ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9:534.1

MSC 2010: 34C15

Транзиторный сдвиг в уравнениях маятникового типа

А. Д. Морозов, К. Е. Морозов

Рассматриваются двумерные неавтономные уравнения маятникового типа: уравнение Джозефсона и уравнение колебаний тела, подвешенного на тросах. Предполагается, что эти уравнения являются транзиторными, то есть неавтономными лишь на конечном промежутке времени. Решается задача о влиянии транзиторного сдвига на установление того или иного режима. Для консервативного случая устанавливается мера транспорта от колебаний к вращениям.

Ключевые слова: транзиторная система, сепаратрисы, предельные циклы, аттракторы

1. Введение

Мы исследуем уравнения маятникового типа, которые являются апериодически неавтономными лишь на конечном промежутке времени. Вне этого промежутка уравнения являются автономными. Такие уравнения, следуя [1], называют транзиторными. В работе [2] приведено общее определение транзиторной системы, а также даны все необходимые понятия (представление полного векторного поля, структура фазового пространства, отображение перехода и др.), рассмотрен пример транзиторной системы, к которой приводит задача о флаттере.

Получено 28 июня 2016 года

После доработки 14 октября 2016 года

Работа поддержана грантом Минобрнауки (проектная часть госзадания, № 1410), а также частично грантами РФФИ № 14-41-00044, РФФИ № 14-01-00344, № 16-01-00364.

Морозов Альберт Дмитриевич

morozov@mm.unn.ru

Морозов Кирилл Евгеньевич

kirwamath@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

Существует много прикладных задач, которые являются транзиторными [1, 3]. Это, например, задача о резонансном ускорителе, о вращающемся двойном вихре, о ламинарном потоке через трубу с конечным числом изгибов между двумя прямыми участками. Для транзиторных систем сепаратрисы (инвариантные многообразия седловых состояний равновесия) и предельные циклы автономных систем разбивают фазовое пространство на области с качественно различным поведением траекторий и играют определяющую роль в их исследовании.

В данной работе мы рассмотрим маятниковые уравнения, в которых неавтономность приводит к транзиторному сдвигу по координате. А именно, рассмотрим две задачи о транзиторном сдвиге: 1) в уравнении Джозефсона, 2) в уравнении, описывающем колебания груза, подвешенного на тросах.

Автономное уравнение Джозефсона имеет вид [4, 5]

$$\ddot{x} + \sin x = \epsilon[a + (b + c \cos x)\dot{x}], \quad (1.1)$$

где ϵ , a , b , c — параметры, переменная x обозначает разность фаз волновых функций по обе стороны джозефсоновского перехода.¹ Предполагается малость параметра ϵ . К исследованию подобного уравнения приводят также задачи фазовой синхронизации частоты (см., например, [6]). Преобразуем (1.1) при $c \neq 0$ к виду

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha + (\beta + \cos x)\dot{x}], \quad (1.2)$$

где $\varepsilon = \epsilon/c$, $\alpha = a/c$, $\beta = b/c$. Фазовым пространством уравнения (1.2) является цилиндр $(x \bmod 2\pi, \dot{x} \in \mathbb{R}^1)$.

Задача о колебаниях груза прямоугольной формы, подвешенного на тросах [7], приводит к исследованию уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon(\beta + \cos nx)\dot{x}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Параметр β характеризует асимметрию груза. В [7] рассматривался случай $\beta = 0$ и при теоретическом исследовании уравнения (1.3) использовалось гармоническое приближение для невозмущенного решения.

Если в работах [4–8] рассматриваются автономные или периодические по времени модели, то здесь мы рассмотрим неавтономное уравнение с непериодической «транзиторной» неавтономностью:

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(\beta + \cos nx)\dot{x} + \alpha f(t)], \quad (1.4)$$

где $\alpha > 0$, $f(t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > \tau, \end{cases} \quad \tau = \text{const} > 0. \quad (1.5)$$

Например, в качестве $f(t)$ возьмем функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \left(3 - 2\left(\frac{t}{\tau}\right)\right), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (1.6)$$

¹В [4] приводится и неавтономное (периодическое по времени) уравнение.

Такой сдвиг в уравнении Джозефсона отвечает появлению постоянной составляющей в переменном токе через джозефсоновский контакт. Для задачи о колебаниях тела на тросах транзиторный сдвиг означает появление постоянной вынуждающей силы, связанной с асимметрией тела. Таким образом система, описываемая уравнением (1.4), является транзиторной.

Прошлые векторное поле (при $t < 0$) определяется уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(\beta + \cos nx)\dot{x}], \quad (1.7)$$

а будущее векторное поле (для $t > \tau > 0$) — уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha + (\beta + \cos nx)\dot{x}]. \quad (1.8)$$

Если мы знаем фазовые портреты для прошлого и будущего автономных векторных полей, то для исследования (1.4) остается построить отображение перехода T_τ [1]. Отображение T_τ переводит точки фазовой плоскости $A(x_0, \dot{x}_0)$ из положения при $t = 0$ в их положение при $t = \tau$ по решениям уравнения (1.4), то есть

$$T_\tau(A) = \varphi(\tau, A), \quad (1.9)$$

где $\varphi(t, A) = (x(t, A), \dot{x}(t, A))$ — решение уравнения (1.4), удовлетворяющее условию $\varphi(0, A) = A$.

Динамика автономных двумерных векторных полей определяется сепаратрисами седел и предельными циклами (ПЦ). Поэтому, используя (1.4), мы должны найти образы сепаратрис и предельных циклов прошлого векторного поля при изменении $t \in [0, \tau]$. Дальнейшая динамика будет определяться будущим векторным полем.

Как известно, устойчивому предельному циклу уравнения (1.7) в колебательной области соответствует цилиндрическое интегральное многообразие C^{osc} в $R^1 \times S^1 \times R^1$; соответственно, при $t < 0$ имеем нижний полуцилиндр C_-^{osc} . Аналогично, устойчивому ПЦ в области вращательных движений соответствует интегральное многообразие C^{rot} . При начальном времени $t_0 \ll 0$ и начальных условиях вне ПЦ интегральная кривая при $t = 0$ может подходить достаточно близко к полуцилиндру C_-^{osc} или к полуцилиндру C_-^{rot} . В этом смысле мы будем говорить об установившемся режиме для прошлого векторного поля.

Заметим, что неустойчивые ПЦ и неустойчивые сепаратрисы прошлого векторного поля (их интегральные многообразия) являются неустойчивыми и для полного векторного поля, то есть решения стремятся к этим многообразиям при $t \rightarrow -\infty$. Устойчивые многообразия для полного поля не являются, вообще говоря, устойчивыми многообразиями прошлого векторного поля. Аналогично, для будущего векторного поля — устойчивые ($t \rightarrow +\infty$) ПЦ и устойчивые сепаратрисы являются устойчивыми и для полного векторного поля.

Таким образом, мы должны решить следующие задачи: 1) построить фазовые портреты для уравнения (1.7) (прошлого векторного поля); 2) построить фазовые портреты для уравнения (1.8) (будущего векторного поля); 3) построить отображения перехода T_τ и решить вопрос о влиянии транзиторного сдвига на поведение решений неавтономного уравнения.

Очевидно, когда уравнение (1.7) имеет единственное притягивающее множество, возможная смена режима полностью определяется будущим векторным полем.

2. Фазовые портреты

В этом разделе построим фазовые портреты автономных векторных полей, которые задаются уравнениями (1.7), (1.8). Прежде всего напомним, что уравнение $\ddot{x} + \sin x = 0$ имеет первый интеграл

$$\dot{x}^2/2 - \cos x = h, \quad (2.1)$$

который определяет фазовые кривые на цилиндре $Cyl = (x \bmod 2\pi, \dot{x})$. При $h \in (-1, 1)$ фазовые кривые не охватывают цилиндр Cyl (область колебательных движений), а при $h > 1$ — охватывают цилиндр Cyl (область вращательных движений).

Исследование уравнения (1.8) приводит к изучению порождающей функции Пуанкаре – Понтрягина [8]

$$B_0(h) = \alpha A(h) + \beta F_0(h) + F_n(h), \quad (2.2)$$

где $A(h)$ определяется постоянной составляющей в возмущении, $F_0(h)$ определяется членом $\dot{x}$, а $F_n(h)$ — членом $\dot{x} \cos nx$. Простые нули порождающей функции $B_0(h)$ определяют грубые предельные циклы в уравнении (1.8). Ограничимся случаями $n = 1$ и $n = 2$. Согласно [8], имеем

$$\begin{aligned} A(h) &= \begin{cases} 0, & h \in (-1, 1), \\ \pm 2\pi, & h > 1, \end{cases} \\ F_0(h) &= \begin{cases} 16[(\rho - 1)\mathbf{K} + \mathbf{E}], & h \in (-1, 1), \\ \frac{8}{\sqrt{\rho}}\mathbf{E}, & h > 1, \end{cases} \\ F_1(h) &= \begin{cases} \frac{16}{3}[(1 - \rho)\mathbf{K} + (2\rho - 1)\mathbf{E}], & h \in (-1, 1), \\ \frac{8}{3\rho\sqrt{\rho}}[-2(1 - \rho)\mathbf{K} + (2 - \rho)\mathbf{E}], & h > 1, \end{cases} \\ F_2(h) &= \begin{cases} \frac{16}{15}[(1 - \rho)(1 - 8\rho)\mathbf{K} + (-16\rho^2 + 16\rho - 1)\mathbf{E}], & h \in (-1, 1), \\ \frac{8}{15\rho^2\sqrt{\rho}}[8(1 - \rho)(2 - \rho)\mathbf{K} + (-\rho^2 + 16\rho - 16)\mathbf{E}], & h > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\rho = k^2$, $k = \sqrt{(1+h)/2}$ при $h \in (-1, 1)$ и $k = \sqrt{2/(1+h)}$ при $h > 1$ — модуль полных эллиптических интегралов $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$.

2.1. Прошрое векторное поле

Прошрое векторное поле определяется уравнением (1.7). Его исследование при малых ε было проведено в [9] (подробнее см. в [8]). При $n = 1$ эта задача была рассмотрена в [5].

Согласно [8], при $\beta = \beta_* = (-1)^n/(4n^2 - 1)$ у уравнения (1.7) в области колебательных движений существует $n - 1$ грубых предельных циклов (ПЦ) и один ПЦ на границе колебательной и вращательной областей ($h = 1$).

При $n = 1$ и $\beta < -1$ единственным глобально устойчивым аттрактором является фокус, предельных циклов нет. При $\beta = -1$ фокус становится негрубым и от него рождается

устойчивый предельный цикл (бифуркация Андронова–Хопфа), который при $\beta = -1/3$ влипают в сепаратрисы. При этом в области вращательных движений ПЦ отсутствуют. При $-1/3 < \beta < 0$ существуют два устойчивых симметричных предельных цикла в области вращательных движений, которые при $\beta = 0$ уходят на бесконечность. При $\beta > 0$ предельные циклы у прошлого векторного поля отсутствуют [8]. Таким образом, прямая параметра β при $n = 1$ разбивается бифуркационными значениями $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = \beta_* = -1/3$, $\beta_3 = 0$ на 4 интервала. Фазовые портреты для каждого из этих интервалов показаны на рисунке 1 при $\varepsilon = 0.2$, где красным^a цветом отмечены предельные циклы.

Обратимся к случаю $n = 2$. В этом случае прямая параметра β разбивается бифуркационными значениями $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = \beta_* = 1/15$, $\beta_4 \approx 0.091$ на 5 интервалов. Если $\beta < -1$, то, как и при $n = 1$, у прошлого векторного поля нет предельных циклов, а единственным притягивающим множеством является фокус. При $\beta = -1$ состояние равновесия $(0, 0)$ является негрубым фокусом, от которого рождается устойчивый предельный цикл (бифуркация Андронова–Хопфа). При $\beta = 0$ из бесконечности рождаются два неустойчивых симметричных ПЦ в области вращательных движений. При $\beta = 1/15 \approx 0.0667$ они влипают в сепаратрисы, то есть существует один устойчивый предельный цикл в области колебательных движений и один седловой цикл [8]. При $\beta = \beta_4$ существует двукратный ПЦ в области колебательных движений, который исчезает при дальнейшем увеличении β . При $\beta > \beta_4$ предельные циклы у прошлого векторного поля отсутствуют. Фазовые портреты на каждом из 5 интервалов показаны на рисунке 2, где красным цветом показаны устойчивый ПЦ, а синим — неустойчивые.

Рис. 1. Фазовые портреты для прошлого векторного поля при $n = 1$.

2.2. Будущее векторное поле

Прежде всего отметим, что в уравнении (1.8) замена параметра $\alpha \rightarrow -\alpha$ равносильна замене $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow -t$. Поэтому разбиение плоскости параметров на области с различной структурой фазового пространства симметрично относительно оси β .

Фазовые портреты уравнения (1.8) при $n = 1$ были построены в работе [5], однако уравнение в [5] иначе зависит от параметров. Поэтому мы приводим на рисунке 3 разбиение плоскости параметров (β, α) , а на рисунке 5а — качественные фазовые портреты для нашего случая.

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1604003/>

Рис. 2. Фазовые портреты для прошлого векторного поля при $n = 2$. Рис. 3. Разбиение плоскости параметров (β, α) на области с разными фазовыми портретами уравнения (1.8) при $n = 1$.

Рис. 4. Разбиение плоскости параметров (β, α) на области с разными фазовыми портретами уравнения (1.8) при $n = 2$.

При $n = 2$ уравнение (1.8), определяющее будущее векторное поле, ранее не было исследовано. Поэтому, следуя [8], исследуем порождающую функцию

$$B_0(h) = \alpha A(h) + \beta F_0(h) + F_2(h). \quad (2.4)$$

При $\alpha \neq 0$ основные бифуркации можно установить, используя (2.3).

1) Из условия $\lim_{h \rightarrow 1+0} B_0(h) = 0$ находим бифуркационные прямые

$$\alpha = \pm(4/\pi)(1/15 - \beta) \quad (2.5)$$

существования седлового ПЦ.

2) Из системы $B_0(\rho) = 0$, $B'_0(\rho) = 0$ находим линию двойных циклов в области вращательных движений.

3) Так как порождающая функция $B_0(h)$ в области колебательных движений не зависит от α , а в области вращательных движений $A(h)$ — постоянная, то бифуркационным значениям $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ параметра β для прошлого векторного поля будут соответствовать вертикальные прямые в плоскости (β, α) .

На рисунке 4 приведено разбиение плоскости параметров (β, α) на области с разной топологией фазовых портретов для будущего векторного поля при $n = 2$, а на рисунке 5b — качественные фазовые портреты.

3. Влияние транзиторного сдвига на поведение решений

Здесь мы рассмотрим вопрос о влиянии транзиторного сдвига на поведение решений. До сдвига поведение решений определяется прошлым автономным векторным полем, после сдвига — будущим. Транзиторный сдвиг может привести к смене предельного притягивающего множества. Это означает, что траектории, находившиеся в области притяжения определенного аттрактора прошлого векторного поля и стремившиеся к нему (в указанном

Рис. 5. Качественные фазовые портреты уравнения (1.8) при различных значениях параметров.

выше смысле), после сдвига могут попадать в области притяжения других аттракторов будущего автономного векторного поля.

Начнем с более простого исключительного случая, когда $b = c = 0$ в уравнении (1.1). Тогда транзитивная система описывается консервативным уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \gamma f(t), \quad (3.1)$$

где $f(t)$ определена в (1.6), $\gamma = \varepsilon a > 0$ — величина сдвига. Прошрое векторное поле определяется уравнением $\ddot{x} + \sin x = 0$. Такое неавтономное возмущение можно трактовать как неперiodически нарастающее до определенного уровня внешнее воздействие. Отметим, что в работе [1] рассматривался транзитивный сдвиг по скорости для аналогичного уравнения.

Естественно рассмотреть ограниченную величину сдвига, для того чтобы уравнение (3.1) при $t > \tau$ имело состояния равновесия. Поэтому полагаем $\gamma < 1$. На рисунках 6 синим закрашен образ компактной области D , соответствующей колебательным движениям, не охватывающим фазовый цилиндр. Обозначим этот образ через D_τ . D_τ разбивается сепаратрисой будущего векторного поля на две подобласти D_τ^1 и D_τ^2 , закрашенные, соответственно, темно-синим и светло-синим цветом. Траектории из области D_τ^1 после перехода также совершают колебательные движения, не охватывающие фазовый цилиндр (то есть сохраняют качественное поведение), а траектории из области D_τ^2 после перехода выходят в область инфинитных движений. Переход траекторий из колебательной области во вращательную область под действием транзитивного потока называют транспортом [1, 2].

В качестве величины (меры) транспорта от колебаний к вращениям можно выбрать отношение

$$R = \frac{S(D_\tau^2)}{S(D_\tau)}, \quad (3.2)$$

Рис. 6. Образы сепаратрис при отображении перехода при $\gamma = 0.2$.

где S означает площадь соответствующих областей. Траектории, соответствующие областям, закрашенным красным цветом, и до, и после перехода совершают вращательные движения, охватывающие цилиндр. Отличие в том, что после перехода траектории «уходят» по цилиндру на бесконечность.

Перейдем к рассмотрению неконсервативного уравнения, то есть к исследованию уравнения (1.4). Начнем со случая $n = 1$.

3.1. Случай $n = 1$

Как мы установили, для прошлого векторного поля возможны 4 грубые топологические структуры (рис. 1).

1. Пусть $\beta < -1$. В зависимости от величины α будущее векторное поле может обладать структурой, соответствующей области 1 или области 2 пространства параметров (рис. 3). Сдвиг, при котором точка (β, α) попадает в область 2, не приводит к смене режима (так как и для прошлого, и для будущего векторного поля существует единственное глобально устойчивое состояние равновесия), а сдвиг, отвечающий переходу в область 1 на бифуркационной диаграмме, приводит к смене режима для части траекторий: состояние равновесия $\rightarrow$ вращательный режим, то есть траектории, находившиеся до перехода в области притяжения состояния равновесия, после перехода могут попасть на устойчивый ПЦ во вращательной области. В этом случае только сепаратрисы будущего векторного поля разделяют области, определяющие такую смену режима. На рисунке 7а красным цветом показаны сепаратрисы и предельный цикл будущего векторного поля, а синим — образы сепаратрис прошлого векторного поля. Голубым цветом закрашены области, которым соответствуют траектории, стремящиеся к состоянию равновесия (для таких траекторий не происходит смены режима). Розовым закрашены области, которым соответствуют траектории, после перехода стремящиеся к устойчивому ПЦ в области вращений (для этих траекторий происходит смена режима под действием транзиторного сдвига).

2. Пусть $-1 < \beta < -1/3$. В зависимости от величины α будущее векторное поле может обладать структурой, соответствующей области 3 или области 4 пространства параметров. Сдвиг, при котором точка (β, α) попадает в область 4, не приводит к смене режима, а сдвиг, отвечающий переходу из области 4 в область 3 на бифуркационной диаграмме, приводит к смене режима для части траекторий: устойчивый ПЦ в колебательной области $\rightarrow$ устойчивый ПЦ в области вращений. Поскольку единственным глобально устойчивым аттрактором для прошлого векторного поля является устойчивый ПЦ в колебательной области, то, как и при $\beta < -1$, области, определяющие смену режима, разделяются сепаратрисами

Рис. 7. (a) $\beta = -1.2$, $\alpha = 1.5$, $\varepsilon = 0.3$, $\tau = 1$; (b) $\beta = -0.75$, $\alpha = 1.3$, $\varepsilon = 0.3$, $\tau = 1$.

будущего векторного поля. На рисунке 7b показан образ предельного цикла и сепаратрис прошлого векторного поля (синий) и сепаратрисы и предельный цикл будущего векторного поля (красный). Голубым цветом закрашены области, которым соответствуют траектории, стремящиеся к ПЦ в области колебательных движений. Розовым отмечены области, которым соответствуют траектории, стремящиеся после перехода к устойчивому ПЦ во вращательной области, то есть для этих траекторий произошла смена режима под действием транзитного сдвига.

3. Пусть $-1/3 < \beta < 0$. В зависимости от величины α будущее векторное поле может обладать структурой, соответствующей области 5 или области 6 пространства параметров. Если точка (β, α) принадлежит области 5, то устанавливается периодическое решение во вращательной области на верхнем полуцилиндре ($\dot{x} > 0$) (рис. 8a). В этом случае образ области притяжения ПЦ на нижнем полуцилиндре (на рис. 8a закрашена розовым цветом) соответствует смене нижнего ПЦ на верхний. Для траекторий, которые попадают в область, закрашенную голубым, смены аттрактора не происходит.

Если же точка (β, α) принадлежит области 6, то у будущего векторного поля существуют устойчивые (несимметричные) ПЦ на верхнем и нижнем полуцилиндрах (рис. 8b).

Рис. 8. (a) $\beta = -0.1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.3$, $\tau = 3$; (b) $\beta = -0.1$, $\alpha = 0.2$, $\varepsilon = 0.4$, $\tau = 3$.

В этом случае траектории могут менять притягивающее множество: ПЦ на нижнем полуцилиндре $\rightarrow$ ПЦ на верхнем полуцилиндре, и наоборот (на рис. 8b розовым закрашены области, соответствующие смене аттрактора).

В данном случае транзиторный сдвиг не приводит к смене режима. Для траекторий устанавливается вращательный режим (как и для автономного уравнения (1.7) при $-1/3 < \beta < 0$).

4. Пусть $\beta > 0$. В прошлом векторном поле нет притягивающих множеств, поэтому поведение траекторий полностью определяется будущим векторным полем. Для $\beta < 1$ соответствующая точка может попасть в области 7, 8, 9. Для (β, α) из области 7 и 9 отсутствуют устойчивые режимы. В этом случае транзиторный сдвиг не приводит к смене режима. Наконец, при (β, α) из области 8 транзиторный сдвиг приводит к появлению устойчивого ПЦ во вращательной области на нижнем полуцилиндре и все ограниченные траектории при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нему. Границы областей, соответствующих смене режима, определяются в этом случае инвариантными множествами будущего векторного поля.

Таким образом справедливо

Утверждение. *Границы областей, при переходе в которые (под действием отображения перехода) имеет место смена режима, определяются только сепаратрисами и предельными циклами будущего векторного поля и не зависят от образов сепаратрис и предельных циклов прошлого векторного поля.*

3.2. Случай $n = 2$

Как мы установили, для прошлого векторного поля возможны 5 грубых топологических структур (рис. 2).

1. Пусть $\beta < -1$. Этот случай аналогичен случаю $\beta < -1$ при $n = 1$. Если (β, α) принадлежит области 2, то может происходить смена режима: устойчивое состояние равновесия $O(0, 0) \rightarrow$ устойчивый ПЦ на верхнем полуцилиндре. Области, определяющие такую смену, разделяются сепаратрисами будущего поля.

2. Пусть $-1 < \beta < 0$. В этом случае точка (α, β) может принадлежать областям 3, 4 или 5 плоскости параметров. Поскольку у прошлого векторного поля имеется единственный глобально устойчивый предельный цикл в области колебательных движений, то, как и при $n = 1$, области единственной возможной смены режима (ПЦ в колебательной области $\rightarrow$ ПЦ во вращательной области) определяются инвариантными множествами будущего векторного поля.

3. Пусть $0 < \beta < 1/15$. У прошлого векторного поля существует единственный устойчивый ПЦ в колебательной области и два симметричных неустойчивых ПЦ во вращательной области. Для будущего векторного поля возможны структуры фазового пространства, соответствующие областям 6 и 7 плоскости (β, α) . Единственным аттрактором при $t > \tau$ является ПЦ в колебательной области, область притяжения которого определяется инвариантными множествами (сепаратрисами или циклами) будущего векторного поля (см. рис. 5b, случай 6, 7).

В этом случае траектории могут менять качественное поведение. Пусть, например, (β, α) принадлежит области 7 (рис. 9).

При этом часть траекторий, при $t < 0$ стремившихся к ПЦ в колебательной области, при $t > \tau$ уходят на бесконечность (розовые области на рис. 9). Может быть и иная ситуация: часть траекторий, при $t < 0$ находившихся в области притяжения бесконечности,

Рис. 9. $\beta = 0.03$, $\alpha = 0.15$, $\varepsilon = 0.3$, $\tau = 1$.

при $t > \tau$ попадает в область притяжения устойчивого цикла в колебательной области (зеленый цвет на рис. 9).

Голубой цвет на рисунке 9 соответствует областям, при переходе в которые траектории не меняют качественного поведения.

Здесь есть существенное отличие от случая $n = 1$: границы областей, соответствующих переходу к колебательному режиму или, наоборот, переходу к инфинитным движениям, определяются инвариантными многообразиями как будущего, так и прошлого векторного поля (и, очевидно, отображением перехода, которое зависит от времени перехода τ и вида функции $f(t)$).

4. Пусть $1/15 < \beta < \beta_4$. У прошлого векторного поля существуют два ПЦ в колебательной области, внешний — неустойчивый, то есть часть траекторий стремится к циклу, часть к бесконечности. При $t > \tau$ единственным аттрактором является ПЦ в колебательной области. При этом, как и в случае 3, часть траекторий, стремившихся при $t < 0$ к ПЦ, могут при $t > \tau$ уходить на бесконечность. И наоборот, часть траектории, находившихся в области притяжения бесконечности, могут перейти в область притяжения ПЦ в колебательной области. Границы областей, соответствующих таким сменам режима, определяются особыми траекториями как прошлого, так и будущего векторного поля.

5. Пусть $\beta > \beta_4 \approx 0.091$. В этом случае отсутствуют аттракторы и транзитный сдвиг влияет лишь на характер стремления траекторий к бесконечности.

4. Заключение

Поскольку многим системам (физическим, биологическим, экологическим и др.) свойственны временные перестройки, то изучение транзитных динамических систем представляет собой актуальное направление для исследования. К транзитным системам могут приводить разнообразные задачи [1, 2], в частности, рассмотренные в этой статье задачи: 1) о появлении постоянной составляющей переменного тока в уравнении Джозефсона и 2) о появлении малого постоянного возмущения в задаче об обтекании воздушным потоком груза, подвешенного на тросах. Исследование транзитных систем приводит к исследованию автономных систем при $t < 0$ и $t > \tau$. В рассматриваемых случаях эти автономные системы являются близкими к нелинейным интегрируемым, что позволило построить фазовые портреты для прошлого и будущего векторных полей с помощью изучения порождающей функции Пуанкаре–Понтрягина. Если мы знаем структуру фазовых цилиндров

этих систем, то проблема об установившихся режимах и их смене сводится к построению отображения перехода T_τ и оценке влияния сдвига на поведение решений. Оказывается, для уравнения Джозефсона ($n = 1$) построить области, при переходе в которые происходит смена режима, можно без построения отображения перехода и нахождения образов инвариантных множеств прошлого векторного поля (см. утверждение в § 3.1). Это означает, что границы этих областей не зависят от отображения перехода и, как следствие, от времени перехода τ . Для второй рассмотренной задачи это не так.

Исследование транзиторных систем представляет интерес как с точки зрения теории, так и с точки зрения приложений. Это исследование находится в начальной стадии, поэтому требуется рассмотрение дополнительных примеров, что будет способствовать построению теории таких систем.

References

- [1] Mosovsky B. A., Meiss J. D. Transport in transitory dynamical systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2011, vol. 10, no. 1, pp. 35–65.
- [2] Morozov A. D., Morozov K. E. Transitory shift in the flutter problem, *Нелин. Динам.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 447–457 (Russian).
- [3] Mosovsky B. A., Meiss J. D. Transport in transitory three-dimensional Liouville flows, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2012, vol. 11, no. 4, pp. 1785–1816.
- [4] Belykh V. N., Pedersen N. F., Sørensen O. H. Shunted-Josephson-junction model: 1. The autonomous case, *Phys. Rev. B*, 1977, vol. 16, no. 11, pp. 4853–4859.
- [5] Sanders J. A., Cushman R. Limit cycles in the Josephson equation, *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, vol. 17, no. 3, pp. 495–511.
- [6] *Phase synchronization systems*, V. Shakhgildiyati, L. Belyustina (Eds.), Moscow: Radio i Svyaz, 1982 (Russian).
- [7] Leech C. M. Limit cycle stability of aerodynamically induced yaw oscillations, *Int. J. Mech. Sci.*, 1979, vol. 21, no. 9, pp. 517–525.
- [8] Morozov A. D. *Quasi-conservative systems: Cycles, resonances and chaos*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 30, Singapore: World Sci., 1998.
- [9] Morozov A. D. Limit cycles and chaos in equations of the pendulum type, *J. Appl. Math. Mech.*, 1989, vol. 53, no. 5, pp. 565–572; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1989, vol. 53, no. 5, pp. 721–730.

Transitory shift in pendular type equations

Albert D. Morozov¹, Kirill E. Morozov²

^{1,2}Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

pr. Gagarina 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

¹morozov@mm.unn.ru, ²kirwamath@gmail.com

The two-dimensional nonautonomous equations of pendular type are considered: the Josephson equation and the equation of oscillations of a body. It is supposed that these equations are transitory, i.e., nonautonomous only on a finite time interval. The problem of dependence of the mode on the transitory shift is solved. For a conservative case the measure of transport from oscillations to rotations is established.

MSC 2010: 34C15

Keywords: transitory system, separatrix, limit cycles, attractors

Received June 28, 2016, accepted October 14, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 577–589 (Russian)