Алгебраическая редукция систем на двумерной и трехмерной сферах

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, С. М. Рамоданов

Получено 03 декабря 2008 г.

В работе развивается алгебраический метод редукции систем на сферах, допускающих группу симметрий $SO(4)$. Построены канонические переменные для приведенной системы на двумерной и трехмерной сфере. В качестве примеров разобрана задача двух тел на сфере, потенциал взаимодействия которых зависит от взаимного расстояния и задача трех вихрей на двумерной сфере.

Ключевые слова: Пуассонова структура, алгебра Ли, подалгебра, переменные Андуайе

A. V. Borisov, I. S. Mamaev, S. M. Ramodanov

Algebraic reduction of systems on two- and threedimensional spheres

The paper develops further the algebraic-reduction method for $SO(4)$ -symmetric systems on the three-dimensional sphere. Canonical variables for the reduced system are constructed both on two-dimensional and three-dimensional spheres. The method is illustrated by applying it to the two-body problem on a sphere (the bodies are assumed to interact with a potential that depends only on the geodesic distance between them) and the three-vortex problem on a two-dimensional sphere.

Keywords: Poisson structure, Lie algebra, subalgebra, Andoyer variables

Mathematical Subject Classifications: 70Hxx, 70G65

1. Введение

В этой статье развивается новый подход к редукции (понижению порядка) гамильтоновых систем с помощью интегралов движения, предложенный ранее в работах [5, 10], на примере систем на двумерной и трехмерной сферах.

Подробно разобраны две задачи: задача двух тел на трехмерной сфере с потенциалом взаимодействия, зависящем от взаимного расстояния и классическая задача о движении трех вихрей на двумерной сфере. Отметим, что редукция задачи трех тел на S^2 была выполнена в [13] при помощи классических методов, где использован алгоритм, предположенный Буром [2]; надо заметить, что используемый в этой работе подход не обобщается на случай трехмерной сферы S^3 (и пространства Лобачевского L_3). Задача о редукции системы трех вихрей на сфере (при помощи обобщения метода Якоби) рассматривалась в [11].

Предлагаемый в этой работе подход сочетает в себе основные принципы классического подхода, основанные на теории Ли, а также идеи алгебраизации уравнений движения, т. е. приведения системы к наиболее простому алгебраическому виду (в гамильтоновом случае это приводит, как правило, к системе с полиномиальной скобкой Пуассона и полиномиальным гамильтонианом).

В историческом плане отметим, что в классическом подходе процедура редукции первоначально была разработана в работах Лагранжа и Якоби, и приобрела окончательную наиболее общую форму в работах Ли. Отметим в этой связи также работы киевского математика П. В. Воронца [2, 3], в работе [2] он предлагает процедуру редукции в системе с циклическим интегралом (т. е. линейным по импульсам), а в [3] он обобщает эту процедуру на случай произвольного полиномиального по импульсам интеграла движения. Надо сказать, что все эти алгоритмы сосредоточены на каноническом представлении приведенной системы, и в некоторых случаях (как, например, в системе двух тел на S^3) не приводят к желаемому результату.

В современных работах Марсдена, Вейнштейна [14] рассуждения классиков, которые носили локальный и негеометрический характер, была придана современная наиболее общая форма, а также были прояснены геометрические аспекты редукции (с точки зрения симплектической геометрии).

В предлагаемом нами подходе процедура редукции разделяется на два этапа. На первом этапе выбираются подходящие переменные приведенной системы (как инварианты соответствующей группы симметрий), которые образуют, как правило, алгебраическую пуассонову структуру. При этом симплектический лист этой структуры является фазовым пространством приведенной системы. На втором этапе на этом симплектическом листе выбираются канонические (симплектические координаты), после чего получаем классическое представление приведенной системы в канонических координатах.

Этот подход имеет то преимущество, что позволяет разрешить существенно больший круг задач, а также, как правило, позволяет получить уравнения движения в наиболее удобной для анализа системы форме (например, в полиномиальном виде). Это упрощает применение методов качественного анализа, методов доказательства неинтегрируемости системы и т. д.

Заметим также, что построения канонических координат на симплектическом листе мы используем обобщение метода цепочек подалгебр на нелинейные пуассоновы структуры, т. е. сначала мы выделяем замкнутую подалгебру, на которой вводим канонические переменные, а затем достраиваем их до канонических переменных на всем симплектическом листе. При этом, в частности в задаче двух тел на S^3 возникает любопытная аналогия с динамикой твердого тела — так, если рассматривать редукцию по методу Бура [13], то возникающая система переменных аналогична углам Эйлера в задаче о вращении волчка [4], а редукция эквивалентна исключению

прецессии. Канонические переменные приведенной системы, построенные в данной работе, аналогичны системе переменных Андуайе в динамике волчка, для которых аналогичный алгоритм построения при помощи цепочек подалгебр был указан в [4]. Отметим также, что в динамике твердого тела переменные Андуайе имеют важное значение в теории возмущений и аналитическом доказательстве неинтегрируемости системы в общем случае [8].

Завершая обсуждение задачи двух тел на сфере отметим также, что редукция этой системы исследуется также в работе [9], но, к сожалению, полученные там результаты не поддаются верификации и не могут считаться окончательными.

В качестве еще одного примера мы также рассматриваем редукцию в системе трех вихрей на двумерной сфере [12]. Хотя для этой задачи и существует общая (для любого числа вихрей) схема понижения порядка [11], обобщающая классический метод Якоби исключения узла, мы получаем здесь другую систему канонических переменных приведенной системы, основываясь на алгебраическом подходе. Было бы интересно обобщить этот метод на случай произвольного числа вихрей на S^2 .

2. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим задачу о движении двух тел на трехмерной сфере S^3 . Пусть сфера вложена в четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ и задана уравнением

$$f(\mathbf{r}) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 - R^2.$$

Уравнения движения могут быть представлены в виде хорошо известных уравнений Лагранжа с множителями

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \lambda_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Будем предполагать, что взаимодействие тел, а также внешние силы таковы, что лагранжиан нашей задачи $L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2)$, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in S^3$ инвариантен относительно действия группы вращений четырехмерного пространства $SO(4)$. Как известно, это эквивалентно инвариантности относительно действия фазовых потоков, порождаемых векторными полями вида

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{d\alpha} = \mathbf{A}\mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2,$$

которые образуют соответственно алгебру Ли $so(4)$. (Здесь $\mathbf{A}$ — произвольная кососимметрическая постоянная матрица).

Простейший пример — движение двух частиц в потенциальном поле, зависящем лишь от взаимного расстояния (по геодезической)

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

К системам аналогичного вида приводится, например, классическая задача двух тел на S^3 , а также задача о движении двух двумерных сфер на поверхности трехмерной сферы, заполненной идеальной жидкостью [6].

Вследствие того, что вектор $\mathbf{A}\mathbf{r}_i$ ортогонален градиенту $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i}$ по теореме Нетер находим

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1}, \mathbf{A}\mathbf{r}_1 \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2}, \mathbf{A}\mathbf{r}_2 \right) = \text{const}.$$

Поскольку здесь матрица $\mathbf{A}$ (однозначно определяемая шестью своими внедиагональными элементами) произвольна, заключаем, что наша система имеет шесть первых интегралов, линейных по скоростям

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1} + \mathbf{r}_2 \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2} \quad (1)$$

Выразив декартовы компоненты векторов $\mathbf{r}_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $\mathbf{r}_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ через сферические координаты $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= R \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3, & b_1 &= R \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3, \\ a_2 &= R \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3, & b_2 &= R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3, \\ a_3 &= R \sin q_1 \cos q_2, & b_3 &= R \sin x_1 \cos x_2, \\ a_4 &= R \cos q_1, & b_4 &= R \cos x_1, \end{aligned}$$

и выполнив преобразование Лежандра

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{y} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad H = (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}) - L|_{\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{p}, \mathbf{y}},$$

получим систему уравнений Гамильтона с шестью степенями свободы

$$\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q}, H\}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H\}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y}, H\},$$

с канонической скобкой Пуассона

$$\{p_i, q_i\} = \{y_i, x_i\} = -\delta_{ij}. \quad (2)$$

Скобки Пуассона интегралов (1) образуют алгебру $so(4)$, действительно вводя векторные обозначения $\mathbf{M} = (M_{12}, M_{13}, M_{23})$, $\boldsymbol{\gamma} = (M_{34}, M_{24}, M_{14})$, находим

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k.$$

Положив, например, $F_1 = M_1$, $F_2 = (\mathbf{M} - \boldsymbol{\gamma})^2$, $F_3 = \gamma_1$, $F_4 = (\mathbf{M} + \boldsymbol{\gamma})^2$, получим систему из четырех коммутирующих интегралов

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 4,$$

а значит возможна редукция на четыре степени свободы [1]. Ниже, следуя алгоритму, разработанному в [5], и примененному в [6], эта редукция к системе с двумя степенями свободы будет выполнена в явном виде.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что алгебра $so(4)$ допускает представление $so(4) = so(3) \oplus so(3)$. Вводя вместо $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ образующие $\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M} - \boldsymbol{\gamma}}{2}$ и $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\mathbf{M} + \boldsymbol{\gamma}}{2}$, получим это представление в явном виде:

$$\{\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j\} = \varepsilon_{ijk} \tilde{\gamma}_k, \quad \{\tilde{M}_i, \tilde{M}_j\} = \varepsilon_{ijk} \tilde{M}_k, \quad \{\tilde{M}_i, \tilde{\gamma}_j\} = 0.$$

3. Редукция в алгебраической форме

Чтобы выполнить редукцию в явном виде выберем, следуя общим идеям, восходящим к Ли и Картану [5], в качестве новых переменных функции, коммутирующие с первыми интегралами (1) нашей системы (т. е. инварианты группы симметрий $SO(4)$):

$$f = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad g = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1}, \mathbf{r}_2 \right), \quad h = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2}, \mathbf{r}_1 \right), \\ u = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1} \right), \quad v = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2} \right), \quad w = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2} \right).$$

Выразив $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i$ через сферические координаты $\mathbf{q}, \mathbf{x}$ и сопряженные им импульсы $\mathbf{p}, \mathbf{y}$, можно показать, что переменные $\mathbf{X} = (f, g, h, u, v, w)$ образуют нелинейную скобку

$$\|\{X_i, X_j\}\| = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -2f & -2f \\ 2f & 0 & h-g \\ 2f & g-h & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}k \begin{vmatrix} 0 & f^2 & f^2 \\ -f^2 & 0 & f(g-h) \\ -f^2 & f(h-g) & 0 \end{vmatrix}, \\ \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -4g & -4h & 2(g+h) \\ -2u & 2w & u-w \\ 2w & -2v & v-w \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 0 & -f(g+h) \\ uf & 0 & -g(g+h) + \frac{1}{2}wf \\ 0 & vf & -h(g+h) + \frac{1}{2}wf \end{vmatrix}, \\ \mathbf{C} = 2k \begin{vmatrix} 0 & 0 & uh \\ 0 & 0 & vg \\ -uh & -vg & 0 \end{vmatrix}, \quad k = \frac{1}{R^2}. \quad (3)$$

Ранг полученной скобки равен четырем, в то время как ранг первоначальной скобки (2) равен 12; таким образом, (пока не в канонической форме) редукция на четыре степени свободы выполнена.

Для структуры (3) имеются две функции Казимира

$$F_0 = w + \frac{v+u}{2} - k \left(\frac{fw}{2} + gh \right), \\ C_0 = \left(w + \frac{v+u}{2} \right)^2 + \left(vg^2 - \frac{wvf}{2} - vgh - uvf - \frac{wuf}{2} + uh^2 - ugh \right) k + \frac{uvf^2k^2}{4}, \quad (4)$$

которые с функциями Казимира $\tilde{M}^2$ и $\tilde{\gamma}^2$ алгебр $so(3)$ (см. замечание в конце п.1) связаны соотношениями

$$F_0 = 2k(\tilde{M}^2 + \tilde{\gamma}^2), \quad C_0 = k^2\tilde{M}^2\tilde{\gamma}^2.$$

Отметим, что для скобки (3) в пределе не искривленного пространства $k = 0$ получается линейная структура, указанная в [6] для задачи о движении двух сфер в идеальной жидкости, она по-прежнему имеет ранг 4. В [6] было показано, что, с помощью новых образующих, представляющих собой некоторые линейные комбинации переменных u, v, w, f, g, h , алгебра (3) (при $k = 0$) может быть представлена в виде полупрямой суммы $so(2, 1)$ и некоторого идеала. В этом случае функции Казимира (4) становятся зависимыми $F_0^2 = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 = C_0$, где $\mathbf{P}^2 =$

$= \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_2} \right|^2$ представляет собой квадрат полного импульса системы, однако появляется дополнительная функция Казимира

$$D_0 = uvf - fw^2 - vg^2 - 2ghw - uh^2,$$

равная определителю Грама векторов $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{y}, \mathbf{p}$. При этом многообразие, определяемое соотношениями $\{g = h, u = v, \mathbf{P}^2 = 0\}$, является пуассоновым. Ранг структуры (3) на нем равен 2 (функцией Казимира является $fu - h^2$). Таким образом, как отмечено в [6], в случае $\mathbf{P}^2 = 0$ система интегрируема при любых гамильтонианах.

4. Симплектические координаты

На орбите, заданной соотношениями $F_0 = \text{const}$, $C_0 = \text{const}$, построим симплектические координаты $(\varphi, \vartheta, p_\varphi, p_\vartheta)$, аналогичные переменным Андуайе в динамике твердого тела [4]. Воспользуемся для этого методом цепочек подалгебр. Действительно, замечаем, что согласно (3) переменные $\{f, g, h\}$, образуют замкнутую подалгебру с пуассоновой структурой, определяемой матрицей $\mathbf{A}$. На симплектическом листе этой подалгебры построим пару симплектических (канонических) координат ϑ, p_ϑ а функцию Казимира этой подалгебры выберем в качестве нового импульса p_φ и построим для нее соответствующую канонически сопряженную угловую переменную φ .

Функция $F = \frac{4(g-h)^2}{kf(4-kf)}$ является функцией Казимира этой подалгебры, то есть

$$\{F, f\} = \{F, g\} = \{F, h\} = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим равенствам, а также коммутационным соотношениям (3), положим $f = 2(1 + \cos \vartheta)/k$ и в силу $\{f, g\} = \{f, h\} = \frac{-2 \sin \vartheta}{k} \frac{\partial g}{\partial p_\vartheta} = \frac{f^2 k}{2} - 2f = \frac{-2 \sin^2 \vartheta}{k}$, найдем

$$h = (p_\vartheta - p_\varphi) \sin \vartheta, \quad g = (p_\vartheta + p_\varphi) \sin \vartheta, \quad F = p_\varphi^2. \quad (5)$$

С геометрической точки зрения ϑ — это угловая длина геодезической, соединяющей частицы.

Для того, чтобы найти зависимость переменных от угла φ воспользуемся соотношением

$$\{F, \Phi\} = \{p_\varphi^2, \Phi\} = -2p_\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

где коммутатор в левой части вычисляется с помощью скобки (3). Подставляя вместо Φ функции u, v, w , получим систему линейных дифференциальных уравнений с независимой переменной φ следующего вида

$$\begin{aligned} p_\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \sin \vartheta (-\cos \vartheta u + w - kp_\varphi(p_\vartheta - p_\varphi) \cos \vartheta), \\ p_\varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \sin \vartheta (\cos \vartheta v - w - kp_\varphi(p_\vartheta + p_\varphi) \cos \vartheta), \\ p_\varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= \sin \vartheta \left(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - 2kp_\varphi p_\vartheta\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Ее общее решение задается уравнениями

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \vartheta) & \sin(\varphi + \vartheta) & 1 \\ \cos(\varphi - \vartheta) & \sin(\varphi - \vartheta) & 1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(p_\varphi, p_\vartheta) \\ S_2(p_\varphi, p_\vartheta) \\ S_3(p_\varphi, p_\vartheta, \vartheta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2k p_\varphi}{\sin \vartheta} \\ \frac{2k h p_\varphi}{\sin \vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подбирая затем функции S_i таким образом, чтобы выполнялись соотношения (3) и (4), окончательно получаем

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{(2kp_\varphi^2 - F_0)^2 - D/k^2}}{\sin^2 \vartheta} \cos(\varphi + \vartheta) - \frac{2kp_\varphi^2 - F_0}{\sin^2 \vartheta} + k(p_\vartheta - p_\varphi)^2, \\ v &= \frac{\sqrt{(2kp_\varphi^2 - F_0)^2 - D/k^2}}{\sin^2 \vartheta} \cos(\varphi - \vartheta) - \frac{2kp_\varphi^2 - F_0}{\sin^2 \vartheta} + k(p_\vartheta + p_\varphi)^2, \\ w &= \frac{\sqrt{(2kp_\varphi^2 - F_0)^2 - D/k^2}}{\sin^2 \vartheta} \cos \varphi + \left(k(p_\vartheta^2 - p_\varphi^2) - \frac{2kp_\varphi^2 - F_0}{\sin^2 \vartheta} \right) \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $D = k^2(F_0^2 - C_0)$ — определитель Грама векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{y}, \mathbf{p}$. Переменные $\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi$ являются каноническими; гамильтониан выраженный через них, а также параметры F_0 и C_0 , задает приведенную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Рассмотренная процедура редукции переносится на случай двумерной сферы: в формулах (7) следует положить $D = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. То, что при построении угловой переменной φ получается система линейных уравнений (6), является следствием соответствующего выбора подалгебры и линейной скобки (3) относительно переменных u, v, w . По-видимому, в общем случае это не выполняется.

5. Задача двух тел на S^3

Гамильтониан классической задачи двух тел в переменных u, v, w, f, g, h

$$H = \frac{u}{2m_1} + \frac{v}{2m_2} - \gamma \operatorname{ctg}(\widehat{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}), \quad \operatorname{ctg}(\widehat{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}) = \frac{2 - kf}{\sqrt{4kf - k^2 f^2}}.$$

Подставляя в это уравнение соотношения (5), (7), получим представление приведенной системы в канонической форме.

6. Задача о движении трех точечных вихрей на двумерной сфере

Метод введения симплектических координат, при котором они вводятся сначала на подалгебре, а затем распространяются на всю алгебру, применим в задаче о движении трех точечных вихрей на сфере [7, 15]. Известно [7], что квадраты взаимных расстояний между вихрями M_1, M_2, M_3 , а также объем параллелепипеда, натянутого на радиус-векторы вихрей Δ , образуют нелинейную пуассонову структуру

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= -4a_k \Delta, \\ \{M_i, \Delta\} &= (a_j - a_k)M_i + (a_j + a_k)(M_j - M_k) + \frac{M_i}{2}k(a_k M_k - a_j M_j), \end{aligned} \quad (8)$$

а гамильтониан представляется в виде

$$H = -\frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 \Gamma_2 \ln M_3 + \Gamma_2 \Gamma_3 \ln M_1 + \Gamma_3 \Gamma_1 \ln M_2), \quad (9)$$

здесь $a_k = 1/\Gamma_k$ — обратные интенсивности, ранг структуры (8) равен двум, и имеются две функции Казимира

$$\begin{aligned} F_0 &= a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3, \\ C_0 &= 4\Delta^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - 2(M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3) + k M_1 M_2 M_3, \\ k &= \frac{1}{R^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

причем физический симплектический лист определяется дополнительным условием $C_0 = 0$. Как показано в [7], соотношения (8), (9) определяют редуцированную систему в алгебраической форме для задачи трех вихрей. Хотя в этом случае симплектический лист двумерный вследствие нелинейности алгебры (8), и даже построение пары канонических переменных (которые мы обозначили G, g так что $\{g, G\} = 1$) может представлять трудности.

Сведем эту задачу к решению системы линейных уравнений по аналогии с предыдущим случаем (см. пункт 3). Выберем новые образующие алгебры (8) $M_1, N = a_2 M_2 + a_3 M_3, M_2, \Delta$ тогда получим следующие коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} \{N, M_1\} &= 0, \\ \{N, M_2\} &= 4a_1 a_3 \Delta, \quad \{N, \Delta\} = A M_2 + B, \\ A &= -\frac{a_1(a_2 + a_3)^2}{a_3} + k a_1 a_2 M_1, \quad B = a_1(a_3 - a_2) M_1 + \frac{a_1(a_2 + a_3)}{a_3} N - \frac{1}{2} k a_1 N M_1, \end{aligned} \quad (11)$$

при этом N, M_1 образуют двумерную коммутативную подалгебру.

Выберем N в качестве одной из канонических переменных (с точностью до множителя), тогда согласно (11) M_1 выражается через нее и функции Казимира

$$N = \frac{a_1}{k a_2 a_3} G, \quad M_1 = \frac{(a_2 + a_3)^2 - (L + G)^2}{a_2 a_3 k}, \quad (12)$$

где L связана с функцией Казимира (10) соотношением

$$F_0 = \frac{a_1((a_2 + a_3)^2 - L)}{k a_2 a_3}. \quad (13)$$

Теперь для определения $M_2(g)$ и $\Delta(g)$ получим линейную систему уравнений

$$\frac{\partial M_2}{\partial g} = -4k a_2 a_3^2 \Delta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial g} = -k \frac{a_2 a_3}{a_1} (A M_2 + B),$$

где A, B , согласно (12) и (13), являются известными функциями L, G .

Для M_2 и Δ получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= -P(G, L) \cos(2a_2 a_3 k \sqrt{L + G} g) \\ M_2 &= \frac{2a_3 P(G, L)}{\sqrt{L + G}} \sin(2a_2 a_3 k \sqrt{L + G} g) + \\ &+ (2a_2 a_3 (-a_2 + a_3)(a_2 + a_3)^2 - 2a_2 a_3 (-a_2 + a_3)L - \\ &- (-a_2 + a_3)(2a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_2 a_1)G + G a_1 L + G^2 a_1) / (a_2^2 a_3 k (L + G)), \end{aligned}$$

где $P^2(G, L) = 2(S_1(G, L) + S_0(L))$. Здесь $S_1(G, L)$ и $S_0(L)$ — достаточно громоздкие дробно-рациональные функции:

$$\begin{aligned}
 S_1(G, L) = & (4a_2^2a_3^2(a_2 - a_3)^2(a_2 + a_3)^4 + 4a_2a_3a_1(a_2 - a_3)^2(a_2 + a_3)^3L + \\
 & + (6a_2^3a_3 + a_2^3a_1 + 4a_2^2a_3^3 - a_2^2a_1a_3 - a_2a_3^2a_1 + 6a_2a_3^3 + a_3^3a_1) \times \\
 & \times (2a_2a_3 + a_3a_1 + a_2a_1)LG + a_1^2(a_2 - a_3)^2(a_2 + a_3)^2L^2 + \\
 & + (6a_2^3a_3 + a_2^3a_1 + 4a_2^2a_3^2 - a_2^2a_1a_3 - a_2a_3^2a_1 + 6a_2a_3^3 + a_3^3a_1) \times \\
 & \times (2a_2a_3 + a_3a_1 + a_2a_1)G^2 - 4a_3a_2(2a_2a_3 + a_3a_1 + a_2a_1)GL^2 - \\
 & - (2a_3^2a_1^2 + 2a_2^2a_1^2 + 4a_2^2a_1a_3 + 4a_2a_3^2a_1 + 4a_2^2a_3^2)G^3 + \\
 & - (2a_3^2a_1^2 + 8a_2^2a_1a_3 + 8a_2a_3^2a_1 + 12a_2^2a_3^2 + 2a_2^2a_1^2)G^2L + L^2G^2a_1^2 + \\
 & + 2LG^3a_1^2 + G^4a_1^2) / (32a_2^4a_3^4k^2(L + G)), \\
 S_0(L) = & - (4a_2a_3(a_2 + a_3)^2(3a_2a_3^3 + a_3^3a_1 - 2a_2^2a_3^2 - a_2a_3^2a_1 + 3a_2^3a_3 - a_2^2a_1a_3 + a_2^3a_1) + \\
 & + (a_1^2a_2^4 + a_1^2a_3^4 - 12a_2^2a_3^4 - 8a_2^3a_3^3 - 12a_2^4a_3^2 - 2a_1^2a_2^2a_3^2)L + 4a_3^2a_2^2L^2 - \\
 & - 4C_0a_2^4a_3^4k^2) / 32a_2^4a_3^4k^2
 \end{aligned}$$

Таким образом, на листе, заданном соотношениями (8), получена гамильтонова система с одной степенью свободы: переменные M_i и Δ выражены через канонические переменные g , G , а также параметры L , C_0 . Для физических симплектических листов нужно положить $C_0 = 0$.

Благодарности

Исследования А. В. Борисова и И. С. Мамаева выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных научных исследований (коды проектов 08-01-00651 и 07-01-92210). Работа И. С. Мамаева выполнена в рамках гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых — докторов наук (код проекта МД-5239.2008.1). Работа С. М. Рамоданова поддержана грантом РФФИ 08-01-00025.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, в кн. *Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления*. М.: ВИНТИ, 1985, т. 3.
- [2] Воронец П. В., *Преобразования уравнений динамики с помощью линейных интегралов (с приложением к задаче о трех телах)*, Киев: Изв. ун-та Св. Владимира, 1907.
- [3] Воронец П. В., К вопросу об интегрировании уравнений Лагранжа, *Записки мат. кабинета Крымского (б. Таврического) Университета им. Фрунзе*, 1921, т. 3, с. 39–60.
- [4] Борисов А. В., Мамаев, И. С., *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. Москва—Ижевск: Институт Компьютерных исследований, 2005.
- [5] Борисов А. В., Мамаев, И. С., Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во "РХД", 1999.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. и Рамоданов С. М., Движение двух сфер в идеальной жидкости. I. Уравнения движения в евклидовом пространстве. Первые интегралы и редукция. *Нелинейная Динамика*, 2007, т. 3, вып. 3, с. 411–422.

- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С., Математические методы динамики вихревых структур. Москва—Ижевск: Институт Компьютерных исследований, 2005.
- [8] Козлов В. В., *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980. 231 с. (2-е издание, дополненное: Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2000. 248 с.)
- [9] Shchepetilov A. V., *Calculus and Mechanics on Two-Point Homogenous Riemannian Spaces*, in *Lecture Notes in Physics*, vol. 707, Berlin—Heidelberg: Springer, 2006, 257 p. (Рус. перевод — Щепетилов, А. В. *Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах*, Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2008. 360 с.)
- [10] Bolsinov A. V., Borisov A. V., and Mamaev I. S., Lie Algebras in Vortex Dynamics and Celestial Mechanics — IV, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 1999, vol. 4, no. 1, pp. 23–50.
- [11] Borisov A. V., Kilin A. A., and Mamaev I. S., Reduction and Chaotic Behavior of Point Vortices on a Plane and a Sphere, Supplement Volume 2005 of DCDS devoted to the 5th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations (Pomona, California, USA, June 2004), p. 100–109
- [12] a) Borisov A. V. and Lebedev V. G., Dynamics of Three Vortices on a Plane and a Sphere — II. General Compact Case, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 99–114.
b) Borisov A. V. and Lebedev V. G., Dynamics of Three Vortices on a Plane and a Sphere — III. Noncompact Case. Problems of Collaps and Scattering, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 74–86.
- [13] Borisov A. V., Mamaev I. S., and Kilin A. A. Two-Body Problem on a Sphere. Reduction, Stochasticity, Periodic Orbits. *Reg. & Chaot. Dyn.*, 2004, vol. 9 no. 3, pp. 265–280.
- [14] Marsden J. E. and Weinstein A. Reduction of Symplectic Manifolds With Symmetry, *Rep. Math. Phys.*, 1974, vol. 5, pp. 121–130.
- [15] Newton P. K., The N-Vortex Problem. Analytical Technics, Springer, 2001.