ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.5

MSC 2010: 70K20, 70K42, 70F05

О применении K -средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел

А. А. Буров, А. Д. Герман, Е. А. Распопова, В. И. Никонов

Как известно, многие малые небесные тела имеют неправильную форму, в частности, так называемую форму «собачьей косточки» (*dog-bone shape*). Для аналитического исследования движения под действием сил притяжения со стороны таких тел естественно основываться на предложенном В. В. Белецким подходе, опирающемся на приближение таких тел гантелями, представляющими собой пару массивных шаров, центры которых удалены друг от друга на некоторое фиксированное расстояние.

Получено 14 ноября 2017 года

После доработки 23 декабря 2017 года

Работа выполнена частично при поддержке РФФИ, грант 16-01-00625а, и гранта ЕMaDeS (Centro-01-0145-FEDER-000017), the Portuguese Foundation for Science and Technologies via Centre for Mechanical and Aerospace Science and Technologies, C-MAST (POCI-01-0145-FEDER-007718).

Буров Александр Анатольевич

jtm@narod.ru

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Герман Анна Дмитриевна

anna@ubi.pt

Centre for Mechanical and Aerospace Science and Technologies, University of Beira Interior,
Convento de Sto. António. 6201-001 Covilhã, Portugal

Никонов Василий Иванович

nikon_v@list.ru

Centre for Mechanical and Aerospace Science and Technologies, University of Beira Interior,
Convento de Sto. António. 6201-001 Covilhã, Portugal

(на время командировки из ФИЦ «Информатика и управление» РАН)

Распопова Екатерина Александровна

katerinka9214@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

Возникает вопрос: как по имеющимся данным измерений разумно подобрать параметры гантели, в определенном смысле приближающей то или иное небесное тело.

В настоящей работе предлагается подход, опирающийся на так называемый метод K -средних, предложенный выдающимся польским математиком Х. Штейнгаузом.

Ключевые слова: астероид, представление поверхности тела многогранником, гравитационное поле небесного тела, метод K -средних

Введение

Как известно, малые небесные тела зачастую имеют сложные форму и распределение масс, из-за чего поле притяжения оказывается не только слабым, но и достаточно нерегулярным. Для оценки притяжения со стороны таких тел применяют подходы, опирающиеся на анализ их изображений, сопровождающийся триангуляцией образов их поверхностей с последующим восстановлением приближенного выражения для потенциала [16] (см. также, например, [17, 19, 25, 26, 28–30]).

Такие затратные с точки зрения использования вычислительных ресурсов подходы могут оказаться затруднительными для реализации на бортовых вычислителях. В связи с этим для качественной оценки возможных динамических эффектов в ряде случаев применяют представления малых небесных тел в виде конечного, не очень большого числа гравитирующих точек (шаров). В частности, малые небесные тела приближаются парами однородных шаров («гантель»), как это делалось в работах В. В. Белецкого, О. Н. Пономарёвой и А. В. Родникова [1–3, 8], а также тройками и четверками таких шаров (точек) [13, 14, 27]. Также имеются подходы, опирающиеся на приближение тел одним или несколькими тонкими однородными стержнями (см., например, [6, 9, 10, 20]). Некоторые особенности динамики в окрестности таких объектов исследовались ранее [7, 21, 22].

Возникает естественный вопрос: как восстановить выражение для потенциала сил притяжения путем разумного агрегирования образующих тело материальных точек, положение и масса лишь части из которых — точек поверхности — доступны для наблюдения. В настоящей работе обсуждается возможность применения для таких нужд так называемого метода K -средних, хорошо известного в теории распознавания образов и ее приложениях и восходящего к идеям выдающегося польского математика Х. Штейнгауза [24].

1. О методе Штейнгауза

Выводы о распределении масс малых небесных тел, как правило, делаются на основании достаточно скудных данных, полученных из анализа фотометрической информации о поверхности этих тел и, если представляется возможность, из траекторного анализа. Сведения о внутреннем устройстве малых небесных тел, как правило, отсутствуют, и при построении моделей зачастую делается упрощающее предположение об их однородности.

Х. Штейнгаузом [24] был предложен оригинальный подход к разбиению множеств точек на части, активно применяемый в теории распознавания образов. Изложим его идею на примере разбиения множества A на два подмножества, «максимально удаленных друг от друга».

Пусть множество A — некоторое множество наделенных массами точек, расположенных в евклидовом пространстве. Разобьем его на два непересекающихся подмножества A'_1 и A'_2 . Определим центры масс этих подмножеств и вычислим расстояния между ними. Запомним

это расстояние и осуществим ту же самую процедуру для всех возможных разбиений множества A на непересекающиеся подмножества. Два таких подмножества, расстояние между центрами масс которых окажется максимальным, назовем искомыми. Из простых примеров видно, что решения задачи, в общем случае, не является единственным.

Для случая бóльшего числа требуемых подмножеств процедура устроена аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Может оказаться, что предлагаемое правило «вырабатывает» «неравноценные» подмножества, одно из которых состоит из малого числа точек, например из одной, а другое «поглощает» бóльшую часть точек. В таком случае при осуществлении выбора требуется накладывать дополнительные ограничения (например, на равенство масс элементов разбиения).

Пример. Рассмотрим аффинный октаэдр, состоящий из точек $P_x^\pm, P_y^\pm, P_z^\pm$, симметрично расположенных на осях прямоугольной системы координат на расстояниях $\pm a, \pm b$ и $\pm c$ от центра соответственно.

Будем считать, что в каждой из этих точек расположены массы, равные $2m$. Разобьем множество точек на пару четырехугольных пирамид с вершинами P_x^+ и P_x^- и основаниями $P_y^+ P_z^+ P_y^- P_z^-$. Поскольку такое разбиение обладает зеркальной симметрией относительно плоскости основания, то для каждой из точек основания одну массу m из $2m$ отнесем к одной из пирамид, а другую — к другой. Центры масс той и другой пирамиды расположены на оси Ox , на расстоянии $a/3$ по разные стороны от точки O . Расстояние между самими центрами масс составляет $2a/3$.

Прделаем такую же операцию по организации пирамиды с вершинами P_y^+ и P_y^- , P_z^+ и P_z^- . Возникающие центры масс подмножеств разнесены друг от друга на расстояния $2b/3$ и $2c/3$ соответственно.

Если в дальнейшем предположить, что

$$a > b > c,$$

то первое разбиение на подмножества оказывается удовлетворяющим условиям требуемого разбиения.

Но это утверждение справедливо лишь на первый взгляд. Действительно, включим в подмножество A_1 только точку P_x^+ , а в подмножество A_2 — все остальные точки. Ясно, что центр масс Z_1 подмножества A_1 — сама точка P_x^+ , удаленная от точки O , согласно условию, на расстояние a , а центр масс Z_2 , подмножества A_2 также располагается на оси Ox , но в другом полупространстве относительно плоскости Oyz , будучи удален от нее на расстояние $a/5$. Расстояние $|Z_1 Z_2| = 6a/5$, несомненно больше, чем $2a/3$, полученное в первом разбиении. Тогда второе разбиение должно быть принято за требуемое. При этом разбиении было также утрачено свойство симметрии в распределении масс, которое, несомненно, важно при решении конкретных задач.

2. Итерационная процедура

Пусть масса тела распределена равномерно. Тогда его плотность постоянна, и в дальнейшем вместо масс можно будет говорить об объемах. Предположим, что выполнена триангуляция поверхности тела: построен аппроксимирующий эту поверхность многогранник, заданный набором вершин и набором треугольных граней (см., например, рис. 1).

Введем согласованную ориентацию на триангуляционной сетке: будем считать, что последовательность вершин каждого из треугольников сетки выбрана таким образом, что

Рис. 1. Триангуляция полученных с помощью радаров изображений поверхностей астероидов (2063) Бахус, (216) Клеопатра и (433) Эрос (см. [11, 18, 23]).

из конца отвечающей треугольнику *внешней* нормали обход треугольника осуществляется против часовой стрелки. Тогда *объем* триангулированного тела равен сумме ориентированных объемов тетраэдров T_k с общей вершиной в произвольной точке O , основания которых — треугольники из триангуляционной сетки. Пусть $\mathcal{T} = \{T_k\}$ — множество таких тетраэдров.

Положение центра масс (центроида) однородного тетраэдра хорошо известно [5]: он расположен на отрезке, соединяющем любую из вершин с точкой пересечения медиан противоположного основания, и делит этот отрезок в отношении 3 : 1, считая от вершины. Тогда центр масс триангулированного тела можно найти так: найдем центр масс C_k для каждого тетраэдра $T_k \in \mathcal{T}$, найденной таким образом точке C_k поставим в соответствие ориентированный объем тетраэдра T_k — величину V_k . Тогда центр масс триангулированного тела — точка C — определяется с помощью стандартного определения:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{V} \sum_k V_k \overrightarrow{OC_k}, \quad V = \sum_k V_k.$$

Естественно считать, что при достаточно хорошей триангуляции поверхности найденный центр масс — точка C — достаточно хорошо приближает центр масс изучаемого небесного тела.

Приведем пример, как можно разбить множество точек тела на две непересекающиеся составляющие так, чтобы они были максимально (в смысле Штейнгауза) удалены друг от друга. Набор центроидов $\{C_k\}$ с приписанными им ориентированными объемами соответствующих тетраэдров обозначим через $\mathcal{C}$ (ср. [12, 15]).

Прежде всего на множестве $\mathcal{C}$ определим две максимально удаленные друг от друга «затравочные» точки C_1 и C_2 .

Разобьем множество $\mathcal{C}$ на два непересекающихся подмножества $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ следующим образом: пробную точку из $\mathcal{C}$ отнесем к $\mathcal{C}_i$, если эта точка располагается ближе всего к точке C_i , $i = 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для разрешения неопределенности в случае одинаковых расстояний от пробной точки до точек C_i , $i = 1, 2$, заранее определим критерий выбора множества, к которому следует относить «спорную» точку. Одна из возможностей — разделить массу точки пополам и отнести половинки к обоим возникающим множествам. В настоящей работе применяется следующее предположение: стремясь построить подмножества близкой массы, «спорную» точку относим к подмножеству с меньшей массой, если же подмножества имеют одинаковую массу, то, для определенности, «спорную» точку приписываем первому подмножеству.

Далее, вычислим центры масс S_1 и S_2 множеств C_1 и C_2 соответственно. Если расстояния $|S_i C_i|$ достаточно малы для каждого $i = 1, 2$, то считаем, что искомое разбиение определено.

В противном случае в качестве точек C_1, C_2 принимаем точки S_1, S_2 и повторяем процесс разбиения множества C на подмножества C_1 и C_2 .

3. Примеры. Определение шаров для представления тела

Разделив множество точек, задающее твердое тело, на два непересекающихся подмножества, определим шары, объемы которых равны объемам соответствующих подмножеств, с центрами, располагающимися в центрах масс этих подмножеств.

Проиллюстрируем работу описанного алгоритма на примере астероидов (2063) Бахус, (216) Клеопатра и (433) Эрос (см. таблицу 1), данные о триангуляционных сетках поверхностей которых заимствованы из [11, 18, 23]. Поверхности указанных небесных тел описываются треугольными сетками с характеристиками, приведенными в таблице 2.

Таблица 1. Физические характеристики астероидов

Название	Масса, кг	Плотность, кг/м ³	Период вращения	Размеры, км
(2063) Бахус [11]	$3.2 \cdot 10^{11}$	2000	14 ч 54 мин	$1.11 \times 0.57 \times 0.57$
(216) Клеопатра [13]	$4.64 \cdot 10^{18}$	3600	5 ч 23 мин	$217 \times 94 \times 81$
(433) Эрос [13]	$6.69 \cdot 10^{15}$	2670	5 ч 16 мин	$34.4 \times 11.2 \times 11.2$

Таблица 2. Характеристики моделей астероидов. R_1 и R_2 — радиусы аппроксимирующих шаров, ℓ — расстояние между их центрами

Тело \ Модель	Многогранник		Пара шаров		
	Вершины	Грани	R_1 , м	R_2 , м	ℓ , м
(2063) Бахус	2048	4092	244	261	438
(216) Клеопатра	2048	4092	43549	44249	117800
(433) Эрос	856	1708	6676	6674	13936

На рисунках 2, 3 и 4 даны аппроксимации астероидов ((2063) Бахус, (216) Клеопатра и (433) Эрос соответственно) парой шаров, получающихся в результате разбиения тела на два непересекающихся подмножества. Характеристики моделей приведены в таблице 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из рисунка 2 видно, что имеет место попарное пересечение построенных шаров. Это обстоятельство может быть учтено с помощью результатов, изложенных в [4].

Выводы

В настоящей работе для некоторых малых небесных тел указаны их приближения парой гравитирующих шаров. Эти исследования могут стать основанием для применения к конкретным небесным телам результатов, полученных в работах [1–3, 8] и относящихся к существованию и устойчивости точек либрации конкретных астероидов.

Рис. 2. (2063) Бахус.

Рис. 3. (216) Клеопатра.

Рис. 4. (433) Эрос.

В дальнейшем целесообразно представление в рамках развиваемого подхода малых небесных тел в виде комбинации трех и четырех шаров и сопоставление полученных результатов с другими представлениями, предложенными в работе [13]. Предполагается, что такое исследование составит тему отдельной публикации.

References

- [1] Beletsky V. V. Generalized restricted circular three-body problem as a model for dynamics of binary asteroids, *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 5, pp. 408–416; see also: *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2007, vol. 45, no. 5, pp. 435–442.
- [2] Beletskii V. V., Ponomareva O. N. A parametric analysis of relative equilibrium stability in the gravitational field, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1990, vol. 28, no. 5, pp. 664–675 (Russian).
- [3] Beletskii V. V., Rodnikov A. V. Stability of triangle libration points in generalized restricted circular three-body problem, *Cosmic Research*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 40–48; see also: *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 42–50.
- [4] Burov A. A., Guerman A. D., Kosenko I. I., Nikonov V. I. On the gravity of dumbbell-like bodies represented by a pair of intersecting balls, *Nelin. Dinam.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 243–256 (Russian).
- [5] de La Vallée Poussin Ch.-J. *Leçons de mécanique analytique: Vol. 1. Vecteurs, cinématique, dynamique du point, statique*, 2nd ed., Louvain: UCL, 1932.
- [6] Duboshin G. N. On one particular case of the problem of the translational-rotational motion of two bodies, *Sov. Astron.*, 1959, vol. 3, no. 1, pp. 154–165; see also: *Astron. Zh.*, 1959, vol. 36, no. 1, pp. 153–163.
- [7] Karapetyan A. V., Sakhokia I. D. On bifurcation and stability of steady motions of two gravitating bodies, *J. Appl. Math. Mech.*, 1992, vol. 56, no. 6, pp. 839–842; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1992, vol. 56, no. 6, pp. 935–938.
- [8] Rodnikov A. V. Triangular libration points of the generalized restricted circular problem of three bodies for conjugate complex masses of attracting centers, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 213–222 (Russian).
- [9] Bartczak P., Breiter S. Double material segment as the model of irregular bodies, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2003, vol. 86, no. 2, pp. 131–141.
- [10] Bartczak P., Breiter S., Jusiel P. Ellipsoids, material points and material segments, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2006, vol. 96, no. 1, pp. 31–48.
- [11] Benner L. A. M., Hudson R. S., Ostro S. J., Rosema K. D., Giorgini J. D., Yeomans D. K., Jurgens R. F., Mitchell D. L., Winkler R., Rose R., Slade M. A., Thomas M. L., Pravec P. Radar observations of asteroid 2063 Bacchus, *Icarus*, 1999, vol. 139, no. 2, pp. 309–327.
- [12] Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2015, vol. 450, no. 4, pp. 3742–3749.
- [13] Herrera-Sucarrat E. *The full problem of two and three bodies: Application to asteroids and binaries*, Guildford: Univ. of Surrey, 2012.
- [14] Herrera-Sucarrat E., Palmer P. L., Roberts M. Modeling the gravitational potential of a nonspherical asteroid, *J. Guid. Control Dyn.*, 2013, vol. 36, no. 3, pp. 790–798.
- [15] Hitt D. L., Pearl J. M. Asteroid gravitational models using mascons derived from polyhedral sources, in *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference (Long Beach, Calif., Sept 2016)*, 12 pp.
- [16] Hudson R. S. Three-dimensional reconstruction of asteroids from radar observations, *Remote Sensing Rev.*, 1993, vol. 8, pp. 195–203.
- [17] Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh. Existence of a class of irregular bodies with a higher convergence rate of Laplace series for the gravitational potential, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2015, vol. 122, no. 4, pp. 391–403.
- [18] NEAR collected shape and gravity models, in *PDS Asteroid/Dust Archive*, sbn.psi.edu/pds/resource/nearmod.html
- [19] Park R. S., Werner R. A., Bhaskaran S. Estimating small-body gravity field from shape model and navigation data, *J. Guid. Control Dyn.*, 2010, vol. 33, no. 1, pp. 212–221.
- [20] Pucacco J., Boccaletti D., Belmonte C. On the orbit structure of the logarithmic potential, *Astrophys. J.*, 2007, vol. 669, no. 1, pp. 202–217.

- [21] Riaguas A., Elife A., Lara M. Periodic orbits around a massive straight segment, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 1999, vol. 73, nos. 1–4, pp. 169–178.
- [22] Riaguas A., Elife A., López-Moratalla T. Non-linear stability of the equilibria in the gravity field of a finite straight segment, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2001, vol. 81, no. 3, pp. 235–248.
- [23] Small body radar shape models, in *PDS Asteroid/Dust Archive*, sbn.psi.edu/pds/resource/rshape.html
- [24] Steinhaus H. Sur la division des corps matériels en parties, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, 1956, vol. 4, pp. 801–804.
- [25] Takahashi Yu., Scheeres D. J., Werner R. A. Surface gravity fields for asteroids and comets, *J. Guid. Control Dyn.*, 2013, vol. 36, no. 2, pp. 362–374.
- [26] Takahashi Yu., Scheeres D. J. Small body surface gravity fields via spherical harmonic expansions, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2014, vol. 119, no. 2, pp. 169–206.
- [27] Turconi A., Palmer Ph., Roberts M. Efficient modelling of small bodies gravitational potential for autonomous proximity operations, in *Astrodynamics Network AstroNet-II*, G. Gómez, J. J. Masdemont (Eds.), *Astrophys. Space Sci. Proc.*, vol. 44, Cham: Springer, 2016, pp. 257–272.
- [28] Werner R. A. Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron, *Comput. Geosci.*, 1997, vol. 23, no. 10, pp. 1071–1077.
- [29] Werner R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 1994, vol. 59, no. 3, pp. 253–278.
- [30] Werner R. A., Scheeres D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 1996, vol. 65, no. 3, pp. 313–344.

On the use of the K -means algorithm for determination of mass distributions in dumbbell-like celestial bodies

Alexander A. Burov¹, Anna D. Guerman², Ekaterina A. Raspopova³, Vasily I. Nikonov⁴

¹Federal Research Center “Computer Science and Control”,
ul. Vavilova 40, Moscow 119333, Russia

¹National Research University “Higher School of Economics”
ul. Myasnitskaya 20, Moscow, 101000, Russia

²Centre for Mechanical and Aerospace Science and Technologies, University of Beira Interior,
Convento de Sto. António. 6201-001 Covilhã, Portugal

³Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

⁴Centre for Mechanical and Aerospace Science and Technologies, University of Beira Interior,
Convento de Sto. António. 6201-001 Covilhã, Portugal

(on leave from FRC “Computer Science and Control” of the RAS)

¹jtm@narod.ru, ²anna@ubi.pt, ³katerinka9214@gmail.com, ⁴nikon_v@list.ru

It is well known that several small celestial objects are of irregular shape. In particular, there exist asteroids of the so-called “dog-bone” shape. It turns out that approximation of these bodies by dumb-bells, as proposed by V. V. Beletsky, provides an effective tool for analytical investigation of dynamics in vicinities of such bodies. There remains the question of how to divide reasonably a “dogbone” body into two parts using available measurement data.

In this paper we introduce an approach based on the so-called K -mean algorithm proposed by the prominent Polish mathematician H. Steinhaus.

MSC 2010: 70K20, 70K42, 70F05

Keywords: K -means algorithm, small celestial bodies, mesh representation of an asteroid's surface

Received November 14, 2017, accepted December 23, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 45–52 (Russian)