УДК: 531.36, 531.352

MSC 2010: 37J25, 70F15, 70K30, 70K45

Об устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки в случае резонанса основного типа

Б. С. Бардин, Е. А. Чекина

Рассматривается движение спутника относительно центра масс на круговой орбите. Исследуется задача об орбитальной устойчивости его плоских маятниковых колебаний. Спутник моделируется твердым телом, обладающим геометрией масс пластинки. Предполагается, что в невозмущенном движении наименьшая ось инерции спутника лежит в плоскости орбиты его центра масс, то есть плоскость спутника-пластинки перпендикулярна плоскости орбиты.

В данной работе выполнен нелинейный анализ орбитальной устойчивости плоских маятниковых колебаний для неисследованных ранее значений параметров задачи, отвечающих границам областей устойчивости в первом приближении, на которых реализуются резонансы первого или второго порядков. Доказано, что на указанных границах плоские маятниковые колебания либо формально орбитально устойчивы, либо орбитально устойчивы в третьем приближении.

Ключевые слова: гамильтонова система, нормальная форма, плоское периодическое движение, резонанс, спутник, орбитальная устойчивость

Получено 02 ноября 2017 года

После доработки 19 ноября 2017 года

Результаты данной работы получены в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) в рамках выполнения государственного задания (проект № 3.3858.2017/4.6).

Бардин Борис Сабирович

bsbardin@yandex.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125871, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4

Институт машиноведения им. А. А. Благодного Российской академии наук

125993, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4

Чекина Евгения Алексеевна

chekina_ev@mail.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125871, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Спутник моделируется твердым телом, размеры которого малы по сравнению с размерами орбиты его центра масс. В этом случае задачу о движении спутника можно рассматривать в ограниченной постановке [1], предполагая, что движение спутника относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс по орбите, которую далее будем считать круговой.

Уравнения движения спутника относительно центра масс допускают семейства частных решений, соответствующие плоским маятниковым движениям спутника, при которых одна из его главных центральных осей инерции направлена перпендикулярно плоскости орбиты [1]. Плоские движения спутника представляют собой в этом случае либо периодические колебания или вращения, либо движения, асимптотически приближающиеся к неустойчивому положению относительного равновесия, при котором наименьшая из двух главных центральных осей инерции спутника, лежащих в плоскости орбиты, направлена вдоль радиус-вектора его центра масс. Плоские маятниковые периодические движения неустойчивы по отношению к возмущениям координат и скоростей, однако представляет интерес задача об их орбитальной устойчивости.

Задача об орбитальной устойчивости плоских периодических движений спутника неоднократно исследовалась ранее в различных постановках. Наиболее полные и строгие результаты получены для случая динамически симметричного спутника. В работе [2] А. П. Маркеевым впервые была предложена общая методика строгого анализа орбитальной устойчивости плоских периодических движений спутника, и на ее основе была исследована орбитальная устойчивость для случая сплюснутого симметричного спутника. В работах [3, 4] результаты, полученные в [2], были уточнены, а также был рассмотрен случай вытянутого симметричного спутника. В работах [5, 6] было выполнено исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений симметричного спутника на границах областей параметрического резонанса.

Исследование орбитальной устойчивости плоских периодических движений несимметричного спутника представляет собой значительно более сложную задачу, которая еще далека от своего полного и строгого решения. Исследование данной задачи в строгой нелинейной постановке было начато в работах [7, 8], где наряду с изложением общей методики исследования были рассмотрены некоторые частные случаи геометрии масс спутника, а также исследован случай колебаний с малыми амплитудами. Более детальный анализ орбитальной устойчивости плоских периодических движений был выполнен для спутника, имеющего геометрию масс пластинки, в работах [9–12]. В работе [10] проведен линейный анализ устойчивости плоских колебаний, а в работе [11] — нелинейный анализ плоских вращений спутника-пластинки, который в невозмущенном движении лежит в плоскости орбиты. В работах [9, 12] выполнено строгое исследование орбитальной устойчивости плоских периодических колебаний и вращений спутника-пластинки в предположении, что в невозмущенном движении плоскость пластинки перпендикулярна плоскости орбиты. Для значений параметров, лежащих внутри областей устойчивости, в первом приближении были получены выводы об устойчивости для большинства начальных условий и формальной устойчивости. Анализ устойчивости на границах указанных областей не проводился.

Целью данной работы является строгое исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки на границах областей устойчивости в первом приближении, отвечающих резонансам первого и второго порядков. Для решения данной зада-

чи применяется алгоритм, разработанный в [13], идея которого заключается в построении и нормализации симплектического отображения, порождаемого фазовым потоком уравнений движения спутника.

2. Гамильтониан уравнений возмущенного движения

Для описания движения спутника относительно центра масс введем орбитальную систему координат $OXYZ$, оси OX , OY , OZ которой направлены, соответственно, вдоль радиус-вектора центра масс O спутника относительно притягивающего центра, по трансверсали и по нормали к орбите, и жестко связанную со спутником систему координат $Oxyz$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника. Далее предполагается, что спутник имеет геометрию масс пластинки, то есть $C = A + B$, где A , B , C — главные центральные моменты инерции спутника относительно осей Ox , Oy , Oz соответственно.

Ориентацию осей связанной системы $Oxyz$ в орбитальной системе $OXYZ$ будем задавать при помощи углов Эйлера ψ , θ , ϕ . Вводя соответствующие им безразмерные импульсы p_ψ , p_θ , p_ϕ , уравнения движения спутника можно записать в канонической форме с гамильтонианом [1, 2]

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\theta_A} (\sin^2 \varphi + \theta_A \cos^2 \varphi) \operatorname{ctg}^2 \vartheta + \frac{1}{\theta_A + 1} \right] p_\varphi^2 + \frac{\cos^2 \varphi + \theta_A \sin^2 \varphi}{2\theta_A} p_\vartheta^2 + \\ & + \frac{(\sin^2 \varphi + \theta_A \cos^2 \varphi)(p_\psi^2 - 2p_\psi p_\varphi \cos \vartheta)}{2\theta_A \sin^2 \vartheta} + \\ & + \frac{(\theta_A - 1) \sin 2\varphi}{2\theta_A \sin \vartheta} p_\vartheta (p_\varphi \cos \vartheta - p_\psi) - p_\psi + \frac{3}{2} [(\theta_A - 1)a_{11}^2 + \theta_A a_{13}^2]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\theta_A = A/B$ — безразмерный инерционный параметр задачи. Величины a_{11} и a_{13} задаются формулами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\psi) \cos(\phi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi), \\ a_{13} &= \sin(\psi) \sin(\theta). \end{aligned}$$

Независимой переменной в уравнениях движения является истинная аномалия $\nu = \omega_0 t$, где ω_0 — угловая скорость радиус-вектора центра масс.

Уравнения движения допускают семейство частных решений, на котором

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad p_\vartheta = p_\varphi = 0, \quad (2.2)$$

а изменение переменных ψ , p_ψ описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$h = \frac{1}{2}(p_\psi - 1)^2 + \frac{3}{2} \sin^2 \psi. \quad (2.3)$$

Это семейство решений описывает плоские движения спутника-пластинки в случае, когда плоскость пластинки перпендикулярна плоскости орбиты.

Если значение константы интеграла энергии h удовлетворяет неравенству $h < 3/2$, то решение системы уравнений с гамильтонианом (2.3) имеет вид

$$\psi^*(\nu, k) = \arcsin \left[k \operatorname{sn} \left(\sqrt{3}\nu, k \right) \right], \quad p_\psi^*(\nu, k) = 1 + \sqrt{3}k \operatorname{cn} \left(\sqrt{3}\nu, k \right). \quad (2.4)$$

Этому решению соответствуют плоские маятниковые колебания с амплитудой ψ_0 ($\psi_0 < \pi/2$) и частотой $\omega = \pi\sqrt{3}/2K(k)$, где $k = \sin(\psi_0)$, а $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Выполним каноническую замену переменных $\psi, p_\psi \rightarrow w, I$ по формулам

$$\psi = \psi^*(w/\Omega, k), \quad p_\psi = p_\psi^*(w/\Omega, k), \quad (2.5)$$

в которых $k = k(I)$ — функция, обратная к

$$I = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}[E(k) - (1 - k^2)K(k)],$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

В переменных w, I функция Гамильтона (2.3) примет вид $h = 3k^2(I)/2$, а невозмущенное движение описывается соотношениями $I = I_0$, $w = \omega\nu + w_0$.

Введем теперь возмущения q_1, q_2, p_1, p_2, r :

$$\varphi = q_1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} + q_2, \quad p_\varphi = p_1, \quad p_\vartheta = p_2, \quad I = I_0 + r.$$

Гамильтониан возмущенного движения имеет следующий вид [9]:

$$H = H_2 + H_4 + O_6, \quad (2.6)$$

$$H_2 = r + \tilde{H}_2(q_1, q_2, p_1, p_2, w), \quad (2.7)$$

$$H_4 = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial I_0} r^2 + r\Psi(q_1, q_2, p_1, p_2, w) + \tilde{H}_4(q_1, q_2, p_1, p_2, w), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2 = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{(1 - \theta_A)\alpha_1}{2\theta_A} q_1^2 + \frac{3}{2} \alpha_2 q_1 q_2 + \frac{(1 - \theta_A)p_\psi^*}{\theta_A} q_1 p_2 + \frac{\alpha_1 - 3\theta_A}{2} q_2^2 + \right. \\ \left. + p_\psi^* q_2 p_1 + \frac{p_1^2}{2(\theta_A + 1)} + \frac{p_2^2}{2\theta_A} \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Psi = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{(1 - \theta_A)}{2\theta_A} \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_0} q_1^2 + \frac{3}{2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial I_0} q_1 q_2 + \frac{(1 - \theta_A)}{\theta_A} \frac{\partial p_\psi^*}{\partial I_0} q_1 p_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_0} q_2^2 + \frac{\partial p_\psi^*}{\partial I_0} q_2 p_1 \right\}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{(\theta_A - 1)\alpha_1}{6\theta_A} q_1^4 - \alpha_2 q_1^3 q_2 + \frac{2(\theta_A - 1)p_\psi^*}{3\theta_A} q_1^3 p_2 - \frac{(\theta_A - 1)(\alpha_1 - 3\theta_A)}{2\theta_A} q_1^2 q_2^2 - \right. \\ - \frac{(\theta_A - 1)p_\psi^*}{\theta_A} q_1^2 q_2 p_1 + \frac{(\theta_A - 1)}{2\theta_A} q_1^2 p_2^2 - \frac{\alpha_2}{4} q_1 q_2^3 - \frac{(\theta_A - 1)p_\psi^*}{2\theta_A} q_1 q_2^2 p_2 \\ \left. - \frac{(\theta_A - 1)}{\theta_A} q_1 q_2 p_1 p_2 + \alpha_3 q_2^4 + \frac{5}{6} p_\psi^* q_2^3 p_1 + \frac{1}{2} q_2^2 p_1^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\alpha_1 = 3\theta_A \cos^2 \psi^* + p_\psi^{*2}, \quad \alpha_2 = (\theta_A - 1) \sin 2\psi^*, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}\theta_A \sin^2 \psi^* + \frac{1}{3}p_\psi^{*2}. \quad (2.12)$$

Через O_m в (2.6) и далее обозначен сходящийся ряд, начинающийся с членов порядка не ниже m . Гамильтониан (2.6) представляет собой 2π -периодическую функцию новой независимой переменной $\tau = \omega\nu$ и зависит от двух параметров: инерционного параметра θ_A и амплитуды колебаний невозмущенного движения ψ_0 .

Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний эквивалентна задаче об устойчивости системы с гамильтонианом (2.6) по отношению к переменным q_1, q_2, p_1, p_2, r .

3. Об орбитальной устойчивости в линейном приближении

В первом приближении задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия линейной системы с гамильтонианом (2.9). Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0. \quad (3.1)$$

Коэффициент a_1 — след матрицы монодромии $\mathbf{X}(2\pi)$ линейной системы, коэффициент a_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка.

Выводы об устойчивости линейной системы с гамильтонианом (2.9) можно сделать на основании анализа корней характеристического уравнения (3.1). Если уравнение (3.1) имеет корень с модулем, не равным единице, то линейная система неустойчива и, как следствие, неустойчива нелинейная система с гамильтонианом (2.6). Последнее означает орбитальную неустойчивость исследуемого периодического движения. Если же все корни характеристического уравнения (3.1) простые и имеют модули, равные единице, то линейная система с гамильтонианом (2.9) устойчива. В плоскости коэффициентов a_1, a_2 область устойчивости линейной системы задается неравенствами Ляпунова

$$\begin{cases} -2 < a_2 < 6, \\ 4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Из устойчивости линейной системы не следует устойчивости в полной нелинейной системе. В этом случае для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости исследования линейной системы недостаточно.

Анализ корней характеристического уравнения (3.1) был выполнен в работе [9]. В плоскости параметров задачи ψ_0 и θ_A были построены области орбитальной устойчивости в линейном приближении, они представлены на рисунках 1–2 (незаштрихованные области D_1, D_2, D_3). В областях устойчивости в линейном приближении характеристическое уравнение (3.1) имеет две пары комплексно-сопряженных корней $\rho_k = e^{i\lambda_k 2\pi}$, $\bar{\rho}_k = e^{-i\lambda_k 2\pi}$ ($k = 1, 2$), где λ_k — действительные числа.

На рисунке 1 пунктирными линиями внутри области D_3 изображены кривые, отвечающие резонансам четвертого порядка, на которых выполняются равенства $\rho_1^4 = 1$ (кривая,

Рис. 1. Области устойчивости в линейном приближении.

Рис. 2. Области устойчивости в линейном приближении при малых значениях амплитуд (увеличение).

соединяющая точки M_1 и M_2) или $\rho_2^4 = 1$ (кривая, соединяющая точки M_2 и M_3). Простой резонанс четвертого порядка $\rho_2^4 = 1$ имеет место и в области D_2 . Соответствующая ему резонансная кривая в увеличенном масштабе показана пунктиром на рисунке 2. Речь об этих кривых пойдет в параграфе 4.

Отметим, что в работе [9] было также выполнено нелинейное исследование орбитальной устойчивости маятниковых колебаний внутри областей D_1 , D_2 , D_3 и указаны области устойчивости для большинства начальных условий, области формальной устойчивости и неустойчивости.

При малых значениях ψ_0 границы областей D_1 , D_2 можно задать аналитически [9]. Граничные кривые γ_2 и γ_3 , исходящие из точки $\theta_A = 91/85$, при достаточно малых значениях ψ_0 задаются уравнениями

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{91}{85} - \frac{24}{85}\psi_0\sqrt{3} + \frac{501}{2890}\psi_0^2 + O(\psi_0^3), \\ \theta_A &= \frac{91}{85} + \frac{24}{85}\psi_0\sqrt{3} + \frac{501}{2890}\psi_0^2 + O(\psi_0^3),\end{aligned}\quad (3.3)$$

соответственно, а граничная кривая γ_4 , исходящая из точки $\theta_A = -1/5 + 8\sqrt{6}/15$, — уравнением

$$\theta_A = -\frac{1}{5} + \frac{8}{15}\sqrt{6} - \frac{4}{625}(71\sqrt{6} - 386)\psi_0^2 + O(\psi_0^3). \quad (3.4)$$

Граничная кривая γ_1 соответствует случаю динамически симметричного спутника, на ней $\theta_A = 1$. В этом случае угол φ является циклической координатой, поэтому можно сделать вывод об орбитальной неустойчивости плоских маятниковых колебаний спутника. На границах γ_j , $j = 2, \dots, 7$, анализ орбитальной устойчивости ранее не проводился.

На основе численного интегрирования линейной системы с гамильтонианом (2.9) было установлено, что на граничных кривых γ_2 , γ_3 и γ_6 реализуется резонанс второго порядка, то есть характеристическое уравнение (3.1) имеет кратный корень, равный -1 , а на границе γ_5 имеет место резонанс первого порядка, то есть характеристическое уравнение (3.1) имеет кратный корень, равный 1 . Данные резонансы первого и второго порядков иногда называют резонансами основного типа [14]. Граничные кривые γ_4 , γ_7 соответствуют комбинационному резонансу, при котором корни характеристического уравнения (3.1) удовлетворяют

соотношению $\rho_1 \rho_2 = 1$. На основе численного интегрирования линейной системы также было установлено, что для всех перечисленных выше границ матрица монодромии $\mathbf{X}(2\pi)$ линейной системы не приводится к диагональному виду. Это означает, что на границах областей D_1, D_2, D_3 линейная система с гамильтонианом (2.9) неустойчива. Последнее, однако, не означает орбитальной неустойчивости плоских периодических движений спутника в нелинейной постановке задачи. Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости (или неустойчивости) при значениях параметров, отвечающих граничным кривым, необходимо выполнить нелинейный анализ. Ниже такие выводы будут получены для границ $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ и γ_6 , отвечающих резонансам первого и второго порядков.

4. Нелинейный анализ орбитальной устойчивости

Для решения вопроса об орбитальной устойчивости можно ограничиться исследованием движения на нулевом изоэнергетическом уровне $H = 0$, отвечающем невозмущенному движению [11]. На нулевом уровне энергии из уравнения $H = 0$ имеем $r = -K(q_1, q_2, p_1, p_2, w)$. При достаточно малых q_1, q_2, p_1, p_2 разложение $K(q_1, q_2, p_1, p_2, w)$ в ряд по степеням q_1, q_2, p_1, p_2 можно получить в явном виде

$$K = K_2 + K_4 + O_6, \quad (4.1)$$

где

$$K_2 = \tilde{H}_2, \quad K_4 = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial I} \tilde{H}_2^2 - \tilde{H}_2 \Psi + \tilde{H}_4. \quad (4.2)$$

Функции $\Psi, \tilde{H}_2, \tilde{H}_4$ определены формулами (2.9)–(2.12).

Принимая теперь возрастающую по времени координату w за новую независимую переменную, рассмотрим редуцированную каноническую систему (уравнения Уиттекера)

$$\frac{dq_j}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (4.3)$$

описывающую изменение переменных q_1, q_2, p_1, p_2 на нулевом изоэнергетическом уровне.

Задача об орбитальной устойчивости плоских маятниковых колебаний сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия редуцированной системы (4.3).

Следуя общей методике нелинейного анализа устойчивости гамильтоновых систем [15], необходимо построить каноническую замену переменных $q_j, p_j \rightarrow u_j, v_j$ ($j = 1, 2$), приводящую редуцированную систему (4.3) к удобному для исследования устойчивости виду, для которого разложение гамильтониана (4.1) до членов некоторой конечной степени имеет наиболее простую (нормальную) форму. В случае резонанса второго порядка гамильтониан (4.1) приводится к следующей нормальной форме [13, 16]:

$$\Gamma = \frac{\delta}{2} v_1^2 + \lambda(u_2^2 + v_2^2) + a_{40} u_1^4 + a_{22} u_1^2(u_2^2 + v_2^2) + a_{04} (u_2^2 + v_2^2)^2 + \Gamma^{(6)}, \quad (4.4)$$

где $\delta = \pm 1$, а коэффициенты $\lambda, a_{40}, a_{22}, a_{04}$ — постоянные величины. Через $\Gamma^{(6)}$ обозначен сходящийся степенной ряд с 4π -периодическими по w коэффициентами, не содержащий членов ниже шестой степени.

Выводы об устойчивости (или неустойчивости) положения равновесия системы с гамильтонианом (4.4) можно сделать на основании следующих достаточных условий [16].

Если $\delta a_{40} < 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если $\delta a_{40} > 0$, то имеет место устойчивость при учете в гамильтониане (4.4) членов не выше четвертой степени. Если же одновременно выполняются неравенства $\delta a_{40} > 0$ и $\delta \lambda > 0$, то положение равновесия формально устойчиво. В случае $a_{40} = 0$ для решения вопроса об устойчивости необходимо проводить дополнительный анализ с учетом членов не ниже шестой степени в разложении гамильтониана (4.4).

В общем случае коэффициенты нормальной формы можно вычислить только численно. Применение для этой цели классического метода Биркгофа или метода Депри–Хори приводит к довольно громоздким расчетам. В работе [17] был предложен более удобный с алгоритмической точки зрения метод нормализации, основанный на построении симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком гамильтоновой системы. На основе этого метода в [13] был разработан конструктивный алгоритм построения нормальной формы функции Гамильтона в случае резонанса второго порядка. В данном параграфе исследование орбитальной устойчивости проводится на основании указанного алгоритма, поэтому кратко опишем его суть.

Сначала в редуцированной системе с гамильтонианом (4.1) выполняется каноническая линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

заданная матрицей

$$\mathbf{N} = (\delta_1 c_1 \mathbf{u}, \delta_2 c_2 \mathbf{r}, c_1 \mathbf{v}, c_2 \mathbf{s}), \quad (4.6)$$

где через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ обозначены действительная и мнимая часть собственного вектора матрицы $\mathbf{X}(4\pi) = \mathbf{X}(2\pi)^2$, отвечающего простому комплексному корню $\rho = e^{i4\pi\lambda}$ характеристического уравнения $\det(\mathbf{X}(4\pi) - \rho \mathbf{E}) = 0$, а через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — собственный и присоединенный векторы, отвечающие кратному корню $\rho = 1$. Коэффициенты c_1 и c_2 в (4.6) вычисляются по формулам

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v}|}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s}|}}. \quad (4.7)$$

Затем строится симплектическое отображение, генерируемое фазовым потоком системы с новым гамильтонианом H^* , который получается путем подстановки формул линейной замены переменных (4.5) в функцию Гамильтона (4.1).

Данное отображение, с учетом того, что в разложении гамильтониана (4.1) отсутствуют члены третьей степени, имеет вид [13, 17]

$$\begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_1^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P_1^{(0)}} + O_4 \\ Q_2^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P_2^{(0)}} + O_4 \\ P_1^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_1^{(0)}} + O_4 \\ P_2^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_2^{(0)}} + O_4 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Матрица $\mathbf{G}$ имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & \cos 4\pi \sigma & 0 & \sin 4\pi \sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin 4\pi \sigma & 0 & \cos 4\pi \sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma = \delta_2 \lambda, \quad \delta_1 = \text{sign}(\mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{v}), \quad \delta_2 = \text{sign}(\mathbf{r}^T \mathbf{I} \mathbf{s}), \quad (4.9)$$

где

$$\lambda = \arccos a, \quad a = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 x_{jj}(4\pi) - 1, \quad (4.10)$$

$x_{jj}(4\pi)$ — диагональные элементы матрицы монодромии $\mathbf{X}(4\pi)$ линейной системы с гамильтонианом (2.9).

Через F_4 обозначена форма четвертой степени

$$F_4(Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=4} f_{i_1 i_2 j_1 j_2} Q_1^{(0) i_1} Q_2^{(0) i_2} P_1^{(0) j_1} P_2^{(0) j_2}, \quad (4.11)$$

где $f_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(2\pi)$. Функции $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t)$ определяются в результате решения уравнений

$$\frac{d\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}}{dt} = -g_{i_1 i_2 j_1 j_2} \quad (i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = 4) \quad (4.12)$$

с начальными условиями $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}(0) = 0$.

Величины $g_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ в правых частях уравнений (4.12) являются коэффициентами формы

$$G_4(U_1, U_2, V_1, V_2, t) = \sum_{i_1+i_2+j_1+j_2=4} g_{i_1 i_2 j_1 j_2} U_1^{i_1} U_2^{i_2} V_1^{j_1} V_2^{j_2}, \quad (4.13)$$

которая получена подстановкой

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^*(t) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

в форму $H_4^*(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$. Матрица $\mathbf{X}^*(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{X}^*}{dt} = \mathbf{I} \mathbf{H}_2^* \mathbf{X}^* \quad (4.15)$$

с начальным условием $\mathbf{X}^*(0) = \mathbf{E}_4$. Через $\mathbf{H}_2^*$ обозначена матрица Гесса квадратичной части H_2^* гамильтониана H^* .

Таким образом, коэффициенты формы F_4 получаются в результате численного интегрирования системы из 51 уравнения (35 уравнений (4.12) для $\phi_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ и 16 уравнений для элементов x_{jl}^* матрицы $\mathbf{X}^*(t)$) на интервале $[0, 4\pi]$.

Необходимые для получения выводов об устойчивости коэффициенты δ и a_{40} нормальной формы (4.4) вычисляются по формулам

$$\delta = \delta_1 \delta_2, \quad a_{40} = -\frac{\delta_2 f_{4000}}{64\pi^3}, \quad (4.16)$$

а коэффициент λ — по формуле (4.10); величины δ_1 и δ_2 задаются формулами (4.9).

При помощи вышеизложенного алгоритма для значений параметров, отвечающих граничным кривым γ_2 , γ_3 , γ_5 , γ_6 , численно определялись коэффициенты нормальной формы (4.4), затем на основе приведенных выше достаточных условий были получены выводы об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки. Заметим, что на граничной кривой γ_5 имеет место резонанс первого порядка, то есть характеристическое уравнение (3.1) имеет кратный корень, равный 1. В общем случае при резонансе первого порядка нормализованный гамильтониан содержит члены третьей степени, и для вычисления коэффициентов нормальной формы нужно применять алгоритм, который несколько отличается от изложенного здесь. Однако в данной задаче сама исходная функция Гамильтона не содержит членов третьей степени, поэтому и на граничной кривой γ_5 оказалось возможным выполнить исследование орбитальной устойчивости на основе методики, используемой в данной статье. В частности, гамильтониан редуцированной системы приводится к нормальной форме (4.4), коэффициенты которой вычисляются при помощи вышеизложенного алгоритма.

На основании численного анализа были получены следующие результаты.

1. Для всех значений параметров на граничной кривой γ_2 коэффициент $a_{40} < 0$, $\delta = -1$, а $\lambda > 0$. Таким образом, в этом случае выполнено условие $\delta a_{40} > 0$, которое означает, что при учете в гамильтониане задачи членов не выше четвертой степени имеет место орбитальная устойчивость плоских колебаний.
2. Для всех значений параметров на граничной кривой γ_3 величина $\lambda > 0$, а коэффициент a_{40} и величина δ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. На рисунке 2 пунктиром указан участок граничной кривой γ_3 , на котором $\delta = 1$ и $a_{40} > 0$. В точке P_1 ($\theta_A = 1.072158$, $\psi_0 = 0.003206$), где кривую γ_3 пересекает кривая резонанса четвертого порядка, происходит смена знака величины δ и коэффициента a_{40} , так что на оставшейся части кривой γ_3 , показанной сплошной линией, $\delta = -1$, а $a_{40} < 0$. Таким образом, на участке кривой γ_3 , выделенном пунктиром, выполняются неравенства $\delta a_{40} > 0$ и $\delta \lambda > 0$, что гарантирует формальную орбитальную устойчивость плоских колебаний. На участке кривой γ_3 , показанном сплошной линией, выполнено только неравенство $\delta a_{40} > 0$, поэтому здесь можно лишь утверждать, что имеет место орбитальная устойчивость плоских колебаний в третьем приближении, то есть при учете в гамильтониане задачи членов не выше четвертой степени.
3. Для всех значений параметров на граничной кривой γ_5 величина $\lambda > 0$, а коэффициент a_{40} и величина δ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. На рисунке 1 пунктиром указан участок граничной кривой γ_5 , на котором $a_{40} > 0$, $\delta = 1$, а сплошной линией — участок кривой, где $a_{40} < 0$, $\delta = -1$. Эти участки разделяются точкой M_1 ($\theta_A = 0.9355504$, $\psi_0 = 1.1196869$), в которой граничная кривая γ_5 пересекается с кривой резонанса четвертого порядка. На участке кривой γ_5 , выделенном пунктиром, выполняются неравенства $\delta a_{40} > 0$ и $\delta \lambda > 0$, поэтому здесь плоские колебания формально орбитально устойчивы. На участке же, показанном сплошной линией, выполнено только неравенство $\delta a_{40} > 0$, что позволяет сделать вывод об орбитальной устойчивости плоских колебаний в третьем приближении.
4. Для всех значений параметров на граничной кривой γ_6 величина $\lambda > 0$. На рисунке 1 пунктиром указан участок граничной кривой γ_6 , на котором $a_{40} > 0$, $\delta = 1$, а сплошной линией — участок кривой, где $a_{40} < 0$, $\delta = -1$. Эти участки разделяются

точкой M_3 ($\theta_A = 0.9409531$, $\psi_0 = 1.1513993$), в которой граничная кривая γ_6 пересекается с кривой резонанса четвертого порядка. На участке кривой γ_6 , выделенном пунктиром, выполняются неравенства $\delta a_{40} > 0$ и $\delta \lambda > 0$, поэтому здесь плоские колебания формально орбитально устойчивы. На участке же, показанном сплошной линией, выполнено только неравенство $\delta a_{40} > 0$, что позволяет сделать вывод об орбитальной устойчивости плоских колебаний в третьем приближении.

References

- [1] Beletskii V. V. *Satellite's motion about center of mass in a gravitational field*, Moscow: MGU, 1975 (Russian).
- [2] Markeev A. P. Stability of plane oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit, *Cosmic Research*, 1975, vol. 13, no. 3, pp. 285–298; see also: *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1975, vol. 13, no. 3, pp. 322–336.
- [3] Akulenko L. D., Nesterov S. V., Shmatkov A. M. Generalized parametric oscillations of mechanical systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 705–713; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 746–756.
- [4] Markeev A. P., Bardin B. S. On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2003, vol. 85, no. 1, pp. 51–66.
- [5] Bardin B. S. On orbital stability of planar motions of symmetric satellites in cases of first and second order resonances, in *Proc. of the 6th Conference on Celestial Mechanics (Señorio de Bértiz, 2003)*, J. Palacian, P. Yanguas (Eds.), Monogr. Real Acad. Ci. Exact. Fís.-Quím. Nat. Zaragoza, vol. 25, Zaragoza: Real Acad. Ci. Exact. Fís.-Quím. Nat., 2004. P. 59–70.
- [6] Bardin B. S., Puntus A. A., Chekin A. M., Chekina E. A. Investigation into the stability of plane motions of a dynamically symmetric satellite at the boundaries of parametric resonance regions, in *Creation of advanced aircraft*, Yu. Yu. Komarov, V. A. Mkhitarian, R. D. Lisin (Eds.), Moscow: MAI, 2004, pp. 50–55 (Russian).
- [7] Markeev A. P., Sokolskii A. G. Investigation into the stability of plane periodic motions of a satellite in a circular orbit, *Mech. Solids*, 1977, vol. 12, no. 4, pp. 39–48; see also: *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1977, vol. 12, no. 4, pp. 46–57.
- [8] Markeev A. P., Sokolskii A. G. Stability of the periodic motions of an asymmetric satellite in circular orbit, *Preprint № 46*, Moscow: Akad. Nauk SSSR, 1980 (Russian).
- [9] Bardin B. S., Chekin A. M. Orbital stability of planar oscillations of a satellite in a circular orbit, *Cosmic Research*, 2008, vol. 46, no. 3, pp. 273–282; see also: *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2008, vol. 46, no. 3, pp. 279–288.
- [10] Kholostova O. V. Linear analysis of stability the planar oscillations of a satellite being a plate in a circular orbit, *Nelin. Dinam.*, 2005, vol. 1, no. 2, pp. 181–190 (Russian).
- [11] Markeev A. P. Stability of planar rotations of a satellite in a circular orbit, *Mech. Solids*, 2006, vol. 41, no. 4, pp. 46–63; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2006, no. 4, pp. 63–85.
- [12] Bardin B. S., Chekin A. M. About orbital stability of plane rotations for a plate satellite travelling in a circular orbit, *Vestn. MAI*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 23–36 (Russian).
- [13] Bardin B. S., Chekina E. A. On the constructive algorithm for stability analysis of an equilibrium point of a periodic Hamiltonian system with two degrees of freedom in the second-order resonance case, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2017, vol. 22, no. 7, pp. 808–824.
- [14] Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. *Parametric resonance in linear systems*, Moscow: Nauka, 1987 (Russian).
- [15] Markeev A. P. *Libration points in celestial mechanics and space dynamics*, Moscow: Nauka, 1978 (Russian).

- [16] Ivanov A. P., Sokol'skii A. G. On the stability of a nonautonomous Hamiltonian system under a parametric resonance of essential type, *J. Appl. Math. Mech.*, 1980, vol. 44, no. 6, pp. 687–691; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1980, vol. 44, no. 6, pp. 963–970.
- [17] Markeyev A. P. A constructive algorithm for the normalization of a periodic Hamiltonian, *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 323–337; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 355–371.

On the stability of planar oscillations of a satellite-plate in the case of essential type resonance

Boris S. Bardin^{1,2}, Evgeniya A. Chkina¹

¹Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125993, Russia

²Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IMASH RAN)

M. Kharitonyevskiy per. 4, Moscow, 101990, Russia

¹bsbardin@yandex.ru, ²chekina_ev@mail.ru

We consider satellite motion about its center of mass in a circle orbit. We study the problem of orbital stability for planar pendulum-like oscillations of the satellite. It is supposed that the satellite is a rigid body whose mass geometry is that of a plate. We assume that on the unperturbed motion the middle or minor inertia axis of the satellite lies in the orbit plane, i.e., the plane of the satellite-plate is perpendicular to the plane of the orbit.

In this paper we perform a nonlinear analysis of the orbital stability of planar pendulum-like oscillations of a satellite-plate for previously unexplored parameter values corresponding to the boundaries of regions of stability in the first approximation, where the essential type resonances take place. It is proved that on the mentioned boundaries the planar pendulum-like oscillations are formally orbital stable or orbitally stable in third approximation.

MSC 2010: 37J25, 70F15, 70K30, 70K45

Keywords: Hamiltonian system, normal form, planar periodic motion, resonance, satellite, orbital stability

Received November 02, 2017, accepted November 19, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 465–476 (Russian)