aligned}$$

получающимся в результате громоздких выкладок. Также в результате громоздких выкладок получаются соотношения

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ZO_1} &= \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{ZO_2} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{ZO_L} = \begin{pmatrix} z_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z_1 &= -\zeta_1 - z_0 = \frac{h_1^2 (2h_1 h_2^4 (h_2 - h_1) (2c^2 + h_1^2 + h_2^2) - c^4 (c^4 + (3h_2 - h_1) h_2 c^2 - 3h_2^3 h_1))}{2h_2 c^4 (c^2 (h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2) + 3h_1^2 h_2^2)}, \\ z_2 &= \zeta_2 - z_0 = \frac{h_2^2 (2h_1^4 h_2 (h_2 - h_1) (2c^2 + h_1^2 + h_2^2) + c^4 (c^4 + (3h_1 - h_2) h_1 c^2 - 3h_1^3 h_2))}{2h_1 c^4 (c^2 (h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2) + 3h_1^2 h_2^2)}, \\ z_L &= \ell - z_0 = \frac{h_2 - h_1}{2h_1 h_2 c^4 (3c^2 + h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2) (c^2 (h_2^2 - h_1 h_2 + h_1^2) + 3h_1^2 h_2^2)} \times \\ &\times [3h_1^3 h_2^3 (h_1^2 + h_2^2 + 4h_1 h_2) c^4 + 2h_1^4 h_2^4 (c^2 (5h_2^2 - 2h_1 h_2 + 5h_1^2) + (h_2^2 + h_1^2) (h_2^2 - h_1 h_2 + h_1^2)) + \\ &+ c^6 (3c^4 (h_2^2 + h_1^2) + (6h_1^2 h_2^2 + h_1^3 h_2 + h_1 h_2^3 + h_1^4 + h_2^4) (c^2 + h_1 h_2))]. \end{aligned}$$

2.3. Приближение гравитационного потенциала

Точное выражение для потенциала линзоподобного тела $\mathcal{L}$ достаточно сложно. Можно воспользоваться разложением этого выражения в ряд по степеням параметра, задающего отношение характерного размера этого тела к расстоянию r от центра масс O_L до точки P : $\overrightarrow{ZP} = (z, x, y)^T$. Удерживая в этом разложении лишь первое слагаемое, можно представить приближенное выражение для потенциала в точке P в виде (ср. [6, 7])

$$U(z, x, y) = - \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} - \frac{m_L}{\rho_L} \right), \quad (2.5)$$

$$\rho_1 = \left(\overrightarrow{O_1P}, \overrightarrow{O_1P} \right)^{1/2}, \quad \rho_2 = \left(\overrightarrow{O_2P}, \overrightarrow{O_2P} \right)^{1/2}, \quad \rho_L = \left(\overrightarrow{O_LP}, \overrightarrow{O_LP} \right)^{1/2}.$$

Здесь и далее предполагается, что единицы измерения выбраны таким образом, что гравитационная постоянная G равна единице.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для уточнения вклада линзоподобного включения $\mathcal{L}$ в выражении для потенциала с помощью слагаемых второго порядка малости по отношению к упомянутому параметру можно воспользоваться известными разложениями, зависящими, в частности, от компонент центрального тензора инерции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предлагаемое приближение потенциала, естественно, несправедливо для внутренних точек гравитирующего тела. После несложной поправки, выходящей за пределы настоящей работы, можно изучать аналитически зависимость от параметров точек либрации, расположенных как внутри тел, так и снаружи ([15, 16], см. также [10], где речь идет о взаимном расположении конечных тел). Заметим, что «внутренним» точкам либрации посвящены многочисленные исследования так называемой задачи Роба (см. [8, 14]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Естественно сопоставить сечения поверхностей уровня потенциала (2.5) в рамках «трехточечной» модели и соответствующие им сечения поверхностей уровня потенциала «обычной», «двухточечной» гантели:

$$U(z, x, y) = - \left(\frac{m'_1}{\rho_1} + \frac{m'_2}{\rho_2} \right), \quad (2.6)$$

$$m'_1 = m_1 \left(1 - \frac{m_L}{m_1 + m_2} \right), \quad m'_2 = m_2 \left(1 - \frac{m_L}{m_1 + m_2} \right), \quad m'_1 + m'_2 = m_1 + m_2 - m_L.$$

Также естественно сопоставить различие сил притяжения, проявляющееся в различии положений точек либрации (см. ниже).

В дальнейшем модель, в рамках которой пересечение шаров во внимание не принимается и тело представлено парой массивных точек, расположенных в центрах этих шаров, будем называть двухточечной.

Под трехточечной моделью понимается модель, в рамках которой принимается во внимание пересечение шаров и потенциал возникающей в пересечении линзы приближается потенциалом массивной точки, расположенной в центре масс этой линзы.

2.4. Случай двух одинаковых шаров

В частном случае, когда оба шара одинаковы, центр масс как самого тела $\mathcal{G}$, так и линзоподобного элемента $\mathcal{L}$ совпадают с точкой O , а выражение (2.4) и последующие соотношения из раздела 2.2 упрощаются и в обозначениях $R_1 = R_2 = R$, $h_1 = h_2 = h$ принимают вид

$$m_L = \frac{\pi h}{3} [3c^2 + h^2], \quad R_L = \left(\frac{h}{4} [3c^2 + h^2] \right)^{1/3},$$

$$\mu = \frac{\pi}{6} \left(\frac{c^2 + h^2}{h} \right)^3, \quad \zeta = \frac{c^2 - h^2}{2h}, \quad (2.7)$$

$$\rho_k = ((z - z_k)^2 + x^2 + y^2)^{1/2}, \quad k \in \{1, 2, L\}.$$

ПРИМЕР. Для иллюстрации рассмотрим в дальнейшем частный случай двух одинаковых шаров $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, для которых $R_1 = R_2 = 1.0$, $\zeta = h_1 = h_2 = 0.5$, $c = \sqrt{3}/2$. В этом случае

$$m_1 = m_2 = \frac{4}{3}\pi, \quad m_L = \frac{5}{12}\pi, \quad m = \frac{9}{4}\pi; \quad m'_1 = m'_2 = \frac{9}{8}\pi.$$

Для такой гантели сечения поверхностей уровня для потенциалов (2.5) и (2.6), а также отвечающие им силовые линии изображены на рисунке 2 слева и справа. Сферы, ограничивающие шары, составляющие гантель, изображены пунктиром. Как можно видеть, топологические различия поверхностей уровня потенциалов имеют место внутри шаров, то есть там, где сами потенциалы вида (2.5) и (2.6) неприменимы.

Рис. 2. Пример: силовые линии и сечения поверхностей уровня потенциалов

Подготовив необходимые выражения, можно обратиться к изучению точек либрации гантели $\mathcal{G}$.

3. Точки либрации

3.1. Существование

Пусть тело $\mathcal{G} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ совершает равномерное вращение с постоянной угловой скоростью ω относительно оси Zy , проходящей через его центр масс. Предполагается, что движение точки P не оказывает влияния на динамику тела $\mathcal{G}$. Согласно теории Рауса [9] (см. также [2]), относительные равновесия точки P определяются как критические точки измененного потенциала

$$U = U_N + U_C, \quad (3.1)$$

где U_N — приближенное значение для гравитационного потенциала, задаваемое соотношением (2.5),

$$U_C = -\frac{1}{2}\omega^2(z^2 + x^2)$$

— потенциал центробежных сил.

Относительные равновесия определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\omega^2 z + \frac{m_1}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{m_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} - \frac{m_L}{\rho_L^2} \frac{\partial \rho_L}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\omega^2 x + \frac{m_1}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{m_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \frac{m_L}{\rho_L^2} \frac{\partial \rho_L}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{m_1}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{m_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{m_L}{\rho_L^2} \frac{\partial \rho_L}{\partial y} = 0.$$

В дальнейшем используются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial z} &= \frac{z - z_k}{\rho_k}, \quad \frac{\partial \rho_k}{\partial p} = \frac{p}{\rho_k} \quad k \in \{1, 2, L\}, \quad p \in \{x, y\}, \\ \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial z^2} &= \frac{x^2 + y^2}{\rho_k^3}, \quad \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x^2} = \frac{y^2 + (z - z_k)^2}{\rho_k^3}, \quad \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial y^2} = \frac{(z - z_k)^2 + x^2}{\rho_k^3}, \\ \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x \partial z} &= -\frac{x(z - z_k)}{\rho_k^3}, \quad \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial z \partial y} = -\frac{(z - z_k)y}{\rho_k^3}, \quad \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial y \partial x} = -\frac{xy}{\rho_k^3}. \end{aligned}$$

Исключая ω из уравнений (3.2), (3.3), после преобразований приходим к уравнению

$$F = xF_{zx}(z, x, y) = 0, \quad F_{zx} = \frac{m_1 z_1}{\rho_1^3} + \frac{m_2 z_2}{\rho_2^3} - \frac{m_L z_L}{\rho_L^3}, \quad (3.4)$$

которому должны удовлетворять координаты точек либрации. Из уравнения (3.4) видно, что в плоскости Ozx точки либрации могут располагаться либо на оси Oz (точки либрации типа I), либо на кривой Γ , задаваемой равенством $F_{zx} = 0$. Для пары одинаковых шаров в силу (2.7) равенство $F_{zx} = 0$ принимает вид

$$\mu \zeta \left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} \right) = 0.$$

Это означает, что точки либрации типа II располагаются на оси Ox . Ограничимся в дальнейшем лишь рассмотрением движений I и II .

Для точек либрации I в силу (3.2) выполнено соотношение

$$\omega^2 = z^{-1} \left(\frac{m_1}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{m_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} - \frac{m_L}{\rho_L^2} \frac{\partial \rho_L}{\partial z} \right),$$

в случае равных шаров принимающее вид

$$\omega^2 = z^{-1} \left(\mu \left[(z + \zeta)^{-2} + (z - \zeta)^{-2} \right] - m_L z^{-2} \right). \quad (3.5)$$

Для случая двухточечной модели аналогичное уравнение записывается как (зависимость I')

$$\omega^2 = z^{-1} \mu' \left[(z + \zeta)^{-2} + (z - \zeta)^{-2} \right]. \quad (3.6)$$

Также в случае равных шаров для точек либрации II в силу (3.3) выполнено соотношение

$$\omega^2 = 2\mu(\zeta^2 + x^2)^{-3/2} - m_L x^{-3}. \quad (3.7)$$

Для случая двухточечной модели аналогичное уравнение записывается как (зависимость I'')

$$\omega^2 = 2\mu'(\zeta^2 + x^2)^{-3/2}. \quad (3.8)$$

Сравним для пары равных шаров сопоставимые множества точек либрации в двух- и в трехточечном приближениях. На рисунке 3 зависимости (3.5) и (3.6) изображены слева, а зависимости (3.7) и (3.8) — справа, причем зависимости (3.6) и (3.8) изображены точками. Точки, обладающие физическим смыслом в рамках предложенной модели, располагаются справа от вертикальных прямых ℓ_I и ℓ_{II} . Остальные точки, расположенные слева от этих прямых, изображены серым цветом.

Рис. 3. Взаимное расположение бифуркационных кривых I и I' (слева) и кривых II и II' (справа).

Кривая (3.7) пересекает горизонтальную ось в «равновесии»², определяемом соотношениями

$$x^{*2} = \zeta^2 \frac{p^{4/3} + p^{2/3} + 1}{p^2 - 1}, \quad \omega^* = 0, \quad p = 2\mu/m_L.$$

На той же кривой точка максимума S задается соотношениями

$$x_*^2 = \frac{\zeta^2}{p^{2/5} - 1}, \quad \omega_*^2 = \frac{2\mu}{\zeta^3} \frac{(p^{2/5} - 1)^{5/2}}{p}.$$

²На самом деле эта точка равновесием не является, так как она располагается вне той области, где справедливо используемое представление потенциала.

Этой точке отвечает значение энергии

$$H_* = U(0, 0, x_*; \omega_*) = -\frac{m_L}{2\zeta} \left(2p^{2/5} + 3 \right) \left(p^{2/5} - 1 \right)^{3/2}.$$

При $\omega < \omega_*$ имеются два относительных равновесия, при $\omega = \omega_*$ эти два относительных равновесия сливаются в одно, которое исчезает при $\omega > \omega_*$ — происходит бифуркация.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сопоставление результатов исследования точек либрации для триангулированных тел и для их приближений с помощью конечного числа шаров позволяет [13] осуществить «настройку» параметров в указанном приближении. В рассматриваемом случае положения решений из семейств I и II , отвечающих трехточечной и двухточечной моделям, можно сопоставить, используя зависимость вида

$$\kappa_I(\omega) = \frac{|z_{(3)}(\omega) - z_{(2)}(\omega)|}{z_{(3)}(\omega)} \cdot 100\%, \quad \kappa_{II}(\omega) = \frac{|x_{(3)}(\omega) - x_{(2)}(\omega)|}{x_{(3)}(\omega)} \cdot 100\%,$$

где $z_{(k)}(\omega)$, $x_{(k)}(\omega)$, $k = 2, 3$ — решения I , II для двухточечной и трехточечной моделей потенциала.

Так, для иллюстрационного примера отклонение решений I в указанных моделях составляет немногим больше, чем 2%. Для физически осмысленных решений, в рамках предложенной модели, то есть для решений с $\omega < \omega_{I*}(1.5) \approx 1.716$, отклонения лишь немногим больше, чем 1%.

Примечательны качественные различия решений семейства II . В случае трехточечной модели существует интервал значений угловой скорости $\omega \in (0, \omega_*)$, для которых имеются два относительных равновесия, тогда как при $\omega > \omega_*$ относительных равновесий не существует. В то же время, в случае двухточечной модели относительные равновесия, расположенные на оси Ox , существуют для любого значения угловой скорости.

Используя соотношение для $\kappa_{II}(\omega)$, можно показать, что в иллюстрационном примере отклонение решений II , обладающих физическим смыслом (для них $\omega < \omega_{II}(\sqrt{3}/2) \approx 2.522$), не превышает 2%.

3.2. Степени неустойчивости

Для исследования степеней неустойчивости точек либрации вычислим вторую вариацию $\delta^2 U$ измененного потенциала U .

Можно показать, что в общем случае на точках либрации I и II вторая вариация имеет вид

$$2\delta^2 U = U_{zz}dz^2 + U_{xx}dx^2 + U_{yy}dy^2,$$

$$U_{zz} = -\omega^2 + \frac{\partial^2 U_N}{\partial z^2}, \quad U_{xx} = -\omega^2 + \frac{\partial^2 U_N}{\partial x^2}, \quad U_{yy} = \frac{\partial^2 U_N}{\partial y^2}.$$

Но функция U_N — гармоническая, то есть вне шаров $\Delta U_N = 0$. Тогда на этих решениях

$$\Delta U = -2\omega^2 < 0,$$

и хотя бы один из коэффициентов квадратичной формы второй вариации отрицателен. Это означает, что степень неустойчивости не может быть меньше единицы, что типично для задач о точках либрации.

На точках либрации I коэффициенты устойчивости Пуанкаре имеют вид

$$U_{zz} = -\omega^2 - 2U_I, \quad U_{xx} = -\omega^2 + U_I, \quad U_{yy} = U_I \quad \left(U_I = \frac{m_1}{|z - z_1|^3} + \frac{m_2}{|z - z_2|^3} - \frac{m_L}{|z - z_L|^3} \right).$$

Для рассматриваемого примера на решениях I

$$U_{zz} < 0, \quad U_{xx} > 0, \quad U_{yy} > 0 \quad (-++) \quad (3.9)$$

и степень неустойчивости равна единице, то есть эти точки либрации неустойчивы по Ляпунову.

В симметричном случае на точках либрации II коэффициенты Пуанкаре записываются как

$$U_{zz} = -\omega^2 + \frac{2\mu(-2\zeta^2 + x^2)}{(\zeta^2 + x^2)^{5/2}} - \frac{m_L}{|x|^3}, \quad U_{xx} = -\omega^2 + \frac{2\mu(\zeta^2 - 2x^2)}{(\zeta^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{2m_L}{|x|^3},$$

$$U_{yy} = \frac{2\mu}{(\zeta^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{m_L}{|x|^3}.$$

Для решений II из рассматриваемого примера при $x < x_*$ для знаков коэффициентов Пуанкаре выполнены условия, аналогичные (3.9). Для этих решений $\chi = 1$, и они неустойчивы по Ляпунову.

При $x > x_*$ степень неустойчивости точек либрации II равна двум, причем

$$U_{zz} < 0, \quad U_{xx} < 0, \quad U_{yy} > 0 \quad (---).$$

Для таких точек имеет смысл ставить вопрос о гироскопической стабилизации. Решению этого вопроса посвящен следующий раздел.

Степени неустойчивости точек либрации проставлены на ветвях бифуркационных кривых на рисунке 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Представляет интерес исследование зависимости от параметров точек либрации прецессирующих тел, аналогичное выполненным в [1, 5] исследованиям для гантели, составленной из двух непересекающихся шаров.

3.3. Устойчивость точек либрации в первом приближении

Для исследования устойчивости в первом приближении точек либрации с $\chi = 2$ нужно исследовать корни отвечающего им характеристического многочлена.

В равномерно вращающейся вместе с астероидом системе отсчета само движение системы может быть описано уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} (\dot{z}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega (z\dot{x} - x\dot{z}) + \frac{1}{2} \omega^2 (z^2 + x^2) - U_N(z, x, y),$$

где функция $U_N(z, x, y)$ задается соотношением (2.5). Для уравнений Лагранжа с таким лагранжианом линеаризация в окрестности точек либрации II позволяет выписать характеристический многочлен, принимающий в обозначениях

$$U_{pp}^N = \left(\frac{\partial^2 U_N}{\partial p^2} \right)_{(0, x_0, 0)}, \quad p \in \{z, x, y\},$$

следующий вид:

$$P_6(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - \omega^2 + U_{zz}^N & -2\omega\lambda & 0 \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 - \omega^2 + U_{xx}^N & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + U_{yy}^N \end{vmatrix} = P_2(\lambda) \cdot P_4(\lambda).$$

Имеем

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= \lambda^2 + U_{yy}^N, & P_4(\lambda) &= \lambda^4 + b\lambda^2 + c, \\ b &= 2\omega^2 + (U_{zz}^N + U_{xx}^N), & c &= \omega^4 - \omega^2 (U_{zz}^N + U_{xx}^N) + U_{zz}^N \cdot U_{xx}^N, \\ d &= b^2 - 4c = 8\omega^2 (U_{zz}^N + U_{xx}^N) + (U_{zz}^N - U_{xx}^N)^2. \end{aligned}$$

Из уравнения $P_2(\lambda) = 0$ имеем

$$\lambda^2 = -U_{yy}^N < 0,$$

в чем при $x > x_*$ можно убедиться непосредственно. Далее, все корни уравнения $P_4(\lambda) = 0$ чисто мнимые лишь при выполнении условий

$$b > 0, \quad c > 0, \quad d \geq 0.$$

На плоскости (x, ω) кривая $c = 0$ проходит через точку C , что, вообще говоря, следует из общей теории бифуркаций.

Для иллюстрационного примера кривая $d = 0$ пересекает бифуркационную кривую II в точке D : $(x_d, \omega^2(x_d)) = (0.4823811333, 13.31938694)$. Точки S и D расположены весьма близко друг к другу. Кроме того, обе эти точки находятся в области, где использование применяемого выражения для потенциала лишено физического смысла. Таким образом, в рассматриваемом примере в данном приближении точек либрации, расположенных вне астероида и устойчивых в первом приближении, нет.

4. Линии уровня измененного потенциала

Выражение для измененного потенциала (3.1), а также зависимости (3.5), (3.7) позволяют изобразить бифуркационные кривые на плоскости (ω^2, H) , где H — постоянная интеграла энергии (рис. 4). Одна из присутствующих на этом рисунке кривых отвечает точкам либрации I , а другая — точкам либрации II . Рисунки построены для значений параметров из примера раздела 2.4.

Кривые I и II на бифуркационной диаграмме³ разбивают плоскость (ω, H) на области A , B , C и D , каждой из которых отвечает область возможного движения (ОВД) своего топологического типа. Ограничимся описанием сечений ОВД плоскостью $y = 0$. В случае $\omega < \omega_*$ (≈ 3.65), при $H_* \approx -10.895$ существует три точки либрации. При $\omega = \omega_*$ две точки сливаются в одну и исчезают с дальнейшим ростом величины ω . Перестройки топологической структуры ОВД осуществляются в точках либрации.

Топологическая структура для изучаемых сечений ОВД классифицируется так:

$$\begin{aligned} A : R^2 \setminus D^2 & \quad (\text{плоскость без диска}), \\ B : R^2 \setminus \{D^2 \cup D^2 \cup D^2\} & \quad (\text{плоскость без трех дисков}), \\ C : \{R^2 \setminus D^2\} \cup \{S^1 \times D^1\} = R^2 \setminus \{D^2 \setminus \{D^2 \setminus D^2\}\} & \quad (\text{плоскость без диска и кольца}), \\ D : \{R^2 \setminus D^2\} \cup \{D^2 \cup D^2\} = R^2 \setminus \{D^2 \setminus \{D^2 \cup D^2\}\} & \quad (\text{плоскость без диска с двумя дырками}). \end{aligned}$$

³Эта диаграмма аналогична диаграмме Смейла, но ею не является: величина ω^2 не является первым интегралом.

Рис. 4. Аналог диаграммы Смейла. Красная ветвь отвечает решениям I , зеленая — решениям II .^a

Эти сечения изображены на рисунке 5. Серым цветом показаны области, где $U > H$, то есть движение невозможно. Сами изображения получены так: тонкой линией s на рисунке 4 проведено сечение $\omega = \text{const}$, отвечающее значению угловой скорости, для которой строились области возможного движения. Луч s последовательно пересекает области A – D , переходя от одной к другой на пересечениях с бифуркационными кривыми по мере возрастания постоянной интеграла энергии H .

Рис. 5. Области возможности движения. Серым показаны области, где движение невозможно.

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1702007/>

Рис. 6. Линии уровня измененного потенциала, ограничивающие ОВД. Случай $\omega < \omega_*$ (слева), случай $\omega > \omega_*$ (справа).

При $\omega > \omega_*$ характерны ОВД, топологически эквивалентные областям A и D .

Типичные ОВД совокупно изображены на рисунке 6 для $\omega < \omega_*$ (слева) и для $\omega > \omega_*$ (справа). Пунктиром прорисованы сферы, ограничивающие шары, которые составляют гантель.

References

- [1] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. Coplanar libration points in the generalized restricted circular problem of three bodies, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 569–576 (Russian).
- [2] Karapetyan A. V. *Stability of stationary motions*, Moscow: URSS, 1998 (Russian).
- [3] Kondratyev B. P. *Theory of potential. New methods and problems with solutions*, Moscow: Mir, 2007 (Russian).
- [4] Levi-Civita T., Ugo A. *Compendio di meccanica razionale: Parte 1. Cinematica — principi e statica*, Bologna: Zanichelli, 1946.
- [5] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics, *J. Vibroeng.*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 550–556.
- [6] Herrera-Sucarrat E. *The full problem of two and three bodies: Application to asteroids and binaries*, Guildford: Univ. of Surrey, 2012.
- [7] Herrera-Sucarrat E., Palmer P. L., Roberts M. Modeling the gravitational potential of a nonspherical asteroid, *J. Guid. Control Dyn.*, 2013, vol. 36, no. 3, pp. 790–798.
- [8] Robe H. A. G. A new kind of 3-body problem, *Celestial Mech.*, 1977, vol. 16, no. 3, pp. 343–351.
- [9] Routh E. J. *A treatise on stability of a given state of motion*, London: McMillan, 1877.
- [10] Scheeres D. Relative equilibria in the spherical, finite density 3-body problem, *J. Nonlinear Sci.*, 2016, vol. 26, no. 5, pp. 1445–1482.
- [11] Seidov Z. F. Gravitational potential energy of simple bodies: The homogeneous bispherical concavo-convex lens, arXiv:astro-ph/0003233 (2000).
- [12] Seidov Z. F. Gravitational energy of simple bodies: The method of negative density, arXiv:astro-ph/0003239 (2000).
- [13] Turconi A., Palmer Ph., Roberts M. Efficient modelling of small bodies gravitational potential for autonomous proximity operations, in *Astrodynamics Network AstroNet-II: The Final Conference*,

- G. Gómez, J. J. Masdemont (Eds.), *Astrophys. Space Sci. Proc.*, vol. 44, Cham: Springer, 2016, pp. 257–272.
- [14] Valeriano L. R. Parametric stability in Robe's problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 126–135.
- [15] Wang X., Jiang Y., Gong S. Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies, *Astrophys. Space Sci.*, 2014, vol. 353, no. 1, pp. 105–121.
- [16] Jiang Y., Baoyin H., Li H. Collision and annihilation of relative equilibrium points around asteroids with a changing parameter, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2015, vol. 452, no. 4, pp. 3924–3931.

On the gravity of dumbbell-like bodies represented by a pair of intersecting balls

Alexander A. Burov¹, Anna D. Guerman², Ivan I. Kosenko³, Vasily I. Nikonov⁴

^{1,3,4}Federal Research Center «Computer Science and Control»

ul. Vavilova 40, Moscow, 119333, Russia

¹National Research University «Higher School of Economics»

ul. Myasnitskaya 20, Moscow, 101000, Russia

²Centre for Aerospace Science and Technologies, University of Beira Interior

Convento de Sto. António, 6201-001 Covilhã, Portugal

³Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125993, Russia

¹jtm@narod.ru, ²anna@ubi.pt, ³kosenkoi@gmail.com, ⁴nikon_v@list.ru

The problem of the motion of a particle in the gravity field of a homogeneous dumbbell-like body composed of a pair of intersecting balls, whose radii are, in general, different, is studied. Approximation for the Newtonian potential of attraction is obtained. Relative equilibria and their properties are studied under the assumption of uniform rotation of the dumbbells.

MSC 2010: 70K20, 70K42, 70F05

Keywords: generalized planar two-bodies problem, asteroid-like systems, gravitating systems with irregular mass distribution, stability of steady motions, bifurcations of steady motions

Received March 15, 2017, accepted June 02, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 243–256 (Russian)