ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 574.34, 530.182

MSC 2010: 37N25, 90B10, 34D06

Кластеризация и химеры в модели пространственно-временной динамики популяций с возрастной структурой

М. П. Кулаков, Е. Я. Фрисман

В работе изучается модель пространственно-временной динамики миграционно-связанных популяций с возрастной структурой. Динамика численности единичной популяции описывается двумерным нелинейным отображением, демонстрирующим мультистабильность, а связь, определяемая миграцией особей, носит нелокальный характер. Исследуются механизмы, приводящие к синхронизации (полной, кластерной, хаотической) и формированию химерных состояний, а также к переходам между разными типами динамики. В работе подробно изучается проблема зависимости формируемого типа пространственно-временной динамики от начальных значений численностей популяций. Рассмотрено два типа начальных условий — случайные и специальные (в виде определенных соотношений), а также два случая динамики одиночного осциллятора — регулярные и нерегулярные колебания. Описан механизм кластерной синхронизации, связанный с мультистабильностью локального осциллятора, когда разные кластеры принципиально отличаются характером своей динамики. Обнаружено, что специальные начальные условия даже в докритических областях способны приводить к сложным режимам, в том числе разнообразным химерам. Описан режим, когда в кластере с регулярной или хаотической динамикой выделяются несколько одиночных несинхронных элементов с большой амплитудой. Показано, что тип пространственно-временной динамики существенно определяется параметрами распределения

Получено 06 сентября 2017 года
После доработки 11 октября 2017 года

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-29-02658 офи_м.

Кулаков Матвей Павлович
k_matvey@mail.ru
Фрисман Ефим Яковлевич
frisman@mail.ru

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
679016, Россия, г. Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, д. 4

случайных начальных условий. При большом размахе и любых параметрах связи вообще не возникает когерентных режимов, которые возможны при небольшом размахе случайных начальных условий.

Ключевые слова: популяция, мультистабильность, система связанных отображений, синхронизация, кластеризация, химеры, бассейн притяжения

1. Введение

Исследования особенностей динамики связанных нелинейных осцилляторов или ансамблей являются одной из важнейших фундаментальных задач теории синхронизации. Интерес исследователей вызван как разнообразием нелинейных осцилляторов, так и видами связи между ними. Традиционно в качестве модели одиночного элемента используют логистические отображения [1, 7, 11, 14] или двух-, трехмерные нелинейные системы (например, отображение Эно [17], система Рёсслера [15] и др.). Исходя из специфики задачи, связь между элементами может быть инерциальной, диссипативной [2, 3] или даже нелинейной [19–21]. Кроме того, для многомерных осцилляторов связь вводится через разные переменные. Если для одномерного логистического отображения связь всегда прямо меняет состояние каждой ее переменной, то в многомерных системах связь может быть реализована через одну ее переменную, посредством мультипликативной или аддитивной добавки. В результате состояние одного осциллятора прямо меняет лишь одну переменную осцилляторов, с которыми он связан, а другие переменные меняются с некоторой задержкой через одну или более итераций, в зависимости от вида уравнений. Соответственно, связь может выглядеть как комбинация инерциальной и диссипативной и приводить к принципиально новым феноменам пространственно-временной динамики.

Независимо от вида модели одиночного осциллятора и типа связи ансамбли демонстрируют схожие феномены динамики, такие как синхронизация (включающая в себя кластерную и хаотическую), пространственно-временной хаос, солитоны, бегущие волны и др. В ряде случаев возникают состояния, известные как химерные, при которых сочетаются свойства синхронной и несинхронной динамики [10, 13]. Кроме того, особенности динамики локального осциллятора существенным образом определяют тип динамики всего ансамбля. Например, бистабильность парциальной системы [18] значительно усложняет перечисленные явления и приводит, в частности, к тому, что каждый кластер демонстрирует уникальный режим, в бассейн притяжения которого он попал.

Исследования перечисленных феноменов связанных нелинейных осцилляторов имеют огромное междисциплинарное значение. В частности, такие системы могут выступать в качестве простых математических моделей связанных элементов любой природы (генераторов переменного тока, нейронов, биологических популяций, групп населения и т. п.), и понимание механизмов синхронизации и рассинхронизации может помочь объяснить наблюдаемое сложное поведение реальных систем.

В данной работе изучаются перечисленные явления, которые возникают в модели пространственно-временной динамики миграционно-связанных популяций с возрастной структурой. Каждая одиночная популяция описывается двумерным нелинейным отображением, демонстрирующим переход к хаосу через каскад удвоения периода, а также по сценарию Неймарка–Саккера. Кроме того, данная двумерная математическая модель, рассмотренная во множестве работ, например в [9, 12], демонстрирует мультистабильность динамических режимов [4, 8]. Все это приводит к весьма интересной задаче анализа последствий влияния такого сложного поведения одиночного осциллятора на динамику всего ансамбля.

2. Сложные режимы модели динамики популяций с возрастной структурой

Для начала рассмотрим одиночный осциллятор — модель динамики популяции с возрастной структурой [9, 12]. Обозначим через $x_n^{(i)}$ и $y_n^{(i)}$ численность младшей неполовозрелой и старшей половозрелой возрастной группы в n -й сезон (дискретный момент времени) в i -м локальном участке (i -й осциллятор). Предположим, что на рост младшей возрастной группы оказывают влияние плотностно-зависимые факторы, то есть рост имеет ограниченный характер. Тогда один из вариантов модели динамики несвязанных популяций имеет вид

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(i)} = ay_n^{(i)} \exp(-\rho x_n^{(i)} - y_n^{(i)}), \\ y_{n+1}^{(i)} = sx_n^{(i)} + vy_n^{(i)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где параметры $a > 0$, $v > 0$ и $s > 0$ характеризуют рост единичной популяции: a — репродуктивный потенциал или максимальный коэффициент рождаемости, s и v — коэффициенты выживаемости младшей и старшей возрастной групп. Экспонента в первом уравнении — убывающая функция от x и y , которая обеспечивает плотностно-зависимую регуляцию рождаемости, где параметр ρ — относительная интенсивность участия младшего возрастного класса в этом процессе. Здесь надо отметить, что экспонента, соответствующая в некотором приближении квадратичному члену отображения Эно (при $\rho = 0$), позволяет избежать неограниченных траекторий, а также делает это отображение необратимым.

Модель (2.1) примечательна тем, что она имеет единственную нетривиальную (ненулевую) неподвижную точку, которая теряет устойчивость по двум сценариям: при $0 \leq \rho/s \leq 3/4$ только по сценарию Неймарка–Саккера, при $\rho/s \geq 1$ только по сценарию удвоения периода, при $3/4 < \rho/s < 1$ по обоим сценариям [9]. Но самое главное то, что в широком диапазоне параметров модель демонстрирует мультистабильность динамических режимов [4]. В частности, в зависимости от начальной точки формируются устойчивая динамика периода 1 (в области устойчивости) либо устойчивый цикл периода 3. Соответственно, два эти режима сложным образом делят фазовую плоскость своими бассейнами притяжения (рис. 1). Кроме того, обнаружено, что каждый из режимов демонстрирует последовательность бифуркационных переходов и формирование как минимум двух сосуществующих аттракторов. Например, в результате бифуркации Неймарка–Саккера вокруг неподвижной точки формируется инвариантная кривая Q^1 , а периодическая точка периода 3 остается устойчивой (рис. 1b). В результате удвоения периода появляются сосуществующие устойчивые циклы разных периодов, такие как 2- и 4-цикл (рис. 1f), 2- и 12-цикл (рис. 1c) и др. В некоторых случаях хаотический аттрактор сосуществует с устойчивой неподвижной (рис. 1d) или периодической точкой (рис. 1e). Стоит ожидать, что сложное поведение одиночного осциллятора приведет к тому, что режимы синхронизации нескольких связанных популяций будут настолько же сложными.

3. Синхронизация в ансамбле двухвозрастных популяций

В настоящей работе мы рассматривали N нелокально связанных между собой двухвозрастных популяций. Связь реализована через вторую переменную модели (2.1), что соответствует миграции особей лишь старшего возрастного класса на P удаленных локальных

Рис. 1. Бассейны притяжения режимов системы (2.1) при $s = 0.5$: (a, b) $\rho = 0.25$, (c, d) $\rho = 0.5$, (e, f) $\rho = 0.505$.

участков в любом направлении ($P < N/2$). В результате система (2.1) принимает вид

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(i)} = ay_n^{(i)} \exp(-\rho x_n^{(i)} - y_n^{(i)}), \\ y_{n+1}^{(i)} = sx_n^{(i)} + vy_n^{(i)} + \frac{mv}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y_n^{(j)} - y_n^{(i)}), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где m — коэффициент миграции или сила связи, P — максимальное расстояние, на которое особи способны эмигрировать за один сезон, или радиус связи [6]. В данном случае рассматривается простейший случай, когда форма ареала популяции — это кольцо. Форма ареала в системе (3.1) задается порядком суммирования и, вообще, может быть легко модифицирована. Для кольца при численных расчетах нулевые, отрицательные или большие, чем N , индексы j принимаются равным индексам следующих на кольце элементов (слева или справа от j), что легко формализуется как периодический $j \bmod N$. Величины $\frac{mv}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} y_n^{(i)} = mvy_n^{(i)}$ и $\frac{mv}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} y_n^{(j)}$ в системе (3.1) — это число эмигрантов и иммигрантов соответственно.

В дальнейшем будем пользоваться следующими понятиями.

Состояние системы $x_n^{(i)}$ ($y_n^{(i)}$) для некоторых $1 \leq i \leq N$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ называется синхронным (когерентным), если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i, j \in U_r(k)} |x_n^{(i)} - x_n^{(j)}| \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

где $U_r(k) = \{j: 0 \leq j \leq N, |j - k| < r \leq N\}$ — окрестность радиуса r элемента с номером k на кольце [14].

Соответственно, если соотношение (3.2) выполняется для всех элементов, то есть окрестность U любого элемента содержит все кольцо, то будем говорить о полной синхронизации. Если же этот предел существует лишь для части связанных элементов, то есть можно выделить более одной непересекающейся окрестности синхронных между собой элементов, и их объединение — это все кольцо, то будем говорить о кластерной синхронизации или, для простоты, о кластеризации.

Если среди всех элементов можно выделить один или более элементов, для которых предел (3.2) не выполняется, и их окрестность содержит только их самих, то будем говорить о химерном состоянии, или химерах. И наконец, если невозможно найти два или более соседних осциллятора, синхронных друг другу, то мы говорим о некогерентном состоянии.

При изучении системы связанных отображений главный вопрос, который привлекает особое внимание, заключается в следующем: каковы условия (значения управляющих параметров и начальные значения $x_0^{(i)}$ и $y_0^{(i)}$), при которых формируются режимы полной или кластерной синхронизации, или режимы типа химерных состояний, или полностью некогерентные режимы? В биологической трактовке перечисленные режимы динамики соответствуют различным сценариям самоорганизации особей по ареалу, когда особи равномерно распределены по всей территории либо когда можно выделить смежные группировки особей или кластеры со схожим характером динамики (в этом случае каждый кластер будет неотличим от локальной популяции).

Традиционно исследование феноменов синхронизации заключается в следующем. Фиксируются значения параметров, соответствующие колебательному или хаотическому режиму. Начальные условия $x_0^{(i)}$ и $y_0^{(i)}$ в этом случае обычно либо случайные, либо выбираются в специальном виде, который соответствует определенной структуре кластеров. Далее ищутся значения параметров связи, при которых через серию переходных процессов формируется один из перечисленных режимов синхронизации.

Рассмотрим особенности синхронизации системы в системе (3.1) при различных начальных условиях и значениях управляющих параметров.

4. Синхронизация при специальных начальных условиях

Ранее был исследован случай системы (3.1) при $N = 2$ и $P = 1$ [4]. Было показано, что система (3.1) демонстрирует мультистабильность двух типов. Первая связана с синхронизацией колебаний парциальных систем друг с другом, соответствующей фазовой мультистабильности. Второй тип связан с упомянутой мультистабильностью парциальной системы (2.1). Было показано, что связь между единичными системами приводит к комбинации двух этих типов мультистабильности. Во-первых, режимы могут быть синхронными или несинхронными, а во-вторых, синхронизация может быть частичной (с захватом частоты и фазы, но с разными амплитудами). В связи с этим следует ожидать наследования таких режимов в системах большой размерности.

В настоящей работе изучаются режимы динамики, которые возникают в модели (3.1) при $N = 100$ и нелокальном характере связи ($P > 1$).

Для начала зафиксируем параметры одиночного осциллятора значениями $a = 34$, $s = 0.5$, $v = 0.05$, $\rho = 0.25$, при которых система (2.1) демонстрирует простейшую мультистабильность динамических режимов — сосуществование 3-цикла и устойчивой неподвижной

точки. Будем рассматривать специальные начальные условия в следующем виде:

$$\begin{cases} x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \dots = x_0^{(100)} = 0, \\ Z = y_0^{(1)} = y_0^{(2)} = \dots = y_0^{(25)} = y_0^{(76)} = y_0^{(77)} = \dots = y_0^{(100)}, \\ W = y_0^{(26)} = y_0^{(27)} = \dots = y_0^{(75)} \quad (0 \leq Z < W), \end{cases} \quad (4.1)$$

что соответствует профилю пространственного распределения в виде меандра с максимумом W и минимумом Z . Данная стартовая точка соответствует биологической задаче о расселении по территории лишь старших особей.

Надо заметить, что использование стартовой точки вида (4.1) вполне оправданно. Во-первых, она достаточно проста для исследования, сразу задает определенный тип когерентной динамики (два равных кластера). Во-вторых, любое отклонение от данного вида кластеров, при вариации параметров связи и величин Z и W , легко диагностировать статистическими методами. Другими словами, в работе исследуется устойчивость именно такого вида кластеров.

Воспользовавшись методикой, предложенной в [5], будем варьировать Z и W , оценивая близость режима системы (3.1) через серию итераций и начального режима, задаваемого в виде (4.1). В результате можно выделить области существования режимов пространственно-временной динамики (рис. 2), которые можно условно назвать бассейнами притяжения различных режимов синхронизации системы (3.1); примеры при разной силе связи m показаны на рисунке 3. Дополнительно для идентификации этих областей вычислялся период колебания каждого осциллятора, определялось число формируемых кластеров, а также оценивалась степень синхронности элементов в каждом из них.

Рис. 2. Бассейны притяжения режимов системы (3.1) при начальных условиях (4.1) и $N = 100$, $P = 10$, $s = 0.5$: (а-с) $a = 34$, $v = 0.05$, $\rho = 0.25$, (d-f) $a = 140$, $v = 0.15$, $\rho = 0.5$.

На рисунке 2а четко выделяются области полной синхронизации — это черные и темно-красные^а области. Из-за мультистабильности одиночного осциллятора динамика всех элементов может быть как колебательной с периодом 3, так стационарной без колебаний. Эти режимы обозначены как 1_0 и 3_0 (рис. 3) и, вообще говоря, не отличаются от режимов одиночного осциллятора. Также выделяются области значений Z и W , приводящие к кластерной синхронизации с простой динамикой, когда оба кластера колеблются с периодом 3 (этот режим обозначен цифрой 3), либо колебания будут только в одном, а во втором колебания практически отсутствуют и динамика близка к стационарной (этот режим обозначен как $3/1$ или $1/3$); в каком именно кластере будут колебания, а в каком не будет колебаний, однозначно определяется выбором Z и W .

Оказалось, что границы между разными режимами пространственно-временной динамики не выглядят как четкие области. Однако каждой точки на рисунке 2 одного цвета соответствует только один режим, без исключений (быть может, кроме режимов типа $3/1$ и $1/3$, которые отличаются лишь расположением на кольце кластеров с колебаниями и без колебаний, для разных начальных условий из разных областей одного цвета они лишь меняются местами). Области притяжения таких режимов симметричны относительно прямой $Z = W$.

Среди других областей на рисунке 2 можно выделить значения Z и W , при которых формируются кластеры сложных конфигураций. Например, несмотря на то, что начальные условия жестко зафиксированы в виде (4.1), что предполагает формирование двух равных кластеров, возникают неравные кластеры или их число оказывается больше двух. При изменении значений Z и W происходит переход между этими типами динамики. Например, при отдалении от биссектрисы $Z = W$ происходит «резкий» переход от полной синхронизации 1_0 или 3_0 к режимам 3, $3/1$ или $1/3$, а далее — к более сложным режимам. В последнем случае переход более «плавный»: проходит постепенное раздробление кластеров одиночными некогерентными элементами на их границах или в их центре, через образование фазовых или амплитудных химер. Такие режимы обозначены с помощью знака * в верхнем индексе. В дальнейшем с изменением Z и W на основе химер формируются новые кластеры, состоящие не менее чем из двух элементов. Соответственно, на рисунках 2 и 3 нижний индекс показывает число формируемых кластеров (если их число больше 2), или индекс опущен (если количество кластеров подсчитать сложно).

Профили на рисунке 3 и последующих показывают динамику каждого из 100 связанных элементов, где на оси абсцисс отмечен номер осциллятора $i = 1, 2, \dots, 100$, а на оси ординат — значения переменной y за достаточно большой период времени после переходных процессов. В данном случае на профилях $n = 9950 \dots 10000$ (этого времени достаточно, чтобы 100 раз обойти кольцо из 100 элементов). Штриховая линия зеленого цвета указывает на начальные условия, которые приводят к данному режиму. Вообще, представление пространственно-временной динамики с помощью профилей, а не графиков моментальных состояний (так называемых снэпшотов), как принято в большинстве исследований, в данном случае связано со сложным характером динамики и необходимостью изобразить динамику полностью. Например, профиль режима 3 выглядит как три линии, одна из которых практически параллельна оси абсцисс; для более сложных режимов, например, обозначенного цифрой 12, таких линий несколько, и некоторые из них могут даже не пересекаться. В результате вид графиков моментальных состояний для разных моментов времени существенно отличается, и по виду отдельных из них сложно судить о характере динамики в целом, в частности, о количестве кластеров или о химерах.

^аДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1801002/>

Рис. 3. Профили пространственно-временной динамики системы (3.1) в начальных условиях (4.1) при $N = 100$, $P = 10$, $s = 0.5$: (а) $a = 34$, $v = 0.05$, $\rho = 0.25$ и (б) $a = 140$, $v = 0.15$, $\rho = 0.5$.

При изменении параметров связи области притяжения значительно трансформируются (рис. 2b и c), а диапазон значений Z и W , приводящих к простой когерентной динамике с двумя кластерами, значительно сужается. То же происходит с областями полностью синхронных режимов, и вместо простых режимов возникает множество переходных состояний или химер. Например, интересен режим 1^* , показанный на рисунке 3а, когда на фоне близкой к стационарной динамики всех осцилляторов выделяются несколько элементов, совершающих регулярные колебания. Число таких элементов в кольце из 100 осцилляторов

варьируется от 1 до 10, и в данном случае показаны два некогерентных элемента. С ростом силы связи m этот режим немного усложняется (появляется режим 1^{**}) и такие элементы появляются на фоне слабых флуктуаций или, как будет показано далее, такие элементы появляются на фоне пространственно-временного хаоса.

При очень большой силе связи бассейны искомых простых кластеров, как и синхронных режимов, имеют совсем небольшие размеры, существенно меньшие, чем в прошлом случае. Переходные режимы и химеры в этом случае занимают большую часть фазовой плоскости (рис. 2с).

Проследим эволюцию режимов синхронизации системы (3.1) при изменении параметров связи m и P (рис. 4) и при параметрах локального осциллятора, соответствующих сосуществованию устойчивой неподвижной точки и устойчивого 3-цикла. Для этого зафиксируем начальные условия в виде меандра (4.1), выбрав значения Z и W из некоторых бассейнов на рисунке 2.

В результате обнаружено, что параметрам из желтой области на рисунке 4а соответствует простая когерентная динамика с двумя равными кластерами выбранной конфигурации, а в темной области отмечен следующий переход. Непосредственно на границе между этими областями появляются одиночные несинхронные элементы, соответствующие фазовым химерам (рис. 4б и 4с). С ростом силы связи число некогерентных элементов увеличивается от 1 до 12 с каждой из сторон кластера. Либо, при большом радиусе связи, возможна ситуация, когда эти несинхронные элементы синхронизируются между собой и образует-

Рис. 4. Карты динамических режимов и некоторые профили пространственно-временной динамики системы (3.1) при $N = 100$, $a = 140$, $s = 0.5$, $v = 0.15$, $\rho = 0.5$: (а) $Z = 6$, $W = 1$, (f) $Z = 4.7$, $W = 1$.

ся два новые кластера, включающие в себя от 2 до 12 элементов. На рисунке 4d показан профиль, когда новый кластер состоит из 5 элементов.

Для других значений Z и W диаграмма имеет более сложный вид. На рисунке 4f выделенная жирной синей линией область соответствует параметрам, при которых все элементы испытывают колебания с периодом 3, а параметрам из черной области соответствует режим, когда все элементы в одном из кластеров вообще не испытывают колебаний (режим 3/1). Между этими областями расположена большая область разнообразных переходных режимов (например, 3/1*), в том числе и химер.

На рисунке 4f с помощью красных и синих линий отмечен переход, когда кластер обрывает одним (несинхронным), двумя (уже синхронными между собой), тремя (синхронными) и т. д. элементами и образуется новый кластер, состоящий максимум из 12 элементов. Число таких элементов обозначено буквой s . Происходит это и для простой когерентной динамики, обозначенной как 3, и для более сложной, обозначенной как 3/1*, когда элементы в одном кластере почти не испытывают колебаний. Для режима 3/1* обнаружен следующий феномен. После некоторого значения силы связи m новые небольшие кластеры начинают сами обрывать одиночными некогерентными элементами, то есть повторно образуются химеры. На диаграмме это критическое значение показано пунктирной зеленой линией. И профили на рисунках 4i и 4j демонстрируют этот переход, когда между большим и малым кластером появляется одиночный некогерентный элемент. С ростом силы связи число таких несинхронных элементов между большим и малым кластерами растет, и впоследствии они уже никогда не будут синхронными. В результате при большой силе связи формируется сложная «смешанная» динамика, которая состоит в том, что часть элементов (из старого большого кластера) синхронны между собой, а другая часть (полученная на месте малого кластера) абсолютно некогерентны между собой (рис. 4g). Область существования такого режима на рисунке 4f показана красным цветом.

Рассмотрим теперь параметры, при которых локальный осциллятор демонстрирует более сложное поведение: $a = 140$, $s = 0.5$, $v = 0.15$, $\rho = 0.5$. Эти параметры соответствуют сосуществованию устойчивых 2- и 12-циклов, являющихся результатом удвоения периода (соответственно, неподвижной точки и 3-цикла) (рис. 1c). Бассейны притяжения системы (3.1) в этом случае значительно отличаются от предыдущего случая и представлены на рисунке 2d–e, а примеры профилей показаны на рисунке 3b.

Здесь связь между мультистабильными идентичными осцилляторами значительно усложняет тип динамики, и связанные элементы демонстрируют преимущественно циклы конечных длин, такие как 2-, 6-, 12-, 24-цикл и т. д. В этом случае колебания в разных кластерах зачастую имеют различные периоды. В первом примере на рисунке 3b (режим 2/12) первый кластер испытывает небольшие колебания с периодом 2, а в другом наблюдаются 12-цикл с большим размахом. Также интересен режим, когда 12-цикл в одном кластере соседствует с режимом полной хаотической синхронизации в другом кластере (на рис. 3b он обозначен как 12/ C_0), или кластер с 12-циклом выделяется на фоне пространственно-временного хаоса (12/ C и 12*/ C). Кроме того, сам кластер с 12-циклом представлен разнообразными формами: например, его профиль имеет форму простой пространственной волны либо это волна имеет множество прогибов вниз или вверх в кластере или даже самопересечений, что очень похоже на амплитудные химеры [1, 11]. В этом случае также обнаружено множество фазовых химер (например, режим 12*/ C , 2/6/12*), что является очень примечательным для настолько простых начальных условий вида (4.1). Появление такого разнообразия динамических режимов, скорее всего, указывает на резонансные явления в системе (3.1).

Кроме того, обнаружен режим, обозначенный как C^{***} , примечательный тем, что среди абсолютно некогерентных и хаотических элементов (пространственно-временной хаос) появляется небольшое число элементов (обычно 2) с много большей амплитудой, испытывающих колебания конечного периода (обычно 3- или 12-цикл). Причем в центре области его притяжения такой элемент лишь один, а по мере удаления от центра число таких элементов растет до 12 на каждом из пиков профилей. В результате они сливаются в один кластер с когерентной динамикой, и формируется режим типа $12^*/C$ или $12/C$. Расположение этих элементов, как правило, определяется формой меандра (4.1), и, как будет показано ниже, для случайных начальных условий такие элементы появляются в произвольном месте кольца.

Полная синхронизация в этом случае возможна лишь при малой связи, а область значений Z и W , при которых синхронизация достигается, оказалась перемешана с режимом синхронизации с двумя равными кластерами (рис. 2d). С ростом силы связи в этой области формируется лишь пространственно-временной хаос даже для абсолютно равных начальных условий, например, как показано на последнем профиле рисунка 3b, где $y_0^{(i)} = Z = W$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Устройство пространства управляющих параметров, показанное на рисунке 5, в этом случае немного проще, чем в предыдущем, что, возможно, связано с выбором значений Z и W . Для первого набора начальных значений (рис. 5a) наблюдается преимуще-

Рис. 5. Карты динамических режимов и некоторые профили пространственно-временной динамики системы (3.1) при $N = 100$, $a = 140$, $s = 0.5$, $v = 0.15$, $\rho = 0.5$: (a) $Z = 11$, $W = 2$, (b) $Z = 20$, $W = 9$.

ственно когерентная динамика с двумя кластерами и колебаниями всех осцилляторов с периодами 3, 6, 12, а также режим, когда внутри каждого кластера динамика близка к хаотической синхронизации (рис. 5d). Для второго набора начальных условий четко выделяется область полной и частичной синхронизации (рис. 5f). Кроме того, в обоих случаях выделяется довольно узкая область некогерентной динамики, но с циклами конечных длин (таких, как 2, 3, 6 и др.). В дополнение к картам на рисунке приведены примеры таких режимов.

Таким образом, неслучайные начальные условия, заданные в виде меандра, не всегда гарантируют когерентную динамику. Формируются сложные режимы, характерные для большинства систем нелокально связанных отображений (простые кластеры с колебаниями одного периода, фазовые химеры), которые, по нашему мнению, связаны лишь с фазовой мультистабильностью. Кроме того, обнаружены режимы, связанные с мультистабильностью парциальной системы (колебания в разных кластерах с разными периодами). Неожиданно оказалось, что абсолютно идентичные начальные условия $Z = W$ не всегда гарантируют полной синхронизации. Возникает вопрос, насколько найденные феномены и закономерности универсальны, а режимы устойчивы, и формируются ли они при произвольных начальных условиях. Поэтому рассмотрим систему (3.1) при случайном характере начальных условий.

5. Синхронизация при случайных начальных условиях

Рассмотрим значения параметров $a = 138$, $s = 0.5$, $v = 0.25$, $\rho = 0.505$, при которых хаотическая динамика в системе (2.1) сосуществует с 2-циклом. Как и в прошлом случае, первую переменную модели примем равной нулю для всех осцилляторов, а вторую будем получать с помощью генератора псевдослучайных чисел, то есть положим

$$x_0^{(i)} = 0, \quad y_0^{(i)} \sim U[y_{\min}, y_{\max}] \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5.1)$$

где $y_{\max}$ и $y_{\min}$ — минимальное (коэффициент сдвига) и максимальное значения равномерно распределенной случайной величины ($y_{\max} - y_{\min}$ — коэффициент масштаба).

Исследование этого случая показало, что здесь возникает проблема выбора параметров распределения случайной величины, а именно: при одном наборе параметров $y_{\min}$ и $y_{\max}$ формируется когерентная динамика (полная или кластерная синхронизация), а также химеры, а при другом формируются лишь абсолютно некогерентные режимы. На рисунке 6 приведены примеры профилей пространственно-временной динамики системы (3.1) при одинаковых параметрах связи, но разных коэффициентах сдвига и масштаба.

Анализ разных случайных условий (значений $y_{\max}$ и $y_{\min}$) позволяет заключить, что тип пространственной динамики существенно определяется коэффициентом масштаба или размахом случайной величины y . При большом размахе и любых параметрах связи формируются лишь некогерентные режимы, близкие к пространственно-временному хаосу. Когерентные режимы формируются, как правило, при небольшом размахе случайной величины. Как оказалось, качественно вид профилей на рисунке 6, как правило, сохраняется от одного розыгрыша N случайных величин $y_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) до другого, а меняется лишь расположение кластеров на кольце (в случае кластеризации) или числа несинхронных элементов (в случае химерных состояний). Причем два эти режима определенным образом сосуществуют. Это означает, что при определенных значениях параметров связи различные начальные условия с одинаковыми параметрами распределения приводят либо к когерентным режимам (полная или кластерная синхронизация), либо к простым фазовым

Рис. 6. Профили пространственно-временной динамики системы (3.1) в случайных начальных условиях (5.1) (указаны над профилем) при $N = 100$: (a) $P = 40$, $m = 0.85$, (b) $P = 35$, $m = 0.95$, (c) $P = 35$, $m = 0.9$, (d) $P = 40$, $m = 0.76$, (e) $P = 23$, $m = 0.54$.

химерам, и вероятность первого и второго события сложным образом определяется управляющими параметрами. В случае более сложных режимов, типа C^* , C^{**} , C^{***} или 12^{***} , вид профилей, как правило, также сохраняется для разных начальных условий (генераций случайных величин $y_0^{(i)}$). Как мы считаем, такое поведение связано именно с механизмами синхронизации в системе (3.1), а не с особенностями работы генератора случайных чисел, то есть для данных параметров модели устойчив именно такой режим пространственно-временной динамики. Чтобы исключить возможную повторяемость результатов, связанную с некачественным генератором, в работе использовался хорошо зарекомендовавший себя в криптографии генератор случайных чисел на основе счетчиков [16], который позволяет получить почти независимые друг от друга равномерно распределенные случайные числа с периодом более 2^{128} .

Кроме того, когерентные режимы формируются и при больших значениях коэффициента сдвига $y_{\min}$ (примерно более 5.8) и большом размахе случайной величины ($y_{\max} \approx 20$).

Численно найдено три диапазона случайных начальных условий, при которых формируются когерентные режимы: $y_0^{(i)} \sim U[0.5, 2]$, $y_0^{(i)} \sim U[2.5, 3.6]$ и $y_0^{(i)} \sim U[5.8, 20]$ ($i = 1, 2, \dots, N$); вне этих интервалов формируются абсолютно некогерентные режимы при любых параметрах связи. Стоит отметить, что из-за особенностей фазового пространства подобных систем с нелинейностью в виде экспоненты стоит ожидать некоторого «повторения» этих интервалов для больших значений $y_{\min}$ и $y_{\max}$. Поэтому для детального изучения обнаруженных закономерностей ограничимся небольшими значениями коэффициента сдвига и масштаба. Будем варьировать параметры случайной величины $y_0^{(i)}$ и анализировать режимы, которые преимущественно (в большинстве случаев) появлялись.

На рисунке 7 представлен результат анализа различных начальных условий (указаны над диаграммами) и формируемых режимов пространственно-временной динамики системы (3.1). На этих картах отмечен минимальный период колебаний среди всех осцилляторов. Это области со сплошной заливкой, где цифра — это период колебаний, C — хаотическая динамика.

Для случайных начальных условий из первой группы на рисунке 7а не обнаружено ни одного когерентного режима для любых параметров связи. Для начальных условий из второй группы обнаружены области когерентных режимов, выделенные штриховкой (рис. 7б). Надо отметить, что на этих диаграммах не отображен факт того, что несвязанные осцилляторы ($P = 0$) из-за мультистабильности системы (2.1) испытывают некогерентные

Рис. 7. Карты динамических режимов системы (3.1) при различных начальных условиях (указаны над каждой диаграммой): (а) возможны только некогерентные режимы, (б) возможны когерентные режимы и химеры в заштрихованной области.

хаотические колебания или колебания с периодом 2 в зависимости от начальных условий. В этом случае когерентные режимы могут быть получены лишь при специальных начальных условиях вида (4.1). Если $P > 0$, то они сменяются режимами, указанными на диаграммах (3-, 6-, 12-цикл или хаос). С ростом параметров связи колебания осцилляторов могут синхронизироваться и будут образовываться кластеры или химеры.

Рассмотрим пространство управляющих параметров для набора начальных условий вида $y_0^{(i)} \sim U[1, 1.5]$, для которых область когерентных режимов имеет максимальный размер. Детализированная карта в этом случае имеет вид, представленный в центре рисунка 8. На карте отмечен переход от полной синхронизации ($k = 1$ — число кластеров) к когерентной динамике с 2 ($k = 2$), 4 ($k = 4$), 6 ($k = 6$) и т. д. кластерами (заштрихованные области) и далее до некогерентных режимов ($k \sim N$). Также на рисунке 8 показаны примеры пространственно-временной динамики для разных параметров связи, а крестиками выделено расположение параметров на этой диаграмме.

Рис. 8. Карта динамических режимов (в центре) и профили пространственно-временной динамики системы (3.12), случайных начальных условиях (5.1) и $y_0^{(i)} \sim U[1, 1.5]$. Значение величины k указывает на число формируемых кластеров.

Как можно видеть из этих диаграмм и профилей, во всех случаях происходит синхронизация «во времени», которая выражается, как минимум, в том, что при высокой силе связи динамика каждого осциллятора от хаотической переходит к регулярной (циклам конечной длины). Как максимум, происходит синхронизация «по пространству», то есть наступает полная или кластерная синхронизация или формируются химеры (так называемая смешанная динамика). Например, выделенные на рисунке 8 в прямоугольнике профили демонстрируют тот факт, что в области когерентной (смешанной) динамики при одних и тех же параметрах связи от одного набора начальных условий к другим формируются либо четкие кластеры, либо кластеры, окруженные несинхронными элементами, то есть фазовые химеры. Это режимы 6 и 6*, 12 и 12*. Также интересен режим C^* с двумя кластерами ($k = 2$), когда среди абсолютно синхронных между собой элементов, динамика которых близка к хаотической (период колебаний больше 256), появляется одиночный несинхронный элемент. Другие примеры похожих режимов показаны на рисунке 6. В отличие от фазовых химер (например, режим C^* с шестью кластерами на рисунке 8, где $k = 6$), для которых несинхронные элементы окружают такой элемент и их амплитуда близка к амплитуде элементов в кластере, этот некогерентный элемент имеет много большую амплитуду. Но он не является и амплитудной химерой, так как такие элементы не образуют кластера. По нашему мнению, появление некогерентных элементов связано с мультистабильностью одиночного осциллятора, на что указывает значительное различие в амплитудах и, зачастую, в характере колебаний одиночного осциллятора — его колебания более регулярны по сравнению с кластером. Данный тезис подтверждается тем, что аналогичный режим отмечен и для специальных начальных условий, которые более симметричны. К сожалению, для случайных начальных условий не удалось обнаружить режимов, когда разные кластеры демонстрируют различный характер колебаний, характерный для специальных начальных условий. Возможно, это связано лишь с малыми значениями коэффициента сдвига и масштаба, использованными в этом случае, или такие режимы в принципе не устойчивы.

Вообще надо заметить, что в области параметров, при которых одиночный осциллятор демонстрирует лишь циклы конечной длины, и случайных начальных условиях наблюдаются аналогичные закономерности и феномены динамики. В частности, кластерная синхронизация и химеры, а также резонансные явления, когда связь приводит к росту периода колебаний. Поэтому в работе представлен лишь случай хаотической динамики парциальной системы.

Описанная в работе структура пространства управляющих параметров отмечена и для ряда других нелокально связанных нелинейных осцилляторов (логистическое отображение или отображение Эно). Однако рассматриваемая модель связанных двухвозрастных популяций обладает рядом особенностей. Во-первых, области нехаотических режимов расположены горизонтально, а для связанных логистических отображений или отображения Эно эти области вертикально погружены в область некогерентных режимов. Во-вторых, области с 2, 3, 4, и т. д. кластерами смежны друг другу и не разделены некогерентными режимами (быть может, разделены лишь химерами). И наконец, для рассматриваемой системы (3.1) когерентные режимы почти всегда перемешаны с химерами (возможно, кроме случая очень сильной связи). Кроме того, для специальных неслучайных начальных условий (4.1) устройство пространства управляющих параметров системы (3.1) значительно сложнее, чем для случайных, и сильно зависит от фиксируемой структуры кластеров и значений Z и W , в отличие, скажем, от связанных логистических отображений. Данный факт, несомненно, требует дальнейших исследований.

6. Заключение

На примере модели динамики связанных двухвозрастных популяций был обнаружен новый механизм кластерной синхронизации, определяемый мультистабильностью локального осциллятора. В данном случае в отсутствие связи каждый элемент может колебаться с разным периодом, в зависимости от начальной численности. В результате связи между идентичными популяциями (осцилляторами) каждый кластер может испытывать колебания с разным характером. В простейшем случае это колебания с периодом 3 в одном кластере и отсутствие колебаний в другом. В результате бифуркаций каждого из этих режимов колебания в разных кластерах могут существенно отличаться. Например, один кластер — это группа синхронных осцилляторов, испытывающих устойчивые колебания (циклы конечного периода), а другой — это кластер с хаотическими элементами (это может быть полная или частичная хаотическая синхронизация или даже режим пространственно-временного хаоса в пределах кластера). Надо отметить, что подобное поведение систем связанных нелинейных осцилляторов описано для ряда бистабильных систем: например, для кольца идентичных моделей Фицхью–Нагумо [18], в которой бистабильные режимы (одно стационарное состояние положительно, а другое отрицательно) лежат в довольно простых по форме бассейнах притяжения. В рамках данной работы рассматривается модель, которая демонстрирует несколько сосуществующих режимов (все с положительными координатами), бассейны притяжения которых причудливым образом делят фазовое пространство.

Обнаружено, что неслучайные специальные начальные условия, даже в докритических областях, приводят не только к когерентным, но к сложным режимам со смешанной динамикой и химерами, особенно при сильной связи. Обнаружен вид химер, когда на фоне устойчивой динамики или слабых флуктуаций либо пространственно-временного хаоса выделяются несколько одиночных несинхронных элементов. Как правило, амплитуда их колебаний много больше, чем у других осцилляторов, что указывает на их происхождение, связанное с мультистабильностью одиночного осциллятора.

Наряду со специальными, рассмотрены случайные начальные условия. Обнаружено, что формируемый тип пространственно-временной динамики существенно определяется параметрами распределения случайной величины. При одних наборах значений не возникает когерентных режимов вообще, при других возникает как полная, так и кластерная синхронизация, а также химеры. Неожиданно оказалось, что данная модель неспособна в принципе демонстрировать полностью когерентные режимы (кроме, быть может, полной синхронизации), и в области смешанной динамики от одного розыгрыша случайных величин к другому формируются либо простые кластеры, либо химерные состояния. Также оказалось, что для специальных начальных условий кластерная синхронизация наступает уже при слабой связи, в отличие от случайных условий, для которых она возможно лишь при сильной связи.

References

- [1] Bogomolov S. A., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators, *Tech. Phys. Lett.*, 2016, vol. 42, no. 7, pp. 765–768; see also: *Pis'ma Zh. Tekh. Fiz.*, 2016, vol. 42, no. 14, pp. 103–110.
- [2] Kuznetsov S. P. Universality and scaling in behavior of coupled Feigenbaum systems, *Radiophys. Quantum El.*, 1985, vol. 28, no. 8, pp. 681–695; see also: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika*, 1985, vol. 27, no. 8, pp. 991–1007.

- [3] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P. Critical dynamics of coupled map lattices at the onset of chaos, *Radiophys. Quantum El.*, 1991, vol. 34, nos. 10–12, pp. 845–868; see also: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika*, 1991, vol. 34, nos. 10–12, pp. 1079–1115.
- [4] Kulakov M. P., Neverova G. P., Frisman E. Ya. Multistability in dynamic models of migration coupled populations with an age structure, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 407–425 (Russian).
- [5] Kulakov M. P., Frisman E. Ya. Attraction basins of clusters in coupled map lattices, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 51–76 (Russian).
- [6] Kulakov M. P., Frisman E. Ya. Clustering and chimera in the spatial-temporal dynamics of populations with age structure in the ring habitat, *Regional'nye problemy*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 5–11 (Russian).
- [7] Semenova N. I., Anishchenko V. S. Coherence-incoherence transition with appearance of chimera states in a one-dimensional ensemble, *Nelin. Dinam.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 295–309 (Russian).
- [8] Frisman E. Ya., Neverova G. P., Kulakov M. P., Zhigalskii O. A. Multimode phenomenon in the population dynamics of animals with short live cycles, *Dokl. Biol. Sci.*, 2015, vol. 460, no. 1, pp. 42–47; see also: *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 460, no. 4, pp. 488–493.
- [9] Frisman E. Ya., Neverova G. P., Revutskaya O. L., Kulakov M. P. Dynamic modes of two-age population model, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinam.*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 111–130 (Russian).
- [10] Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 17, 174102, 4 pp.
- [11] Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2016, vol. 43, pp. 25–36.
- [12] Frisman E. Ya., Neverova G. P., Revutskaya O. L. Complex dynamics of the population with a simple age structure, *Ecol. Model.*, 2011, vol. 222, no. 12, pp. 1943–1950.
- [13] Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators, *Nonl. Phen. Compl. Sys.*, 2002, vol. 5, no. 4, pp. 380–385.
- [14] Omelchenko I., Maistrenko Yu., Hövel Ph., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, no. 23, 234102, 4 pp.
- [15] Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel Ph., Schöll E. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 2, 026212, 9 pp.
- [16] Salmon J. K., Moraes M. A., Dror R. O., Shaw D. E. Parallel random numbers: as easy as 1, 2, 3, in *Proc. of 2011 Internat. Conf. for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (Seattle, Wash., Nov 2011)*, Art. No. 16, 12 pp.
- [17] Semenova N. I., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. «Coherence–incoherence» transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 148–162.
- [18] Shepelev I. A., Vadivasova T. E., Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction, *Phys. Lett. A*, 2017, vol. 381, no. 16, pp. 1398–1404.
- [19] Tsigkri-DeSmedt N. D., Hizanidis J., Hövel P., Provata A. Multi-chimera states and transitions in the Leaky Integrate-and-Fire model with nonlocal and hierarchical connectivity, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2016, vol. 225, nos. 6–7, pp. 1149–1164.
- [20] Viana R. L., Batista A. M., Batista C. A. S., Iarosz K. C. Lyapunov spectrum of chaotic maps with a long-range coupling mediated by a diffusing substance, *Nonlinear Dynam.*, 2017, vol. 87, no. 3, pp. 1589–1601.
- [21] Zhang Y.-Q., Wang X.-Y. Spatiotemporal chaos in mixed linear–nonlinear coupled logistic map lattice, *Phys. A*, 2014, vol. 402, pp. 104–118.

Clustering and chimeras in the model of the spatial-temporal dynamics of age-structured populations

Matvey P. Kulakov¹, Efim Ya. Frisman²

^{1,2}Institute for Complex Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of RAS
ul. Sholom-Aleikhema 4, Birobidzhan, 679016, Russia

¹k_matvey@mail.ru, ²frisman@mail.ru

The article is devoted to the model of spatial-temporal dynamics of age-structured populations coupled by migration. The dynamics of a single population is described by a two-dimensional nonlinear map demonstrating multistability, and a coupling is a nonlocal migration of individuals. An analysis is made of the problem of synchronization (complete, cluster and chaotic), chimera states formation and transitions between different types of dynamics. The problem of dependence of the space-time regimes on the initial states is discussed in detail. Two types of initial conditions are considered: random and nonrandom (special, as defined ratios) and two cases of single oscillator dynamics — regular and irregular fluctuations. A new cluster synchronization mechanism is found which is caused by the multistability of the local oscillator (population), when different clusters differ fundamentally in the type of their dynamics. It is found that nonrandom initial conditions, even for subcritical parameters, lead to complex regimes including various chimeras. A description is given of the space-time regime when there are several single nonsynchronous elements with large amplitude in a cluster with regular or chaotic dynamics. It is found that the type of spatial-temporal dynamics depends considerably on the distribution parameters of random initial conditions. For a large scale factor and any coupling parameters, there are no coherent regimes at all, and coherent states are possible only for a small scale factor.

MSC 2010: 37N25, 90B10, 34D06

Keywords: population, multistability, coupled map lattice, synchronization, clustering, chimera, basin of attraction

Received September 06, 2017, accepted October 11, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 13–31 (Russian)