ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 17.93

MSC 2010: 53C17, 37C10

Интегрируемость и неинтегрируемость субримановых геодезических потоков на группах Карно*

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

В данной работе рассмотрены две системы из субримановой геометрии. Первая система определена группой Карно с тремя образующими и вектором роста $(3, 6, 14)$, вторая, соответственно, определена двумя образующими и вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. С помощью отображения Пуанкаре показана неинтегрируемость указанных систем в общем случае. Кроме того, указаны частные случаи, в которых существуют дополнительные первые интегралы.

Ключевые слова: субриманова геометрия, группа Карно, отображение Пуанкаре, первые интегралы

*Перевод статьи “Integrability and Nonintegrability of Sub-Riemannian Geodesic Flows on Carnot Groups”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 759–774.

Получено 16 октября 2016 года

После доработки 20 ноября 2016 года

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, а также поддержана грантами РФФИ № 15-08-09261-а и № 15-08-09093-а.

Бизяев Иван Алексеевич

bizaev_90@mail.ru

Килин Александр Александрович

aka@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

115409, Россия, г. Москва, Каширское ш., д. 31

Мамаев Иван Сергеевич

mamaev@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

1. Введение

В данной работе рассмотрены две системы из субримановой геометрии. Первая система определена группой Карно, алгебра Ли которой порождается распределением с тремя образующими и вектором роста $(3, 6, 14)$, для второй системы распределение задается парой образующих и имеет вектор роста $(2, 3, 5, 8)$. В механике данные системы возникают в задачах управления санями Чаплыгина, тележкой с прицепом и т. п. при использовании нильпотентной аппроксимации [1]. В данной работе обе системы изучены с точки зрения пуассоновой геометрии, в частности, введены канонические переменные и исследованы вопросы об интегрируемости, в основном методами численного анализа отображения Пуанкаре и расщепления сепаратрис.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вторая система имеет отношение к задаче о качении без проскальзывания и вращения шара по неподвижной поверхности (в частности, по плоскости и сфере), в которой неголономное распределение имеет вектор роста $(2, 3, 5)$. Вопросы кинематики этой системы рассматривались в работах [9, 17], динамики — в работе [10].

Неинтегрируемость рассмотренных в этой работе систем свидетельствует о невозможности построения явного решения проблемы управления в задачах, где возникают данные (а также более сложные) нильпотентные аппроксимации. Наличие хаотического слоя в фазовом пространстве (в котором траектории экспоненциально разбегаются) указывает на сильную чувствительность оптимальных траекторий к выбору начальных условий. Это приводит к тому, что с практической точки зрения (когда присутствуют неизбежные погрешности) подобное управление оказывается, как правило, нереализуемо. Несомненно, что эти вопросы еще далеки от полного понимания и разрешения.

Более подробно с кругом задач субримановой геометрии можно ознакомиться в [8, 17, 25]. С нашей точки зрения, особый интерес представляют задачи, имеющие непосредственное приложение в теоретической механике (в частности, робототехнике). Заметим, что субриманова геометрия тесно связана и с другими областями теории динамических систем, такими как теория алгебр Ли, пуассоновы структуры, теория интегрируемости и т. д. В связи с этим следует отметить работы, посвященные исследованию субримановых задач на трехмерных алгебрах Ли, которые в некотором смысле являются непосредственным обобщением задачи о вращении волчка Эйлера [7, 19, 21].

С точки зрения применения методов явного интегрирования, задачи субримановой геометрии принципиально не отличаются от других задач, рассматриваемых в классической механике. Изложение вопросов об интегрируемости систем на алгебрах Ли имеется в книге [4]. Неинтегрируемая система в субримановой геометрии впервые, по-видимому, была указана в работе [18], рассматриваемая система оказалась изоморфна классической системе Янга–Миллса, исследованию которой посвящено значительное количество работ, в частности, ее хаотическое поведение впервые было указано в работе [5], а мероморфная неинтегрируемость доказана в [3].

2. Случай трех образующих

2.1. Уравнения движения и простейшие симметрии

1. Здесь мы лишь кратко опишем построение рассматриваемых динамических систем, опираясь на теорию пуассоновых структур. Связь этих систем с теорией управления и группами Карно подробно изложена в работе [38].

Начнем с конкретного примера.

1. Выберем три координатных функции в фазовом пространстве, которые являются образующими

$$h_1, h_2, h_3.$$

2. Их коммутаторы первого порядка определяют еще три независимые (координатные) функции:

$$h_{12} = \{h_1, h_2\}, \quad h_{23} = \{h_2, h_3\}, \quad h_{31} = \{h_3, h_1\}.$$

3. Потребуем, чтобы коммутаторы второго порядка $h_{i,jk} = \{h_i, \{h_j, h_k\}\}$ являлись функциями Казимира, то есть мы полагаем, что для всех функций

$$\{h_{i,jk}, h_m\} = \{h_{i,jk}, h_{mn}\} = \{h_{i,jk}, h_{l,mn}\} = 0.$$

Отсюда следует, что все коммутаторы третьего порядка и выше обращаются в нуль. Кроме того, чтобы выполнялось тождество Якоби, необходимо потребовать, чтобы функции $h_{i,jk}$ удовлетворяли линейному соотношению

$$h_{1,23} + h_{2,31} + h_{3,12} = 0. \quad (2.1)$$

Таким образом, получим 14-мерное пространство со скобкой Ли–Пуассона, соответствующей нильпотентной алгебре Ли, которая порождается неголономным распределением с вектором роста (3, 6, 14).

Задача. Проанализировать интегрируемость в данном пространстве гамильтоновой системы, порождаемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2). \quad (2.2)$$

2. Обозначим коммутаторы первого порядка следующим образом:

$$h_{12} = g_3, \quad h_{23} = g_1, \quad h_{31} = g_2.$$

Поскольку функции Казимира являются интегралами рассматриваемой системы, зафиксируем их величины:

$$\{g_i, h_j\} = \varepsilon_{ilm} \{h_{lm}, h_j\} = B_{ij} = \text{const},$$

где ε_{ijk} — антисимметричный тензор Леви-Чивиты (здесь нет суммирования по повторяющимся индексам). Рассматриваемая поверхность уровня этих интегралов представляет собой шестимерное пуассоново многообразие $\mathbb{R}^6 = \{z = (h_1, h_2, h_3, g_1, g_2, g_3)\}$, пуассонова структура которого имеет вид

$$\mathbf{J}_z = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & g_3 & -g_2 & \\ -g_3 & 0 & g_1 & -\mathbf{B}^T \\ g_2 & -g_1 & 0 & \\ \hline & \mathbf{B} & & 0 \end{array} \right), \quad \text{Tr } \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{B} = \|B_{ij}\|$ — (3×3) -матрица, а условие $\text{Tr } \mathbf{B} = 0$ — это следствие соотношения (2.1).

Уравнения движения произвольной гамильтоновой системы можно представить в векторной форме

$$\dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{g} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{B}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{g}}, \quad \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{B} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}},$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$.

3. В частности, для гамильтониана (2.2) получим

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \times \mathbf{g}, \quad \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{B}\mathbf{h}. \quad (2.4)$$

Далее опишем три вида линейных преобразований координат и времени $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$, $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}'$, $t \rightarrow \tau$, при которых сохраняется форма уравнений (2.4), но может измениться матрица $\mathbf{B}$:

$$\frac{d\mathbf{h}'}{d\tau} = \mathbf{h}' \times \mathbf{g}', \quad \frac{d\mathbf{g}'}{d\tau} = \mathbf{B}'\mathbf{h}'.$$

1) Растяжение и замена времени вида $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$, $\mathbf{g} = \lambda\mathbf{g}'$, $t = \lambda^{-1}\tau$, при этом¹

$$\mathbf{B}' = \lambda^{-2}\mathbf{B}.$$

2) Растяжение вида $\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}'$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$, $t = \tau$, при этом

$$\mathbf{B}' = \lambda\mathbf{B}.$$

3) Ортогональная замена $\mathbf{h} = \mathbf{Q}\mathbf{h}'$, $\mathbf{g} = \mathbf{Q}\mathbf{g}'$, $\mathbf{Q} \in SO(3)$, $t = \tau$, при этом

$$\mathbf{B}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q}. \quad (2.5)$$

С помощью этих преобразований произвольную бесследовую матрицу $\mathbf{B}$ можно привести к виду

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & -(1 + B_{33}) & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

В дальнейшем это приведение мы предполагаем выполненным.

2.2. Случай невырожденной матрицы $\mathbf{B}$

1. Если $\det \mathbf{B} \neq 0$, то можно подобрать замену, приводящую пуассонову структуру (2.3) к канонической форме. В данном случае положим

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}, \quad p_k = h_k + \frac{1}{2}(\mathbf{g}, \mathbf{G}^{(k)}\mathbf{g}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{G}^{(k)}$ — постоянная (3×3) -симметрическая матрица, такая, что

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

¹Это преобразование существует для произвольной гамильтоновой системы.

При этом

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left(p_k - \frac{1}{2} (\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{G}}^{(k)} \mathbf{q}) \right)^2, \quad \tilde{\mathbf{G}}^{(k)} = \mathbf{B}^T \mathbf{G}^{(k)} \mathbf{B}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. С физической точки зрения, этот гамильтониан описывает движение заряженной частицы в пространстве $\mathbb{R}^3$ в магнитном поле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ с векторным потенциалом

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{q}, \mathbf{G}^{(1)} \mathbf{q}), (\mathbf{q}, \mathbf{G}^{(2)} \mathbf{q}), (\mathbf{q}, \mathbf{G}^{(3)} \mathbf{q})).$$

Существует произвол в выборе матриц $\mathbf{G}^{(k)}$, приводящих коммутационные соотношения к каноническому виду. Здесь мы будем использовать матрицы $\mathbf{G}^{(k)}$ вида

$$\mathbf{G}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{G}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -B_{13}/B_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^{(3)} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{B_{12}}{1+B_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Таким образом, в данном случае имеем гамильтонову систему с тремя степенями свободы; как известно [30], для ее интегрируемости (по Лиувиллю) требуется существование двух независимых дополнительных первых интегралов, коммутирующих между собой.

2. При анализе интегрируемости данной системы рассмотрим наиболее простой случай, когда система обладает линейным (по импульсам) первым интегралом. Методом неопределенных коэффициентов можно показать, что условия существования этого интеграла описываются следующим образом.

Теорема 1. Система (2.4) с матрицей $\mathbf{B}$ вида (2.6) допускает линейный по $\mathbf{h}$ первый интеграл тогда и только тогда, когда $\mathbf{B}$ диагональна и два ее собственных числа совпадают.

Так, в случае

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

система (2.4) допускает дополнительный первый интеграл вида

$$I = h_2 g_3 - h_3 g_2 + g_1 (g_2^2 + g_3^2). \quad (2.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если совпадает другая пара собственных значений, то дополнительный интеграл получается из (2.10) соответствующей перестановкой индексов.

3. Матрицы $\mathbf{G}^{(k)}$, приводящие пуассонову структуру к канонической форме, в случае (2.9) принимают вид

$$\mathbf{G}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{G}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^{(3)} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После замены (2.7) получим систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}\left(p_2 + \frac{1}{2}q_1q_3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_3 - \frac{1}{2}q_1q_2\right)^2,$$

которая, как мы видим, инвариантна относительно вращений вокруг оси $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$. Интеграл (2.10) представляет собой интеграл Нётер, соответствующий данной симметрии, и в канонических переменных он записывается в виде проекции углового момента на ось $\mathbf{e}_1$:

$$I = q_2p_3 - q_3p_2.$$

Как известно [30], наличие данной симметрии позволяет выполнить редукцию (понизить порядок) данной системы к системе с двумя степенями свободы. Для этого в плоскости q_2q_3 введем полярные координаты

$$q_2 = r \cos \varphi, \quad q_3 = r \sin \varphi,$$

при этом гамильтониан и интеграл принимают форму

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{r^2} - \frac{1}{2}p_\varphi q_1 + \frac{1}{8}q_1^2r^2, \quad I = p_\varphi, \quad (2.11)$$

где p_r и p_φ — канонически сопряженные импульсы для переменных r и φ . Переменная φ является циклической, и на фиксированном уровне интеграла $I = c$ мы получили систему с двумя степенями свободы с гамильтонианом (2.11), параметрически зависящим от значения интеграла I . В частном случае $c = 0$ получаем отсюда следующий результат.

Предложение 1. Пусть матрица $\mathbf{B}$ имеет вид (2.9) и значение интеграла (2.10) равно нулю, $I = 0$, тогда исходная система (2.4) после редукции по симметрии приводится к системе Янга–Миллса с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{8}q_1^2r^2. \quad (2.12)$$

4. Таким образом, мы видим, что при определенных параметрах субримановы геодезические потоки сводятся к системе Янга–Миллса (2.12), исследованию которой посвящено значительное количество работ. Система Янга–Миллса имеет важные физические приложения и возникает в теории калибровочных полей, квантовой хромодинамике и других областях теоретической физики. Приведем здесь краткий обзор некоторых динамических свойств данной системы.

Как показано в [5] с помощью численного построения сепаратрис, система Янга–Миллса не обладает дополнительным вещественным аналитическим интегралом. В работе [3] аналитически доказано, что не существует мероморфного дополнительного интеграла. Неинтегрируемость по Пуанкаре трехстепенной системы Янга–Миллса обсуждается в [6] и доказана методом расщепления сепаратрис в [2].

Отличительной особенностью системы (2.11) является то, что на сечении Пуанкаре стохастический слой занимает практически всю область определения. Более того, в ряде работ [11, 15, 16, 23, 24] высказано предположение о «полной хаотичности» или даже эргодичности данной системы. С математической точки зрения, эти термины неприменимы

в данном случае вследствие некомпактности уровня энергии $H = \text{const}$. Под «полной хаотичностью» большинство авторов понимают неустойчивость всех периодических решений системы. Например, в работе [24] указанное предположение строится на основе анализа каскадов бифуркаций удвоения периодических решений в возмущенной системе Янга – Миллса при стремлении возмущения к нулю.

В работах [12, 14] численно были найдены устойчивые периодические решения в системе Янга – Миллса. Таким образом, гипотеза о ее «полной хаотичности» была опровергнута. По оценкам работы [12], доля областей регулярного поведения на отображении Пуанкаре составляет менее 0.01 %. Это объясняет трудности, возникающие при поиске устойчивых периодических решений. Отметим, что вследствие наличия у системы траекторий, покидающих любую ограниченную область (в дальнейшем их называем некомпактными), система (2.11) оказывается близка к системам с рассеиванием, для которых пока методы исследования слабо развиты [26].

Натуральные гамильтоновы системы с потенциалом четвертой степени интенсивно изучались с точки зрения интегрируемости. Для двух степеней свободы возможны случаи существования дополнительного интеграла движения второй и четвертой степени по импульсам (см. [27]). Случаи мероморфного первого интеграла, полученные с помощью теории Зиглина – Моралеса – Рамиса, указаны в [28]. Отметим также, что натуральные системы с потенциалом четвертой степени на плоскости и в n -ом евклидовом пространстве возникают в теории теплоемкости твердых тел. Некоторые вопросы статистической механики и существования полиномиальных интегралов обсуждаются, например, в работах [29, 31].

Для систем, содержащих линейные по скоростям слагаемые, результатов о интегрируемости и неинтегрируемости существенно меньше. Методы анализа существования мероморфных интегралов, как правило, не могут быть применены, так как отсутствует (опорное) частное решение (порожденное в случае потенциальных систем точками Дарбу), которое необходимо для исследования монодромии [32].

Случаи систем с линейными по импульсам слагаемыми в гамильтониане указаны, например, в [33]. Наиболее известна из них система Фоккера – Планка [34]. Недавно найденная система в работе [35] с помощью несложного преобразования обобщенных координат и импульсов сводится к обобщенной системе Гарнье (уже не содержащей линейных членов).

Интегрируемые системы динамики твердого тела (случаи Клебша, Стеклова), рассмотренные на ненулевой постоянной площадей, также представляют собой системы на сфере в потенциальных и магнитных полях. Для таких систем даже при наличии дополнительного квадратичного интеграла обычные методы разделения переменных оказываются неприменимы. Процедура явного интегрирования в этом случае существенно усложняется, и единого подхода здесь не существует (см., например, [36]).

5. В случае $I \neq 0$ стохастический слой также занимает практически всю область определения сечения Пуанкаре системы. Однако при некоторых значениях энергии и интеграла I на сечении Пуанкаре наблюдается небольшая область регулярного поведения вблизи устойчивой неподвижной точки первого порядка.

На рисунке 1 изображено такое сечение Пуанкаре системы (2.11) плоскостью $q_1 = 0$ в координатах (q_r, p_r) . Серым цветом на рисунках закрашена область невозможного движения. На рисунке 2 изображено сечение Пуанкаре при достаточно большом значении интеграла энергии. На данном сечении отсутствуют заметные области регулярности, а все найденные неподвижные точки малых порядков являются неустойчивыми. На том же рисунке изображено трансверсальное пересечение сепаратрис неустойчивого периодического решения.

Рис. 1. Сечение Пуанкаре системы (2.11) плоскостью $q_1 = 0$ в координатах (q_r, p_r) при $p_\varphi = 1$ на уровне энергии $H = 0.1$ (а) и его увеличенная область вблизи устойчивого периодического решения (б).

Рис. 2. Пересечение сепаратрис неподвижной точки первого порядка C на сечении Пуанкаре системы (2.11) плоскостью $q_1 = 0$ в координатах (q_r, p_r) при $p_\varphi = 1$, $H = 5$.

Эти рисунки иллюстрируют неинтегрируемость системы (2.11) и, соответственно, исходной системы (2.4) в общем случае. Тем не менее, не исключена возможность, что при некоторых значениях параметров система (2.4) может допускать дополнительные первые интегралы высоких степеней и быть интегрируемой. Поиск таких частных случаев интегрируемости — отдельная сложная задача теории интегрируемых систем.

2.3. Случай вырожденной матрицы В

1. Без ограничения общности выберем $\mathbf{B}$ в форме (2.6) и положим $B_{33} = 0$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} \\ 0 & -1 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

В этом случае пуассонова структура (2.3) оказывается вырожденной ($\text{rank } \mathbf{J}_z = 4$) и обладает двумя функциями Казимира

$$C_0 = g_3, \quad (2.14)$$

$$C_1 = (B_{13} + B_{12}B_{23})h_1 - B_{23}h_2 - h_3 + g_1g_2 - B_{23}g_1g_3 + B_{13}g_2g_3 + \frac{1}{2}B_{12}g_2^2.$$

Зафиксируем уровень функций Казимира $C_0 = c_0$, $C_1 = c_1$ и исключим переменные g_3 , h_3 , затем сделаем замену переменных

$$q_1 = g_1 + B_{12}g_2, \quad q_2 = -g_2, \quad p_1 = h_1, \quad p_2 = h_2 + g_1g_3.$$

Получим систему с канонической скобкой ($\{q_i, p_i\} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$) и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(p_2 - c_0(q_1 + B_{12}q_2))^2 + \frac{1}{2}\left((B_{13} + B_{12}B_{23})p_1 - B_{23}p_2 - q_1q_2 - \frac{1}{2}B_{12}q_2^2 - c_0B_{13}q_2 - c_1\right)^2. \quad (2.15)$$

Отметим, что для системы (2.15) справедливо следующее предложение.

Предложение 2. Совместный уровень интегралов H , C_0 , C_1 системы (2.4) с матрицей (2.13) является некомпактным при любых значениях параметров.

Доказательство. На заданном уровне энергии $H = h$ введем сферические координаты в пространстве (h_1, h_2, h_3)

$$\mathbf{h} = \sqrt{2h}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Тогда совместный уровень энергии и функций Казимира задает в пространстве $(\theta, \varphi, g_1, g_2)$ поверхность, определяемую уравнением

$$g_1g_2 + \frac{1}{2}B_{12}g_2 - B_{23}c_0g_1 + B_{12}c_0g_2 + A(\theta, \varphi) = 0,$$

где

$$A(\theta, \varphi) = (B_{13} + B_{12}B_{23})\sqrt{2h} \sin \theta \cos \varphi - B_{23}\sqrt{2h} \sin \theta \sin \varphi - \sqrt{2h} \cos \theta - c_1.$$

Нетрудно проверить, что данное уравнение при любых фиксированных значениях θ и φ задает на плоскости (g_1, g_2) некоторую гиперболическую кривую (в частном случае две пересекающихся прямых). Следовательно, совместный уровень интегралов H , C_0 и C_1 неограничен по переменным g_1 и g_2 . ■

Как показывают численные эксперименты, система (2.15) является неинтегрируемой. На рисунке 3 приведены примеры отображений Пуанкаре системы (2.15). Для простоты вычислений отображение строится на плоскости исходных переменных (g_1, g_2) , а в качестве секущей выбрана плоскость $h_1 = 0$. На рисунке 4 приведено трансверсальное пересечение сепаратрис вблизи неустойчивого периодического решения, отмеченного на рисунке 3б буквой c .

2. В случае диагональной матрицы $\mathbf{B}$ (то есть при $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$) гамильтониан (2.15) принимает вид

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - c_0q_1p_2 + \frac{1}{2}c_0^2q_1^2 + \frac{1}{2}(q_1q_2 + c_1)^2. \quad (2.16)$$

В частном случае $c_0 = c_1 = 0$ получаем следующий результат.

Рис. 3. Отображения Пуанкаре на плоскости (g_1, g_2) при сечении фазового потока системы (2.4) с матрицей $\mathbf{B}$ вида (2.13) плоскостью $h_1 = 0$: а) $B_{12} = 1$, $B_{13} = B_{23} = 0$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $H = 0.1$, б) $B_{12} = 2$, $B_{13} = B_{23} = 0$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $H = 0.1$.

Рис. 4. Пересечение сепаратрис при $B_{12} = 2$, $B_{13} = B_{23} = 0$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $H = 0.1$.

Предложение 3. Пусть матрица $\mathbf{B}$ имеет вид $\mathbf{B} = \text{diag}(1, -1, 0)$ и значения интегралов (2.14) равны нулю, $c_0 = c_1 = 0$, тогда система (2.4) после редукции приводится к системе Янга – Миллса с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2 q_2^2.$$

Отметим, что на нулевом уровне одной функции Казимира, $c_0 = 0$, система (2.15) совпадает с системой, полученной в работе [16] при рассмотрении группы Карно, алгебра Ли которой порождается распределением с тремя образующими и вектором роста $(3, 5, 6)$. Исследование частных решений данной системы можно найти в работе [37].

В общем случае $c_0 \neq 0$, $c_1 \neq 0$ система (2.16) демонстрирует хаотическое поведение. Примеры отображения Пуанкаре при $c_0 \neq 0$ приведены на рисунке 5. На рисунке 6 приведен пример пересечения сепаратрис вблизи неустойчивого решения в прямоугольной области, изображенной на рисунке 5b.

Рис. 5. Отображения Пуанкаре на плоскости (g_1, g_2) при сечении фазового потока системы (2.4) с матрицей $\mathbf{B}$ вида (2.13) плоскостью $h_1 = 0$: а) $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $H = 0.1$, б) $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $H = 0.5$.

Рис. 6. Пересечение сепаратрис при $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $H = 0.5$.

3. Случай двух образующих

3.1. Уравнения движения и простейшие симметрии

1. Рассмотрим теперь скобку Ли–Пуассона, отвечающую 8-мерной нильпотентной алгебре Ли, которая соответствует неголономному распределению с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$.

1. На первом этапе выбираем две образующие

$$h_1, h_2.$$

2. Единственный коммутатор задает третью независимую переменную

$$g_0 = \{h_1, h_2\}.$$

3. Коммутаторы второго порядка также будем считать независимыми переменными:

$$\begin{aligned}g_1 &= \{\{h_1, h_2\}, h_1\} = \{g_0, h_1\}, \\g_2 &= \{\{h_1, h_2\}, h_2\} = \{g_0, h_2\}.\end{aligned}$$

4. Коммутаторы третьего порядка будем полагать функциями Казимира:

$$\begin{aligned}\{h_i, g_j\} &= B_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, \\ \{B_{ij}, h_k\} &= \{B_{ij}, g_k\} = \{B_{ij}, g_0\} = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, чтобы выполнялось тождество Якоби, необходимо потребовать

$$B_{12} = B_{21}.$$

Задача. Проанализировать интегрируемость в данном пространстве гамильтоновой системы, порождаемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2). \quad (3.1)$$

2. Как и в предыдущем разделе, зафиксируем значения функций Казимира B_{ij} , тем самым получим систему на пятимерном пуассоновом многообразии $\mathbb{R}^5 = \{z = (h_1, h_2, g_0, g_1, g_2)\}$ с пуассоновой структурой

$$\mathbf{J}_z = \left(\begin{array}{cc|c|ccc} 0 & g_0 & -g_1 & & & \\ -g_0 & 0 & -g_2 & & & \\ \hline g_1 & g_2 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^T,$$

где $\mathbf{B}$ — симметричная (2×2) -матрица, составленная из констант функции Казимира.

Скобка $\mathbf{J}_z$ является вырожденной ($\text{rank } \mathbf{J}_z = 4$), ее функция Казимира имеет вид

$$C_0 = (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)g_0 - \frac{1}{2}(B_{22}g_1^2 - B_{12}g_1g_2 + B_{11}g_2^2) = \det \mathbf{B} \left(g_0 - \frac{1}{2}(\mathbf{g}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}) \right),$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$.

Уравнения движения произвольной гамильтоновой системы представляются в векторной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{h}} &= g_0 \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial H}{\partial g_0} \mathbf{g} - \mathbf{B} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{g}}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{g}_0 &= \left(\mathbf{g}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}} \right), \quad \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{B} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}},\end{aligned}$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$.

3. Для гамильтониана (3.1) уравнения движения принимают вид

$$\dot{\mathbf{h}} = g_0 \mathbf{J} \mathbf{h}, \quad \dot{g}_0 = (\mathbf{g}, \mathbf{h}), \quad \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{B} \mathbf{h}. \quad (3.2)$$

В этом случае также имеются линейные преобразования координат и времени $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}'$, $g_0 \rightarrow g'_0$, $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}'$, $t \rightarrow \tau$, сохраняющие форму уравнений (3.2) при изменении матрицы $\mathbf{B}$.

1) Растяжение вида $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$, $g_0 = \lambda g'_0$, $\mathbf{g} = \lambda^2 \mathbf{g}'$, $t = \lambda^{-1} \tau$, при этом

$$\mathbf{B}' = \lambda^{-3} \mathbf{B}.$$

2) Растяжение вида $\mathbf{h} = \lambda \mathbf{h}'$, $g_0 = g'_0$, $\mathbf{g} = \lambda^{-1} \mathbf{g}'$, $t = \tau$, при этом

$$\mathbf{B}' = \lambda^2 \mathbf{B}.$$

3) Поворот плоскости $\mathbf{h} = \mathbf{Q} \mathbf{h}'$, $\mathbf{g} = \mathbf{Q} \mathbf{g}'$, $\mathbf{Q} \in SO(2)$, $g_0 = g'_0$, $t = \tau$, при этом

$$\mathbf{B}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q}.$$

Пользуясь этими преобразованиями, матрицу $\mathbf{B}$ можно привести к виду

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем полагать это приведение выполненным.

Для интегрируемости по Лиувиллю системы (3.2) помимо гамильтониана H и функции Казимира C_0 не хватает еще одного дополнительного интеграла F . Далее будет показано, что в общем случае он отсутствует.

3.2. Случай невырожденной матрицы $\mathbf{B}$

1. Сначала рассмотрим случай $\text{Tr } \mathbf{B} = 1 + b \neq 0$. Зафиксируем уровень функции Казимира следующим образом

$$C_0 = \frac{c}{8} \text{Tr } \mathbf{B} \det \mathbf{B}, \quad c = \text{const};$$

исключим переменную g_0 :

$$g_0 = \frac{c}{8} (1 + b) + \frac{1}{2} \left(g_1^2 + \frac{1}{b} g_2^2 \right).$$

Далее введем координаты $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ и $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{B} \mathbf{q} = (q_1, b q_2), \\ h_1 &= p_1 + \frac{b}{8} q_2 \left(c + \frac{1}{b} q_1^2 + q_2^2 \right), \quad h_2 = p_2 - \frac{1}{8} q_1 \left(c + q_1^2 + b q_2^2 \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

которые приводят пуассонову структуру $\mathbf{J}_z$ к канонической форме:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

Гамильтониан в новых переменных представляется в форме

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1 + \frac{b}{8} q_2 \left(c + \frac{1}{b} q_1^2 + q_2^2 \right) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(p_2 - \frac{1}{8} q_1 \left(c + q_1^2 + b q_2^2 \right) \right)^2. \quad (3.4)$$

2. При $b = 1$ гамильтониан (3.4) оказывается инвариантным относительно вращений,

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{8} (q_1 p_2 - q_2 p_1) (c + q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{128} (q_1^2 + q_2^2) (c + q_1^2 + q_2^2)^2,$$

и, следовательно, система обладает линейным интегралом (угловым моментом):

$$F = q_1 p_2 - q_2 p_1.$$

Система является интегрируемой, и для явного интегрирования необходимо, как известно, использовать полярные координаты

$$q_1 = r \cos \varphi, \quad q_2 = r \sin \varphi.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{1}{8} p_\varphi (c + r^2) + \frac{r^2 (c + r^2)^2}{128}.$$

Исключая циклическую переменную φ и полагая $p_\varphi = \frac{d}{8}$, $d = \text{const}$, получим натуральную систему с одной степенью свободы:

$$H = \frac{1}{2} p_r^2 + U(r), \quad U(r) = \frac{r^4 + cr^2 - d}{128r^2}.$$

3. Теперь покажем численно, с помощью отображения Пуанкаре, что двоякоасимптотические поверхности к некоторому гиперболическому периодическому решению расщепляются, что приводит к неинтегрируемости в общем случае системы (3.2).

Для того чтобы определить отображение Пуанкаре, ограничим систему (3.2) на трехмерное многообразие

$$\mathcal{M}_{E,c}^3 = \left\{ (g_1, g_2, \psi) \mid C_0 = \frac{1}{8} b(1+b), \quad H = E \right\},$$

где ψ — угловая координата:

$$h_1 = \sqrt{2E} \sin \psi, \quad h_2 = \sqrt{2E} \cos \psi.$$

Представим трехмерный поток на $\mathcal{M}_{E,c}^3$ в форме

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \sqrt{2E} \sin \psi, \quad \dot{g}_2 = b\sqrt{2E} \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= \frac{g_1^2}{2} + \frac{g_2^2}{2b} + \frac{c}{8} (1+b). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В качестве секущей этого потока выберем $\psi = 0$. Далее, численно интегрируя систему (3.5) и находя пересечение траектории с указанным сечением, получим двумерное отображение Пуанкаре.

Отображение Пуанкаре в интегрируемом случае $b = 1$ приведено на рисунке 7а. Как мы видим на рисунках 7б, 8, при отклонении от интегрируемого случая сепаратрисы расщепляются. Этот факт и наличие стохастического слоя свидетельствуют об отсутствии в общем случае дополнительного первого интеграла.

4. В случае $\text{Tr } \mathbf{B} = 0$ (то есть $b = -1$) зафиксируем величину функции Казимира следующим образом: $C_0 = \frac{1}{8} c$; при этом вместо (3.3) определим другие канонические координаты:

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{2} (q_1^2 - q_2^2) - \frac{1}{8} c, \quad g_1 = q_1, \quad g_2 = -q_2, \\ h_1 &= p_1 - \frac{1}{8} q_2 (2c - q_1^2 + q_2^2), \quad h_2 = p_2 - \frac{1}{8} q_1 (c + q_1^2 - q_2^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рис. 7. Отображение Пуанкаре при фиксированных параметрах $c = -40$, $E = 140$.

Рис. 8. Отображение Пуанкаре и пересечение сепаратрис при фиксированных параметрах $b = 1.3$, $c = -40$, $E = 140$.

Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1 - \frac{1}{8} q_2 (2c - q_1^2 + q_2^2) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(p_2 - \frac{1}{8} q_1 (c + q_1^2 - q_2^2) \right)^2.$$

3.3. Случай вырожденной матрицы В

Пусть $\det \mathbf{B} = b = 0$, тогда $\mathbf{J}_z$ допускает функцию Казимира вида

$$C_0 = g_2.$$

В случае $g_2 \neq 0$ определим канонические координаты с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} g_0 &= g_2 q_2 + \frac{1}{2} q_1^2, & g_1 &= q_1, \\ h_1 &= p_1, & h_2 &= p_2 - \frac{1}{6} q_1^3 - g_2 q_1 q_2. \end{aligned}$$

Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} \left(p_1 - \frac{1}{6} q_1^3 - g_2 q_1 q_2 \right)^2.$$

Если $g_2 = 0$, тогда $\text{rank } \mathbf{J}_z = 2$, следовательно, существуют еще две функции Казимира:

$$C_1 = \frac{g_1^2}{2} - g_0, \quad C_2 = \frac{g_1^3}{3} - g_0 g_1 - h_2.$$

Таким образом, задача сводится к системе с одной степенью свободы. Действительно, зафиксировав уровни функции Казимира $C_1 = c_1$, $C_2 = c_2$, исключим переменные h_2 , g_0 ,

$$g_0 = \frac{g_1^2}{2} - c_1, \quad h_2 = c_1 g_1 - c_2 - \frac{1}{6} g_1^3,$$

и определим канонические переменные (p, q) :

$$h_1 = p, \quad g_1 = q, \quad \{q, p\} = 1.$$

Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \left(c_1 q - c_2 - \frac{1}{6} q^3 \right)^2.$$

Заключение

В работе было показано, что ряд принципиально важных задач субримановой геометрии тесно связан с интенсивно обсуждаемыми в литературе модельными системами, которые описывают динамику материальной точки в потенциальном и магнитном полях. В некоторой степени это было отмечено в работе [18], в которой задача субримановой геометрии сведена к системе Янга–Миллса, первоначально возникшей в квантовой теории поля [6].

Основным выводом для рассмотренных в работе систем является результат (полученный с применением численных методов) об отсутствии в общем случае дополнительного вещественно-аналитического интеграла. Тем не менее, оказалось, что не всегда из отсутствия интеграла можно сделать какие-либо выводы о качественном поведении системы. Укажем лишь, что оно, как правило, носит иррегулярный и непредсказуемый характер.

С традиционной точки зрения, иррегулярность динамики говорит о невозможности оптимального управления рассмотренными в настоящей работе системами. Однако использование идей хаотической динамики в геометрической теории управления [8, 13] выглядит весьма перспективным. На этом пути имеется возможность обнаружения новых эффектов в управлении (достижимых с использованием хаоса). Эти вопросы обсуждаются достаточно давно, хотя обычно без надлежащего теоретического обоснования [20].

References

- [1] Ardentov A. A., Sachkov Yu. L. Solution to Euler's elastic problem, *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 4, pp. 633–643; see also: *Avtomat. i Telemekh.*, 2009, no. 4, pp. 78–88.
- [2] Dovbysh S. A., Borisov A. V. Nonintegrability of the classical homogeneous three-component Yang–Mills field, in *Numerical modelling in the problems of mechanics*, Moscow: MGU, 1991, pp. 157–166 (Russian).

- [3] Ziglin S.L. Bifurcation of solutions and the nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics: 2, *Funct. Anal. Appl.*, 1983, vol.17, no.1, pp.6–17; see also: *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1983, vol. 17, no. 1, pp. 8–23.
- [4] Kozlov V.V. *General theory of vortices*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 67, Berlin: Springer, 2003.
- [5] Nikolaevskii E.S., Shur L.N. Nonintegrability of the classical Yang–Mills fields, *JETP Lett.*, 1982, vol. 36, no. 5, pp. 218–221; see also: *Pis'ma v Zh. Èksper. Teoret. Fiz.*, 1982, vol. 36, no. 5, pp. 176–179.
- [6] Nikolaevskii E.S., Shchur L.N. The nonintegrability of the classical Yang–Mills equations, *JETP*, 1983, vol. 58, no. 1, pp. 1–7; see also: *Zh. Èksper. Teoret. Fiz.*, 1983, vol. 85, no. 1, pp. 3–13.
- [7] Sachkov Yu.L. An exponential mapping in the generalized Dido problem, *Sb. Math.*, 2003, vol. 194, nos. 9–10, pp. 1331–1359; see also: *Mat. Sb.*, 2003, vol. 194, no. 9, pp. 63–90.
- [8] Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. *Control theory from the geometric viewpoint*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 87, Berlin: Springer, 2004.
- [9] Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. An intrinsic approach to the control of rolling bodies: 1, in *Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control (Phoenix, Ariz., Dec 1999): Vol. 1*, pp. 431–435.
- [10] Borisov A.V., Mamaev I.S., Treschev D.V. Rolling of a rigid body without slipping and spinning: Kinematics and dynamics, *J. Appl. Nonlinear Dyn.*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 161–173.
- [11] Carnegie A., Percival I.C. Regular and chaotic motion in some quartic potentials, *J. Phys. A*, 1984, vol. 17, no. 4, pp. 801–813.
- [12] Dahlqvist P., Russberg G. Existence of stable orbits in the x^2y^2 potential, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 65, no. 23, pp. 2837–2838.
- [13] Jurdjevic V. *Geometric control theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 52, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [14] Marcinek R., Pollak E., Zakrzewski J. Yang–Mills classical mechanics revisited, *Phys. Lett. B*, 1994, vol. 327, nos. 1–2, pp. 67–69.
- [15] Martens C.C., Waterland R.L., Reinhardt W.P. Classical, semiclassical, and quantum mechanics of a globally chaotic system: Integrability in the adiabatic approximation, *J. Chem. Phys.*, 1989, vol. 90, no. 4, pp. 2328–2337.
- [16] Matinyan S.G., Savvidy G.K., Ter-Arutyunyan-Savvidy N.G. Classical Yang–Mills mechanics: Nonlinear color oscillations, *JETP*, 1981, vol. 53, no. 3, pp. 421–425; see also: *Zh. Èksp. Teor. Fiz.*, 1981, vol. 80, no. 3, pp. 830–833.
- [17] Montgomery R. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Math. Surveys Monogr., vol. 91, Providence, R.I.: AMS, 2006.
- [18] Montgomery R., Shapiro M., Stolin A. A nonintegrable sub-Riemannian geodesic flow on a Carnot group, *J. Dyn. Control Syst.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 519–530.
- [19] Myasnychenko O. Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem, *J. Dyn. Control Syst.*, 2002, vol. 8, no. 4, pp. 573–597.
- [20] Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199.
- [21] Taimanov I.A. Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics, *J. Dyn. Control Syst.*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 129–147.
- [22] Sachkov Yu. Sub-Riemannian geodesics on the free Carnot group with the growth vector (2, 3, 5, 8), arXiv:1404.7752 (2014).
- [23] Savvidy G.K. The Yang–Mills classical mechanics as a Kolmogorov K-system, *Phys. Lett. B*, 1983, vol. 130, no. 5, pp. 303–307.
- [24] Sohos G., Bountis T., Polymilis H. Is the Hamiltonian $H = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2y^2)/2$ completely chaotic?, *Nuovo Cimento B (11)*, 1989, vol. 104, no. 3, pp. 339–352.
- [25] Vershik A.M., Gershkovich V. Ya. Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems, in *Dynamical systems: 7. Integrable systems nonholonomic dynamical systems*, V.I. Arnol'd, S.P. Novikov (Eds.), Encyclopaedia Math. Sci., vol. 16, Berlin: Springer, 1994, pp. 1–81.

- [26] Jung Ch., Scholz H.-J. Chaotic scattering off the magnetic dipole, *J. Phys. A*, 1988, vol. 21, no. 10, pp. 2301–2311.
- [27] Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A. Integrability of Hamiltonians with third- and fourth-degree polynomial potentials, *J. Math. Phys.*, 1983, vol. 24, no. 9, pp. 2289–2295.
- [28] Maciejewski A. J., Przybylska M. Darboux points and integrability of Hamiltonian systems with homogeneous polynomial potential, *J. Math. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 6, 062901, 33 pp.
- [29] Kozlov V. V. Canonical Gibbs distribution and thermodynamics of mechanical systems with a finite number of degrees of freedom, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1999, vol. 4, no. 2, pp. 44–54.
- [30] Kozlov V. V. *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), vol. 31, Berlin: Springer, 1996.
- [31] Kozlov V. V. Polynomial conservation laws for the Lorentz and the Boltzmann – Gibbs gases, *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 2, pp. 253–290; see also: *Uspekhi Mat. Nauk*, 2016, vol. 71, no. 2(428), pp. 81–120.
- [32] Yoshida H. A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential, *Phys. D*, 1987, vol. 29, no. 1, pp. 128–142.
- [33] Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials, *J. Math. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 12, pp. 3070–3079.
- [34] Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential of P -type: 1, *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, no. 4, pp. 715–721.
- [35] Kamchatnov A. M., Sokolov V. V. Nonlinear waves in two-component Bose – Einstein condensates: Manakov system and Kowalevski equations, *Phys. Rev. A*, 2015, vol. 91, no. 4, 043621, 11 pp.
- [36] Marikhin V. G., Sokolov V. V. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 59–70.
- [37] Jaroensutasinee K., Rowlands G. Stability analysis of $x = +or - y$ periodic orbits in a $1/2(Q - xy)^2$ potential, *J. Phys. A*, 1994, vol. 27, no. 4, pp. 1163–1178.
- [38] Hermes H. Nilpotent approximations of control systems and distributions, *SIAM J. Control Optim.*, 1986, vol. 24, no. 4, pp. 731–736.

Integrability and nonintegrability of sub-Riemannian geodesic flows on Carnot groups

Ivan A. Bizyaev¹, Alexey V. Borisov², Alexander A. Kilin³, Ivan S. Mamaev⁴

^{1,2,3,4}Udmurt State University

ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

²National Research Nuclear University “MEPhI”

Kashirskoe sh. 31, Moscow, 115409, Russia

⁴M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

ul. Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069, Russia

¹bizaev_90@mail.ru, ²borisov@rcd.ru, ³aka@rcd.ru, ⁴mamaev@rcd.ru

This paper is concerned with two systems from sub-Riemannian geometry. One of them is defined by a Carnot group with three generatrices and growth vector (3, 6, 14), the other is defined by two generatrices and growth vector (2, 3, 5, 8). Using a Poincaré map, the nonintegrability of the above systems in the general case is shown. In addition, particular cases are presented in which there exist additional first integrals.

MSC 2010: 53C17, 37C10

Keywords: sub-Riemannian geometry, Carnot group, Poincaré map, first integrals

Received October 16, 2016, accepted November 20, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 129–146 (Russian)