ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.957

MSC 2010: 35Q55, 37K10

Квазирациональные решения нелинейного уравнения Шрёдингера

В. Б. Матвеев, Ф. Дюбард, А. О. Смирнов

Рассматривается метод построения квазирациональных решений нелинейного уравнения Шрёдингера, уравнения Кадомцева – Петвиашвили и некоторых других интегрируемых нелинейных уравнений. Приводятся примеры решений ранга 2 и 3.

Ключевые слова: волны-убийцы, странные волны, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение КП, преобразование Дарбу

Введение

В этой статье мы обсуждаем мультибризерные (multi-rogue) волны, являющиеся решениями фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера (НШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \quad (0.1)$$

уравнения Кадомцева – Петвиашвили-I (КП-I)

$$(4v_t + 6vv_x + v_{xxx})_x = 3v_{yy} \quad (0.2)$$

и некоторых других интегрируемых нелинейных уравнений.

Получено 25 октября 2014 года
После доработки 17 января 2015 года

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00589_a).

Матвеев Владимир Борисович
vladimir.matveev9@gmail.com
Смирнов Александр Олегович
alsmir@guar.ru

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП)
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67

Дюбард Филипп
philippe.dubard@aliceadsl.fr

Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa

В последнее время было осознано, что простейшей и наиболее универсальной моделью для описания возникновения экстремальных волн в океане или оптическом волокне являются именно эти уравнения. Начиная с 1968 года уравнение (0.1) используется при описании распространения на поверхности океана слабо нелинейных квазимонохроматических волновых пакетов с относительно большой крутизной фронтов [1]. Приложения этого уравнения к задачам нелинейной оптики были известны еще раньше [2]. Поскольку уравнение (0.1) является моделью первого приближения, то оно появляется при моделировании многих слабо нелинейных явлений. Область применения этого уравнения чрезвычайно широка и, помимо упомянутых выше, включает в себя физику плазмы [3], теорию финансовых рынков [4], теорию Бозе-конденсатов и многое другое.

Одной из особенностей уравнения (0.1) является наличие модуляционной неустойчивости, приводящей к возникновению так называемых «странных волн» (в гидродинамике известных под названием «волн-убийц») [5]. Эти волны представляют собой локализованные в пространстве и времени всплески амплитуды. В последние 20 лет сначала в гидродинамике, а затем в нелинейной оптике эти волны были объектом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований [6]. Такое внимание к проблеме «волн-убийц» объясняется, в частности, убытками от разрушения «волнами-убийцами» нефтяных платформ, танкеров, контейнеровозов и других крупнотоннажных судов.

Существует множество более сложных моделей, которые дают более точное описание «странных волн» [6]. Эти модели условно можно разбить на два класса. К некоторым моделям, как и к уравнению (0.1), можно применять аналитические методы. Другие модели являются неинтегрируемыми и могут быть решены только численными методами. К аналитическим методам, применяемым для решения интегрируемых нелинейных уравнений, относятся метод обратной задачи рассеяния, метод конечнозонного интегрирования [7], метод задачи Римана, метод преобразования Дарбу [8], метод Хироты. В настоящей работе используются формулы, полученные методом преобразования Дарбу.

В основу метода преобразования Дарбу положена его короткая заметка 1882 года, в которой была указана процедура получения бесконечной серии новых одномерных уравнений Шрёдингера и их решений исходя из произвольно выбранного исходного уравнения. При этом решения новых уравнений выражаются в терминах решений исходного уравнения, соответствующих различным значениям спектрального параметра, при помощи простых детерминантных формул, найденных в 1954 году английским математиком Крамом. В работах одного из авторов [9–11] было предложено широкое обобщение этой идеи, названное им методом преобразований Дарбу. Метод преобразований Дарбу позволяет находить широкие классы точных решений линейных дифференциальных уравнений и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих представление Лакса. В своей первоначальной формулировке этот метод был применен к бесконечной иерархии уравнений Кадомцева–Петвиашвили (КП-I) и ее некоммутативным и разностным аналогам [9–11]. Дальнейшее развитие этого метода, включающее в себя, в частности, результаты работ [12–14], содержится в широко цитируемой монографии [8] и обзорной статье [15], а также в тысячах новых публикаций, которые мы не будем здесь цитировать за недостатком места.

Решения уравнения (0.1) обладают фундаментальным свойством трансляционной, масштабной, галилеевой и фазовой инвариантности: вместе с решением $u(x, t)$ решениями уравнения (0.1) являются также функции

$$u(x - x_0, t - t_0), \quad (0.3)$$

$$qu(q^2x, qt), \quad q > 0, \quad (0.4)$$

$$u(x, t) \rightarrow u(x - Vt, t) \exp(iVx/2 - iV^2t/4), \quad V \in \mathbb{R}, \quad (0.5)$$

$$u(x, t) \rightarrow e^{i\chi} u(x, t), \quad \chi \in \mathbb{R}. \quad (0.6)$$

Уравнение (0.1) обладает простейшими, не зависящими от x , решениями $p(t)$ типа простой волны: $u(t) = \exp(2it)$, $|u(t)| = 1$. В дальнейшем мы будем интересоваться рациональными модуляциями этого решения, то есть решениями вида

$$u(x, t) = R(x, t) \exp(2it), \quad R(x, t) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad x^2 + t^2 \rightarrow \infty,$$

где $R(x, t)$ — рациональная функция, числитель и знаменатель которой представляют собой полиномы степени $n(n+1)$ от x и t . Целое положительное число n мы называем рангом решения. При этом сам рациональный множитель $R(x, t)$ автоматически удовлетворяет уравнению Гросса–Питаевского:

$$iR_t + 2R(|R|^2 - B^2) + R_{xx} = 0, \quad |R| = |u|. \quad (0.7)$$

Переход к более общим квазирациональным решениям осуществляется тривиальным применением пространственных и временных трансляций (0.3), а также масштабных (0.4), галилеевых (0.5) и фазовых (0.6) преобразований. В период с 1983 года по 2010 год деятельность по описанию квазирациональных решений насчитывала небольшое число важных событий.

В 1983 году английский математик Хоуэлл Перегрин нашел квазирациональное решение уравнения (0.1) следующего вида [16]:

$$u(x, t) := \left(1 - 4 \frac{1 + iT}{1 + X^2 + T^2}\right) e^{iT/2}, \quad X := 2x, \quad T := 4t. \quad (0.8)$$

Это решение единственно с точностью до деформаций его при помощи преобразований, упомянутых в начале раздела. Его абсолютная величина имеет единственный локальный максимум в точке $x = 0$, $t = 0$ ($|u(0, 0)| = 3$) и два минимума. При $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ второе слагаемое в скобке стремится к нулю и, следовательно,

$$u(x, t) \sim e^{2it}, \quad |u| \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad x^2 + t^2 \rightarrow \infty.$$

Решение Перегрин, график которого показан на рисунке 1, представляет собой пример волны, амплитуда которой достигает единственного резкого максимума высоты 3 в единственной точке пространства-времени и, таким образом, хорошо соответствует свойству волн-убийц возникать ниоткуда и затем исчезать бесследно [17], которое часто закладывают в их определение.

Следующим важным этапом было открытие нового квазирационального решения ранга 2 или, как мы его называем, P_2 -бризера, сделанное в 1985 году в работе Ахмедиева, Елеонского и Кулагина [18]. Данное решение описывается формулой, аналогичной предыдущей, в которой полиномы, стоящие в числителе и в знаменателе рационального фактора решения, имеют степень 6 по каждой из переменных x и t . Максимум абсолютной величины этого решения равен 5 и имеется еще 4 значительно меньших локальных максимумов. Открытие этого изолированного, но очень важного решения поставило вопрос об описании более широких семейств квазирациональных решений.

Годом позже работы [18] в работе Елеонского, Кричевера и Кулагина [19] возникла первая общая формула для квазирациональных решений уравнения (0.1), содержащая первую

Рис. 1. Солитон Перегринна.

общую конструкцию этих решений произвольного ранга. В отличие от предыдущих работ, полученные в ней решения ранга n зависели от $2n$ вещественных параметров, первые два из которых соответствовали пространственным и временным трансляциям, а остальные параметры были нетривиальны. Работа эта, несмотря на правильность общей стратегии и всех формул, исключая специальный выбор некоторых «сигнатур» m_j (их точные определения даны ниже), не была, однако, как следует осознана вплоть до самого последнего времени (до 2010 года). В частности, в течение 25 лет оставалось невыясненным, можно ли получить формулу для P_2 -бризера как редукцию решений ранга 2 из [19].

Лишь в 2009 году Ахмедиев, Анкевич и Сото-Креспо [20], применяя метод преобразований Дарбу, построили изолированное решение ранга 3, то есть P_3 -бризер с асимптотической амплитудой 1, в котором рациональный фактор представлял отношение двух полиномов 12-й степени по x и t и максимумом абсолютной величины, равным 7. В этой работе и в серии последующих работ они выдвинули гипотезу о существовании бесконечной серии высших перегриновских бризеров — P_n -бризеров с асимптотической амплитудой 1 и максимумом абсолютной величины, равным $2n + 1$. Однако сами они не смогли продвинуться в подтверждении этой гипотезы за пределы ранга 3. В 2010 году им удалось лишь явно описать $P_4(x, 0)$. Вопрос о соотношении их решений с формулами работы [19] также оставался открытым до самого последнего времени.

В 2010 один из авторов этой работы (В. Б. Матвеев) выдвинул широкую программу исследования квазирациональных решений уравнения (0.1). В данной работе мы представляем основные результаты, полученные в ходе реализации этой программы, в том числе и полученные в последнее время.

1. Основные формулы

Пусть n есть натуральное число. Следуя [19], мы определяем полиномы $q_{2n}(k)$ и $\Phi(k)$ следующими формулами:

$$q_{2n}(k) := \prod_{j=1}^n \left(k^2 - \frac{\omega^{2m_j+1} + 1}{\omega^{2m_j+1} - 1} B^2 \right), \quad \omega := \exp \left(\frac{i\pi}{2n+1} \right), \quad (1.1)$$

$$\Phi(k) := i \sum_{l=1}^{2n} \varphi_l(ik)^l, \quad B > 0, \quad (1.2)$$

где коэффициенты $\varphi_l \in \mathbb{R}$, а m_j удовлетворяют соотношениям

$$0 \leq m_j \leq 2n - 1, \quad m_l \neq 2n - m_j. \quad (1.3)$$

В частности, эти условия выполняются при выборе $m_j = j - 1$. Всюду ниже мы используем именно этот выбор m_j . В работе [19] этот последний выбор был заменен соотношением $m_j = j$, не удовлетворяющим общим условиям (1.3)¹. Рассмотрим теперь функцию f , определяемую формулой

$$f(k, x, t) := \frac{\exp(kx + ik^2t + \Phi(k))}{q_{2n}(k)} \quad (1.4)$$

и при любом значении параметра k являющуюся решением линейного нестационарного уравнения Шрёдингера с нулевым потенциалом

$$-if_t = f_{xx}. \quad (1.5)$$

Нетрудно проверить, что функции $f_1, \dots, f_{2n}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} f_j(x, t) &:= D_k^{2j-1} f(k, x, t)|_{k=B}, & D_k &:= \frac{k^2}{k^2 + B^2} \frac{\partial}{\partial k}, & j &= 1, \dots, n, \\ f_{n+j}(x, t) &:= D_k^{2j-1} f(k, x, t)|_{k=-B}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

также являются решениями уравнения (1.5).

Обозначим через W_1, W_2 определители Вронского, составленные из функций f_j и f , определенных выше,

$$W_1 := W(f_1, \dots, f_n) \equiv \det A, \quad A_{lj} = \partial_x^{l-1} f_j, \quad W_2 := W(f_1, \dots, f_n, f).$$

Теорема 1. *Функция*

$$u_n(x, t) := (-1)^n q_{2n}(0) B^{1-2n} e^{2iB^2t} \frac{W_2|_{k=0}}{W_1} \quad (1.7)$$

описывает семейство решений уравнения (0.1), зависящее от $2n + 1$ вещественных параметров $\varphi_1, \dots, \varphi_n, B$.

Будем называть это решение квазирациональным решением ранга n . В обозначениях, не использующих определителей Вронского, это решение было впервые получено в работе [19]. При $n = 1$ оно совпадает с так называемым бризером Перегринна или, как мы будем называть его для краткости, P_1 -бризером [16].

2. Нестационарное линейное уравнение Шрёдингера и уравнение Кадомцева – Петвиашвили-I

Система Лакса для уравнения Кадомцева – Петвиашвили-I (КП-I) имеет вид

$$-i\psi_y = \psi_{xx} + v(x, y, t)\psi, \quad (2.1)$$

$$-4\psi_t = 4\psi_{xxx} + 6v\psi_x + 3w(x, y, t)\psi. \quad (2.2)$$

¹Общий анализ условий (1.3), уточняющий результаты [19], и дальнейшие комментарии по этому поводу содержатся в диссертации Ф. Дюбарда [21].

Первое из уравнений этой системы есть нестационарное линейное уравнение Шрёдингера с потенциалом $v(x, y)$, в котором роль времени играет переменная y , тогда как t является параметром. Уравнение КП-I является условием совместности вышеописанной системы Лакса. По отношению к этому уравнению x и y являются пространственными переменными, а t — временной переменной.

Пусть $v(x, y, t)$ — любое решение уравнения КП-I (0.2), а $f_1, \dots, f_n, f$ — линейно независимые решения системы (2.1), (2.2). Тогда имеет место следующий результат²

Теорема 2. *Функция*

$$\psi := \frac{W(f_1, \dots, f_n, f)}{W(f_1, \dots, f_n)} \quad (2.3)$$

удовлетворяет системе (2.1), (2.2) с потенциалом

$$v_n(x, y, t) := v(x, y, t) + 2\partial_x^2 \ln W(f_1, \dots, f_n). \quad (2.4)$$

При этом функция $v_n(x, y, t)$ является новым решением уравнения КП-I (0.2).

В частности, это верно при $v(x, y, t) = 0$ и $w = 0$. Очевидно, что функции f, f_j , $j = 1, \dots, 2n$, определенные формулами (1.6), удовлетворяют системе Лакса (2.1)–(2.2) с $v = 0$, $w = 0$ при условии, что мы заменим t на y и φ_3 на $-t$. Отсюда мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Последовательность функций*

$$v_{2n}(x, y, t) := 2\partial_x^2 \log W(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{2n}), \quad \tilde{f}_j(x, y, t) := f_j|_{t=y, \varphi_3=-t}, \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{f}_j(x, y, t) := f_j|_{t=y, \varphi_3=-t},$$

а f_j определены в (1.6), является семейством вещественных рациональных (как функция от x, y и t) решений уравнения КП-I. Эти решения удовлетворяют соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{2n}(x, y, t) dx = 0. \quad (2.6)$$

Решения (2.5) также являются рациональными функциями от $2n - 1$ параметров $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2n}$.

Данные решения уравнения КП-I являются вещественными гладкими функциями в силу обнаруженного нами следующего важного соотношения, которое мы называем соответствием НШ-КП:

Теорема 4. *Решение (2.5) может быть также записано в виде*

$$v_{2n} = 2(|\tilde{u}_n|^2 - B^2), \quad \tilde{u}_n(x, y, t) := u_n(x, t, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n})|_{t=y, \varphi_3=-t}. \quad (2.7)$$

Соответственно, функция $v_{2n}(x, y, t)$ удовлетворяет неравенству

$$v_{2n} \geq -2B^2. \quad (2.8)$$

²Работы [9] и [15] содержат более общие результаты, непосредственно приложимые к некоммутативным иерархиям уравнений КП-I и КП-II и их различным редукциям.

Имеет место следующая общая гипотеза: максимальное значение функции $|u_n(x, t)|$ в классе квазирациональных решений ранга n с асимптотической магнитудой B описывается формулой

$$\max_{x, t, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n} \in R} |u_n(x, t, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n})| = B(2n + 1). \quad (2.9)$$

Решение, для которого параметры $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ выбраны таким образом, что этот максимум реализуется при некоторых x и t , обозначается $P_n(x, t)$ и называется P_n -бризером или перегриновским бризером ранга n .

Гипотеза существования бесконечной иерархии P_n -бризеров была впервые высказана Ахмедиевым и подтверждена им и его соавторами для $n \leq 3$ (см., например, [20])³. В настоящее время эта гипотеза проверена для $n \leq 10$ в работах Гайарда [?], хотя общее доказательство по-прежнему отсутствует. Современная строгая формулировка этой гипотезы была предложена Матвеевым. Эта формулировка исходит из того, что следует начинать с аналитического описания всего класса квазирациональных решений с фиксированной асимптотической магнитудой 1 на бесконечности. Матвеев и Дюбард [22, 24] показали, что в общем положении абсолютная величина этих (комплексных) решений имеет $n(n + 1)/2$ максимумов высоты близкой к 3, то есть к высоте магнитуды P_1 -бризеров, и (при любых значениях параметров) $n(n + 1)$ минимумов. При специальном выборе параметров (трудность которого существенно зависит от удачного выбора параметризации) возникает решение, имеющее один очень высокий максимум высоты $2n + 1$ и $n(n + 1) - 1$ локальных максимумов очень незначительной высоты и (как и в остальных случаях) $n(n + 1)$ локальных минимумов магнитуды. Это последнее решение и есть P_n -бризер. Эти оценки числа максимумов, в отличие от минимумов, не являются абсолютно универсальными, как будет объяснено ниже на примере решений ранга 2 и 3.

Заметим, что во всех этих случаях в принципе можно ограничиться, без потери общности, анализом решений уравнения НШ с асимптотической магнитудой 1. Действительно, масштабное преобразование

$$u(x, t) \rightarrow Bu(Bx, B^2t)$$

переводит решения с асимптотической магнитудой 1 в решения с асимптотической магнитудой B .

Если описанная гипотеза верна применительно к уравнению НШ для всех рангов n , то, в силу соответствия НШ-КП, соответствующий абсолютный максимум решения (2.5) уравнения КП-I описывается формулой

$$\max_{x, y, t \in R} v(x, y, t) = 8B^2n(n + 1), \quad (2.10)$$

то есть его значение равно числу максимумов (пиков) решения общего положения ранга n , помноженному на $16B^2$. Последний фактор есть ни что иное, как образ P_1 -бризера в соответствии НШ-КП.

³Сама формулировка была при этом недостаточно четкой. В ней отсутствовало описание всего класса квазирациональных многопараметрических решений уравнения НШ, специальными редукциями которых являются P_n -бризеры, и, таким образом, отсутствовал общий механизм их получения.

3. Редукция к нелинейному уравнению Шрёдингера

Согласно теореме 2, функция

$$\psi(x, t, k) := \frac{W(f_1, \dots, f_{2n}, f)}{W(f_1, \dots, f_{2n})} \quad (3.1)$$

удовлетворяет уравнению

$$i\psi_t + \psi_{xx} + v\psi = 0 \quad (3.2)$$

с потенциалом

$$v(x, t) := 2\partial_x^2 \log W(f_1, \dots, f_{2n}). \quad (3.3)$$

Отметим, что это верно и для выражения

$$R_C(x, t) := C\psi(x, t, 0). \quad (3.4)$$

Этот общий результат верен всегда, если функции f_j являются решениями уравнения (1.5). Отметим, что R_C — рациональное решение уравнения (3.2). Специальный выбор f_j и правильный выбор постоянной C позволяет нам свести уравнение (3.2) к уравнению (0.1).

Теорема 5. Пусть $C = e^{ix} q_{2n}(0) B^{1-2n}$. Тогда v и R , определяемые формулами (3.3) и (3.4), удовлетворяют соотношению

$$v = 2(|R|^2 - B^2).$$

Наше доказательство этого утверждения приведено в работе [22]⁴.

4. Решения ранга 1 и 2

В этом разделе мы полагаем, что $B = 1$, $v = 0$, $\chi = 0$. Переход к общему выбору этих (вещественных) параметров легко осуществляется при помощи масштабного (0.4), галилеевского (0.5) и фазового (0.6) преобразований соответственно.

Фазовые параметры φ_1 и φ_2 имеют смысл пространственного и временного сдвига соответственно. Поэтому мы можем подобрать их значения так, чтобы получить наиболее компактный вид формул. Среди $2n + 2$ параметров χ , $B\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ лишь $2n - 2$ параметров, а именно $\varphi_3, \dots, \varphi_{2n}$, имеют нетривиальное влияние на вид графика магнитуды решений.

В случае ранга $n = 1$ это означает, что с точностью до упомянутых выше тривиальных преобразований решение, описываемое формулой (1.7), единственно. При выборе $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \sqrt{3}/4$ мы получаем классическое решение (0.8), найденное Перегрином. График его абсолютной величины как функции от x и t представлен на рисунке 1.

Случай ранга $n = 2$ является первым, в котором мы получаем семейство квазирациональных решений, зависящих от четырех параметров, в том числе от двух нетривиальных

⁴Наше доказательство этого утверждения совпадает с приведенным в [19] с точностью до модификации обозначений. Доказательство гладкости полученных решений (1.7) в [19] излишне сложно. Оно прямо вытекает из самой структуры фокусирующего уравнения НШ и мероморфности обсуждаемых решений как функций от x и совпадает с доказательством гладкости, проведенным в [23] для класса тригонометрических многофазных решений.

параметров φ_3, φ_4 . Мы уже объяснили выше, что параметр φ_3 связан с уравнением КП-I. Для удобства записи полагаем $\varphi_1 = 3\varphi_3$ и $\varphi_2 = 2\varphi_4 + (3 + \sqrt{5})\sin(\pi/5)/4$ и переходим от пары параметров $\{\varphi_3, \varphi_4\}$ к новым параметрам $\{\alpha, \beta\}$, определяемым формулами

$$\begin{aligned}\alpha &:= 48\varphi_3, \\ \beta &:= 4(5 + \sqrt{5})\sin(\pi/5) - 96\varphi_4.\end{aligned}$$

В терминах этих новых параметров решение ранга 2 принимает вид

$$u_2(x, t, \alpha, \beta) = \left(1 - 12 \frac{G(2x, 4t) + iH(2x, 4t)}{Q(2x, 4t)}\right) e^{2it}, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned}G(X, T) &:= X^4 + 6(T^2 + 1)X^2 + 4\alpha X + 5T^4 + 18T^2 - 4\beta T - 3, \\ H(X, T) &:= TX^4 + 2(T^3 - 3T + \beta)X^2 + 4\alpha TX + T^5 + 2T^3 - \\ &\quad - 2\beta T^2 - 15T + 2\beta, \\ Q(X, T) &:= (1 + X^2 + T^2)^3 - 4\alpha X^3 - 12(2T^2 - \beta T - 2)X^2 + \\ &\quad + 4(3\alpha(T^2 + 1)X + 6T^4 - \beta T^3 + 24T^2 - 9\beta T + \\ &\quad + \alpha^2 + \beta^2 + 2).\end{aligned} \quad (4.2)$$

При $\alpha = \beta = 0$ это решение совпадает с P_2 -бризером, для которого максимум магнитуды равен 5 и достигается в точке $x = t = 0$. Для достаточно малых значений $\alpha^2 + \beta^2$ решение очень близко к P_2 -бризеру. Формулы (4.1), (4.2) показывают, что решение $u_2(x, t, \alpha, \beta)$ может рассматриваться как двухпараметрическая квадратичная деформация P_2 -бризера. Если хотя бы один (или оба) из параметров α, β достаточно велик, то решение имеет общую форму, соответствующую трем взаимодействующим волнам-убийцам. График абсолютной величины этого решения имеет три резко выраженных максимума в пространстве-времени (x, t) , и высота максимумов близка к высоте перегриновского P_1 -бризера.

Эти два случая хорошо иллюстрируются графиками на рисунках 2 и 3. При промежуточных значениях параметров возможно слияние двух из этих максимумов в один максимум большей высоты и тем самым возможно образование решения с двумя максимумами.

Рис. 2. Амплитуда решения ранга 2 (4.1) для $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ (слева) и для $\alpha = 0$ и $\beta = 3$ (справа).

Рис. 3. Амплитуда решения ранга 2 (4.1) для $\alpha = 6$ и $\beta = 0$ (слева) и для $\alpha = 5$ и $\beta = 5$ (справа).

Запись решения с помощью формул (4.1), (4.2) впервые была представлена в [21, 22, 24]⁵. Она очень важна, так впервые показала что, в отличие от P_1 -бризера, открытого Перегрином, его высшие аналоги не изолированы, а составляют часть многопараметрического семейства решений с очень интересными свойствами.

Формула (4.1), в частности, содержит бесконечное множество решений, полученных малыми вариациями параметров α, β в окрестности нуля. Эти решения по своим экстремальным свойствам оказываются сколь угодно близки к P_2 -бризеру, что создает дополнительные возможности для гидродинамических и оптических экспериментов и показывает определенный вид его устойчивости. Формула (4.1) также дает ясный ответ на вопрос, поставленный работой Ахмедиева, Елеонского и Кулагина [25] почти 30 лет назад: каким образом погрузить P_2 -бризер в более широкое семейство квазирациональных решений уравнения НШ?

Решение $u_2(x, t, \alpha, \beta)$ стремится к простой волне e^{2it} , когда $\alpha^2 + \beta^2$ стремится к бесконечности. Таким образом, простая волна, то есть решение ранга 0, может быть интерпретировано как предел трехбризерного решения при $\alpha^2 + \beta^2 \rightarrow \infty$. Ниже мы покажем, что поведение решений высших рангов при больших значениях параметров более разнообразно.

5. Решения ранга 2 уравнений, связанных с нелинейным уравнением Шрёдингера

Для построения решений этих уравнений воспользуемся другой параметризацией. Введем новые обозначения

$$\begin{aligned} X &= 2x + 6\varphi_3, & T &= 4t + 8\varphi_4, \\ \varphi_1 &= 0, & \varphi_2 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right), \\ \varphi_3 &= \frac{Y}{96}, & \varphi_4 &= \frac{Z}{192} + \frac{\sqrt{2}}{48} \left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} + 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

и функцию

$$u_2(X, T, Y, Z) = \left(1 - 12 \frac{G(X, T, Y, Z) + iH(X, T, Y, Z)}{Q(X, T, Y, Z)} \right) e^{2it}, \quad (5.1)$$

⁵В [21, 24] параметры были определены слегка иначе. Они пропорциональны использованным здесь с целью максимального сокращения длины формул.

Рис. 4. Решение уравнения КП-I (0.2) для $t = -1$ (слева) и для $t = 0$ (справа).

Рис. 5. Решение уравнения КП-I (0.2) для $t = 1$ (слева) и для $t = 2$ (справа).

где

$$\begin{aligned} G(X, T, Y, Z) &= (X^2 + 3T^2 + 3)^2 - 4T^4 + 2XY + 2TZ - 12, \\ H(X, T, Y, Z) &= T(X^2 + T^2 + 1)^2 + 2XYT + Z(T^2 - X^2 - 1) - 8T(X^2 + 2), \\ Q(X, T, Y, Z) &= (X^2 + T^2 + 1)^3 + Y^2 + 2XY(3T^2 - X^2 + 3) + Z^2 + 2TZ(T^2 - 3X^2 + 9) + \\ &\quad + 24T^4 - 24T^2X^2 + 96T^2 + 24X^2 + 8. \end{aligned}$$

Отметим, что функция $u_2(X, T, 0, Z)$ является четной функцией относительно X , а $u_2(X, T, Y, 0)$ — четной относительно T .

В новых обозначениях решением уравнения НШ (0.1) будет функция $u_2(2x, 4t, Y, Z)$, а решение уравнения КП-I (0.2) имеет вид

$$v(x, y, t) = 2(|u_2(2x - 6t, 4y, -96t, Z)|^2 - 1). \quad (5.2)$$

Графики решения (5.2) при $Z = 0$ в различные моменты времени t изображены на рисунках 4 и 5. Динамика решения уравнения КП-I ранга 2 при $Z = 0$ описывается достаточно простым образом: три пика прибегают из бесконечности в одну точку и затем разбегаются, продолжая свое движение дальше.

Заметим, что функция

$$u_{mkdv}(x, y) = u_2(2x - 12y, T, -96y, Z)$$

удовлетворяет следующему за уравнением НШ интегрируемому уравнению из АКС-иерархии [26], иногда называемому модифицированным уравнением Кортевега – де Фриза (мКдФ)

$$u_y + u_{xxx} + 6|u|^2 u_x = 0. \quad (5.3)$$

Отметим, что обычное уравнение мКдФ не содержит знака модуля и у него рассматриваются только вещественные решения. На рисунках 6 и 7 изображено решение $u_{mkdv}(x, y)$ при некоторых значениях параметров T и Z .

Легко видеть, что есть существенное различие в поведении квазирациональных решений уравнений (0.1) и (5.3). Решение ранга 2 уравнения (5.3), в отличие от аналогичного решения уравнения НШ (0.1), не является локализованным на плоскости. Вернее, оно локализовано в окрестности прямой $x - 2y = 0$.

Кроме того, нетрудно проверить, что функция

$$u_{pd}(x, z) = u_2(2x, T + 24z, Y, 192z)e^{6iz}$$

является решением третьего уравнения из АКС-иерархии

$$iu_z + u_{xxxx} + 8|u|^2 u_{xx} + 2u^2 u_{xx}^* + 6u_x^2 u^* + 4u|u_x|^2 + 6|u|^4 u = 0, \quad (5.4)$$

которое иногда называют обобщенным нелинейным уравнением Шрёдингера [27–30] или уравнением Лакшманана – Порсециана – Даниеля [31].

Рис. 6. Амплитуда решения уравнения (5.3) для $T = 0$ и $Z = 0$ (слева) и для $T = 1$ и $Z = 0$ (справа).

Рис. 7. Амплитуда решения уравнения (5.3) для $T = 0$ и $Z = 5$ (слева) и для $T = 1$ и $Z = 5$ (справа).

Графики решения $u_{lpd}(x, z)$ уравнения (5.4) при различных значениях параметров изображены на рисунках 8 и 9. Анализ этих графиков показывает, что за счет вхождения переменной z во вторую фазу поведение решения уравнения (5.4) слабо отличается от соответствующего решения уравнения НШ (0.1).

Поскольку уравнения (0.1), (5.3), (5.4) инвариантны относительно сдвига по независимым переменным, то функция

$$U_2(x, t, y, z) = u_2(2x - 12y, 4t + 24z, -96y, 192z)e^{6iz}$$

является одновременно решением всех трех этих уравнений.

Комбинируя уравнение (0.1) и (5.3), получаем интегрируемое уравнение Хироты [31–34]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u - i\alpha(u_{xxx} + 6|u|^2u_x) = 0, \quad (5.5)$$

решение ранга 2 которого имеет вид

$$u_{hir}(x, t) = u_2(2x + 12\alpha t, T_0 + 4t, Y_0 + 96\alpha t, Z).$$

Графики решения уравнения Хироты (5.5) при $\alpha = 0.1$ и некоторых значениях начальных фаз T_0 , Y_0 и Z изображены на рисунках 10 и 11.

Рис. 8. Амплитуда решения уравнения (5.4) для $T = 0$ и $Y = 0$ (слева) и для $T = 0$ и $Y = 10$ (справа).

Рис. 9. Амплитуда решения уравнения (5.4) для $T = 5$ и $Y = 0$ (слева) и для $T = 5$ и $Y = 50$ (справа).

Рис. 10. Амплитуда решения уравнения (5.5) для $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$ и $Z = 0$ (слева) и для $T_0 = 0$, $Y_0 = 5$ и $Z = 0$ (справа).

Рис. 11. Амплитуда решения уравнения (5.5) для $T_0 = 5$, $Y_0 = 0$ и $Z = 0$ (слева) и для $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$ и $Z = 10$ (справа).

Другим интегрируемым обобщением уравнения НШ является уравнение [30, 31]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u - i\alpha(u_{xxx} + 6|u|^2u_x) + \gamma(u_{xxx} + 6u_x^*u^* + 4u|u_x|^2 + 8u_{xx}|u|^2 + 2u_{xx}^*u^2 + 6u|u|^4) = 0.$$

Нетрудно понять, что, поскольку оно представляет собой комбинацию уравнений (0.1), (5.3) и (5.4), его решение ранга 2 имеет вид

$$u_{gnls} = u_2(2x + 12\alpha t, (4 + \gamma)t, 96\alpha t, 192\gamma t)e^{6i\gamma t}.$$

Графики этого решения мы не приводим, поскольку нет принципиальных отличий от графиков решений уравнений (0.1), (5.4) и (5.5).

6. Решения ранга 3

Фазовая параметризация (с помощью φ_j), описанная выше, трудна для нахождения значений фаз, описывающих P_n -бризеры высшего ранга. Как это было сделано в разделе 4, здесь мы вводим четыре новых существенных параметра $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$. Фазовые параметры

мы выбираем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 3\varphi_3 - 5\varphi_5, \\
 \varphi_2 &= 2\varphi_4 - 3\varphi_6 + \frac{\sin(\pi/7)}{4(1 - \cos(\pi/7))}, \\
 768\varphi_3 &= 26\alpha_1 - \alpha_2, \\
 1920\varphi_4 &= -40\beta_1 + \beta_2 + 96(3\sin(\pi/7) + 8\sin(2\pi/7) + 2\sin(3\pi/7)), \\
 3840\varphi_5 &= 10\alpha_1 - \alpha_2, \\
 7680\varphi_6 &= -20\beta_1 + \beta_2 + 32(4\sin(\pi/7) + 14\sin(2\pi/7) + \sin(3\pi/7)).
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Подставляя эти формулы в выражение (1.7) для $n = 3$, мы нашли при помощи длинных вычислений с использованием MAPLE следующую формулу для «волн-убийц» ранга 3:

$$u_3(x, t, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \left(1 - 24 \frac{G_3(2x, 4t) + iH_3(2x, 4t)}{Q_3(2x, 4t)} \right) e^{2it}, \tag{6.2}$$

в которой

$$\begin{aligned}
 G_3(X, T) &= X^{10} + 15(T^2 + 1)X^8 + \sum_{n=0}^6 g_n(T)X^n, \\
 H_3(X, T) &= TX^{10} + 5(T^3 - 3T + \beta_1)X^8 + \sum_{n=0}^6 h_n(T)X^n, \\
 Q_3(X, T) &= (1 + X^2 + T^2)^6 - 20\alpha_1 X^9 - 60(2T^2 - \beta_1 T - 2)X^8 + 4 \sum_{n=0}^7 q_n(T)X^n,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 g_6 &= 50T^4 - 60T^2 + 80\beta_1 T + 210, \\
 g_5 &= 120\alpha_1 T^2 - 18\alpha_2 + 300\alpha_1, \\
 g_4 &= 70T^6 - 150T^4 + 200\beta_1 T^3 + 450T^2 + 30\beta_2 T - 450 + 150\alpha_1^2 - 50\beta_1^2, \\
 g_3 &= 400\alpha_1 T^4 + (3000\alpha_1 - 60\alpha_2)T^2 - 800\alpha_1\beta_1 T - 600\alpha_1 - 60\alpha_2, \\
 g_2 &= 45T^8 + 420T^6 + 6750T^4 - (6000\beta_1 - 180\beta_2)T^3 - (300\alpha_1^2 - 900\beta_1^2 + 13500)T^2 + \\
 &\quad + (3600\beta_1 + 180\beta_2)T - 675 - 300\alpha_1^2 - 300\beta_1^2, \\
 g_1 &= 280\alpha_1 T^6 + (150\alpha_2 - 2100\alpha_1)T^4 + 800\alpha_1\beta_1 T^3 - (3600\alpha_1 - 540\alpha_2)T^2 + \\
 &\quad + (120\beta_2\alpha_1 + 1200\alpha_1\beta_1 - 120\alpha_2\beta_1)T - 200\alpha_1\beta_1^2 - 900\alpha_1 - 90\alpha_2 - 200\alpha_1^3, \\
 g_0 &= 11T^{10} + 495T^8 - 120\beta_1 T^7 + 2190T^6 - (42\beta_2 + 1200\beta_1)T^5 + \\
 &\quad + (350\alpha_1^2 + 150\beta_1^2 - 7650)T^4 + (6600\beta_1 - 420\beta_2)T^3 - \\
 &\quad - (2100\beta_1^2 + 2025 - 120\beta_2\beta_1 - 120\alpha_2\alpha_1 + 900\alpha_1^2)T^2 + (200\alpha_1^2\beta_1 + 200\beta_1^3 - 90\beta_2)T + \\
 &\quad + 675 + 150\alpha_1^2 + 6\alpha_2^2 + 150\beta_1^2 + 6\beta_2^2, \\
 h_6 &= 10T^5 - 140T^3 + 40\beta_1 T^2 - 150T + 60\beta_1 - 5\beta_2, \\
 h_5 &= 40\alpha_1 T^3 + (60\alpha_1 - 18\alpha_2)T + 40\alpha_1\beta_1, \\
 h_4 &= 10T^7 - 210T^5 + 50\beta_1 T^4 - 450T^3 + 15\beta_2 T^2 - (50\beta_1^2 + 1350 - 150\alpha_1^2)T + \\
 &\quad + 150\beta_1 - 15\beta_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 &= 80\alpha_1 T^5 + (1000\alpha_1 - 20\alpha_2)T^3 - 400\alpha_1\beta_1 T^2 - (1800\alpha_1 - 60\alpha_2)T + \\
&\quad + 200\alpha_1\beta_1 + 20\beta_2\alpha_1 - 20\alpha_2\beta_1, \\
h_2 &= 5T^9 - 60T^7 + 1710T^5 + (45\beta_2 - 2100\beta_1)T^4 + (300\beta_1^2 - 6300 - 100\alpha_1^2)T^3 + \\
&\quad + (1800\beta_1 - 90\beta_2)T^2 + (4725 + 300\alpha_1^2 + 300\beta_1^2)T - 135\beta_2 - 100\beta_1^3 - \\
&\quad - 100\alpha_1^2\beta_1 - 900\beta_1, \\
h_1 &= 40\alpha_1 T^7 + (30\alpha_2 - 1140\alpha_1)T^5 + 200\alpha_1\beta_1 T^4 - (2400\alpha_1 - 60\alpha_2)T^3 + \\
&\quad + (60\beta_2\alpha_1 - 60\alpha_2\beta_1 + 600\alpha_1\beta_1)T^2 - (900\alpha_1 + 450\alpha_2 + 200\alpha_1^3 + 200\alpha_1\beta_1^2)T + \\
&\quad + 60\alpha_2\beta_1 - 60\beta_2\alpha_1, \\
h_0 &= T^{11} + 25T^9 - 15\beta_1 T^8 - 870T^7 + (40\beta_1 - 7\beta_2)T^6 + (70\alpha_1^2 - 9630 + 30\beta_1^2)T^5 + \\
&\quad + (5850\beta_1 - 75\beta_2)T^4 + (40\beta_2\beta_1 + 40\alpha_2\alpha_1 - 2475 - 900\alpha_1^2 - 1300\beta_1^2)T^3 + \\
&\quad + (100\alpha_1^2\beta_1 + 495\beta_2 + 100\beta_1^3)T^2 + (6\alpha_2^2 + 4725 - 240\alpha_2\alpha_1 - 240\beta_2\beta_1 + \\
&\quad + 750\beta_1^2 + 6\beta_2^2 + 750\alpha_1^2)T - 20\alpha_1^2\beta_2 - 675\beta_1 - 45\beta_2 - 100\alpha_1^2\beta_1 - 100\beta_1^3 + \\
&\quad + 40\alpha_2\alpha_1\beta_1 + 20\beta_1^2\beta_2, \\
q_7 &= 3\alpha_2 - 30\alpha_1, \\
q_6 &= -60T^4 + 40\beta_1 T^3 + 120T^2 - (15\beta_2 - 60\beta_1)T + 35\beta_1^2 + 15\alpha_1^2 + 580, \\
q_5 &= 30\alpha_1 T^4 - (27\alpha_2 - 90\alpha_1)T^2 + 120\alpha_1\beta_1 T - 27\alpha_2 + 540\alpha_1, \\
q_4 &= 30\beta_1 T^5 - 360T^4 + (15\beta_2 + 600\beta_1)T^3 + (3360 + 225\alpha_1^2 - 75\beta_1^2)T^2 + \\
&\quad + (135\beta_2 - 1350\beta_1)T + 225\beta_1^2 - 30\alpha_2\alpha_1 + 525\alpha_1^2 - 30\beta_2\beta_1 + 840, \\
q_3 &= 40\alpha_1 T^6 + (1950\alpha_1 - 15\alpha_2)T^4 - 400\alpha_1\beta_1 T^3 + (90\alpha_2 + 4500\alpha_1)T^2 + \\
&\quad + (60\beta_2\alpha_1 - 1800\alpha_1\beta_1 - 60\alpha_2\beta_1)T - 450\alpha_1 + 100\alpha_1^3 + 100\alpha_1\beta_1^2 - 135\alpha_2, \\
q_2 &= 60T^8 + 3360T^6 - (1620\beta_1 - 27\beta_2)T^5 + (225\beta_1^2 - 75\alpha_1^2 + 19560)T^4 - \\
&\quad - (16200\beta_1 - 270\beta_2)T^3 + (450\alpha_1^2 - 9120 + 4050\beta_1^2)T^2 + \\
&\quad + (675\beta_2 + 2700\beta_1 - 300\beta_1^3 - 300\alpha_1^2\beta_1)T + 3036 + 9\alpha_2^2 - 180\alpha_2\alpha_1 + \\
&\quad + 225\beta_1^2 + 225\alpha_1^2 + 9\beta_2^2 - 180\beta_2\beta_1, \\
q_1 &= 15\alpha_1 T^8 + (15\alpha_2 - 90\alpha_1)T^6 + 120\alpha_1\beta_1 T^5 + (405\alpha_2 - 5400\alpha_1)T^4 + \\
&\quad + (3000\alpha_1\beta_1 - 60\alpha_2\beta_1 + 60\beta_2\alpha_1)T^3 + (1485\alpha_2 - 300\alpha_1\beta_1^2 - 1350\alpha_1 - 300\alpha_1^3)T^2 + \\
&\quad + (540\beta_2\alpha_1 - 540\alpha_2\beta_1)T + 300\alpha_1^3 - 120\alpha_1\beta_1\beta_2 - 60\alpha_2\alpha_1^2 + 135\alpha_2 + 60\alpha_2\beta_1^2 + \\
&\quad + 300\alpha_1\beta_1^2 + 2025\alpha_1, \\
q_0 &= 30T^{10} - 5\beta_1 T^9 + 930T^8 - (240\beta_1 + 3\beta_2)T^7 + (15\beta_1^2 + 3820 + 35\alpha_1^2)T^6 + \\
&\quad + (1710\beta_1 - 153\beta_2)T^5 + (30\beta_2\beta_1 + 30\alpha_2\alpha_1 - 975\beta_1^2 + 35940 - 75\alpha_1^2)T^4 + \\
&\quad + (100\beta_1^3 + 100\alpha_1^2\beta_1 + 135\beta_2 - 23400\beta_1)T^3 + \\
&\quad + (9\beta_2^2 + 23286 + 9\alpha_2^2 - 360\beta_2\beta_1 - 360\alpha_2\alpha_1 + 4725\alpha_1^2 + 8325\beta_1^2)T^2 + \\
&\quad + (120\alpha_2\alpha_1\beta_1 - 60\alpha_1^2\beta_2 - 1500\alpha_1^2\beta_1 + 60\beta_1^2\beta_2 - 7425\beta_1 - 675\beta_2 - 1500\beta_1^3)T + \\
&\quad + 506 + 9\beta_2^2 + 100\beta_1^4 + 675\alpha_1^2 + 100\alpha_1^4 + 9\alpha_2^2 + 90\beta_2\beta_1 + 200\alpha_1^2\beta_1^2 + \\
&\quad + 675\beta_1^2 + 90\alpha_2\alpha_1.
\end{aligned}$$

Параметры α_j, β_j выражаются через фазовые параметры φ_j следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 48(\varphi_3 - 5\varphi_5), \\ \alpha_2 &= 480(\varphi_3 - 13\varphi_5), \\ \beta_1 &= 96(4\varphi_6 - \varphi_4) + 8(\sin(\pi/7) + 2\sin(2\pi/7) + \sin(3\pi/7)), \\ \beta_2 &= 1920(8\varphi_6 - \varphi_4) + 32(\sin(\pi/7) - 4\sin(2\pi/7) + 4\sin(3\pi/7)).\end{aligned}$$

Основное удобство новой параметризации состоит в том, что P_3 -бризер описывается формулой

$$P_3(x, t) = u_3(x, t, 0, 0, 0, 0),$$

то есть мы получаем его, просто полагая $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$. Максимум абсолютной величины при этом достигается в точке $x = 0, t = 0$: $|P_3(0, 0)| = 7$. Отметим, что выбор параметров φ_j , соответствующий P_3 -бризеру, выглядит намного сложнее:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_3 = \varphi_5 = 0, \\ \varphi_4 &= (3\sin(\pi/7) + 8\sin(2\pi/7) + 2\sin(3\pi/7))/20, \\ \varphi_6 &= (4\sin(\pi/7) + 14\sin(2\pi/7) + \sin(3\pi/7))/240, \\ \varphi_2 &= 2\varphi_4 - 3\varphi_6 + \frac{\sin(\pi/7)}{4(1 - \cos(\pi/7))}.\end{aligned}$$

Формулы, аналогичные вышеприведенным, но значительно более громоздкие, были получены в работе [22] для решений ранга 4. В этой работе также имеется доступ к фильмам, содержащим визуализации эволюций решений ранга 3 уравнения КП-I (0.2), показывающих, как экстремальные «волны-убийцы» могут возникать в результате столкновения нескольких простых «волн-убийц».

Одно из преимуществ (α, β) -параметризации решений состоит в возможности легко исследовать их асимптотику при больших значениях любого из параметров, предполагая, что x и t ограничены.

- Если α_2 и β_2 ограничены, то $u_3(x, t, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \rightarrow e^{2it}$ при $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \rightarrow \infty$.
- Если α_1 и β_1 ограничены, то $u_3(x, t, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \rightarrow P_1(x, t)$ при $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \rightarrow \infty$.
- Если $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ стремятся к бесконечности так, что $\beta_1 \sim b\alpha_1, \alpha_2 \sim c\alpha_1^r, \beta_2 \sim d\alpha_1^r$, то предельные значения $\tilde{u}_3(x, t)$ решения $u_3(x, t, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ в зависимости от r описываются следующими соотношениями:

$$\tilde{u}_3(x, t)|_{r < 2} = e^{2it}, \quad \tilde{u}_3(x, t)|_{r > 2} = u_1(x, t), \quad \tilde{u}_3(x, t)|_{r=2} = u_1(x - x_1, t - t_1),$$

где x_1 и t_1 определяются равенствами

$$x_1 = \frac{10(1 - b^2)c + 20bd}{3(c^2 + d^2)}, \quad t_1 = \frac{10(1 - b^2)d - 20bc}{3(c^2 + d^2)}.$$

Таким образом установлено, что u_3 содержит решения рангов 0 и 1, как соответствующие асимптотики при больших значениях правильно выбранных параметров.

Графики решений $u_3(x, t, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ при некоторых характерных выборах параметров показаны на рисунках 12 и 13.

Рис. 12. Амплитуда решения ранга 3 (6.2) для $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ (слева) и для $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 10$ (справа).

Рис. 13. Амплитуда решения ранга 3 (6.2) для $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0$ (слева) и для $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 10$ (справа).

В заключение данного раздела отметим, что для квазирациональных решений ранга 3 можно ввести параметризацию, аналогичную параметризации раздела 5, позволяющую легко получать квазирациональные решения уравнений (5.3), (5.4), (5.5), а также двух следующих уравнений из АКНС-иерархии и их различных линейных комбинаций.

7. Некоторые свойства P_n -бризеров

Предполагая, что центральный максимум P_n -бризера ранга n совпадает с точкой $(X, T) = (0, 0)$ и что $B = 1$, $Q_n(x, t) > 0$, а также что начальное значение $P_n(X, 0)$ вещественно, можно утверждать, что P_n -бризер имеет следующую структуру:

$$P_n(x, t) = \left(1 - 2n(n+1) \frac{G_n(X, T) + iH_n(X, T)}{Q_n(X, T)} \right) e^{iT/2},$$

где

$$Q_n \sim (X^2 + T^2)^{n(n+1)/2}, \quad H_n \sim T(X^2 + T^2)^{n(n+1)/2-1}, \quad X^2 + T^2 \rightarrow \infty, \\ \deg Q_n(X, T) = n(n+1), \quad \deg G_n = n(n+1) - 2,$$

$$H_n := TL_n(X, T), \quad \deg L_n = n(n+1) - 2, \\ Q_n(0, 0) = 1^{2n} 3^{2(n-1)} 5^{2(n-2)} \dots (2n-1)^2 > 0.$$

Отметим, что все полиномы P_n , Q_n , L_n являются четными функциями по X и T :

$$Q_n(X, T) = Q_n(-X, T) = Q_n(X, -T), \\ G_n(X, T) = G_n(-X, T) = G_n(X, -T), \\ L_n(X, T) = L_n(-X, T) = L_n(X, -T).$$

Абсолютный максимум функции $|P_n(X, T)|$ равен $|P_n(0, 0)| = 2n + 1$. Он всегда окружен $n(n+1) - 2$ значительно меньшими локальными максимумами. Соответственно, общее число $N_{\max}$ локальных максимумов $|P_n(X, T)|$ дается формулой $N_{\max} = n(n+1) - 1$, а число локальных минимумов $N_{\min}$ всегда неизменно, $N_{\min} = n(n+1)$, и сохраняется для квазирациональных решений ранга n общего положения.

Величины $Q_n(0, 0)$ и $G_n(0, 0)$ описываются следующими простыми формулами:

$$\frac{Q_{n+1}(0, 0)}{Q_n(0, 0)} = 1^2 3^2 \dots (2n+1)^2 = \frac{2^{2(n+1)}}{\pi} \Gamma^2 \left(n + \frac{3}{2} \right) = [(2n+1)!!]^2, \\ Q_{2n}(0, 0) = -(2n+1)G_{2n}(0, 0), \quad Q_{2n-1}(0, 0) = (2n-1)G_{2n-1}(0, 0), \\ G_{2n-1}(0, 0) > 0, \quad G_{2n}(0, 0) < 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Из этих формул следует, что

$$P_n(0, 0) = (-1)^n (2n+1), \quad n \geq 1.$$

Общего вида квазирациональные решения ранга n могут, как было показано в работах [22, 24, 35], описываться полиномиальными (по параметрам α_j и β_j) деформациями полиномов Q_n , H_n и G_n . При этом, как хорошо видно из приведенных примеров, параметризацию можно выбрать так, что P_n -бризер соответствует приравниванию всех параметров нулю. Кроме того, фазы φ_j оказываются линейными комбинациями новых вещественных параметров α_j и β_j , $j = 1, \dots, (n-1)$, таким образом, что $Q_n(0, 0)$, $G_n(0, 0)$, $H_n(0, 0)$ становятся полиномами степени $\leq (2n-2)$ по отношению к α_j и β_j . Деформированные полиномы

$$Q_n(x, t, \alpha_1, \dots, \beta_{n-1}), \quad H_n(x, t, \alpha_1, \dots, \beta_{n-1}), \quad G_n(x, t, \alpha_1, \dots, \beta_{n-1})$$

при конечных значениях параметров α_j и β_j всегда имеют тот же старший член асимптотики (когда $X^2 + T^2 \rightarrow \infty$), что и при их нулевых значениях. Иными словами, старший член асимптотики P_n -бризера и общего квазирационального решения ранга n , вырождающегося в P_n -бризер при нулевых значениях параметров, совпадают. Иными словами, при $X^2 + T^2 \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика:

$$u_n = \left(1 - 2n(n+1) \frac{1 + iT}{X^2 + T^2} + \dots \right) e^{iT/2}.$$

Следует отметить, что часть формул, упомянутых в этом разделе, подтверждена лишь для рангов $n \leq 10$, хотя их справедливость в общем случае не вызывает сомнения.

Заключительные замечания

Поскольку квазирациональные решения могут быть получены вырождением конечно-зонных (или алгебро-геометрических) решений, то свойства квазирациональных решений тесно связаны со свойствами соответствующих конечнозонных решений. Из того, что решение u_n зависит от $2n$ независимых фаз, следует, что соответствующее конечнозонное решение является $2n$ -фазным и спектральная кривая соответствующего алгебро-геометрического решения $\tilde{u}_n$ имеет род $g = 2n$. Из формул для решения u_n следует, что оно имеет $n(n+1)/2$ простых полюсов в верхней полуплоскости и столько же — в нижней. Поэтому если соответствующее конечнозонное решение является эллиптическим, как в работе [36], то спектральная кривая $n(n+1)$ -листно накрывает эллиптическую. Отсюда получается, что квазирациональному решению ранга $n = 2$ соответствует четырехзонное эллиптическое решение, построенное по 6-листному накрытию тора, а решению ранга $n = 3$ — конечнозонное эллиптическое решение, построенное по 12-листному накрытию рода $g = 6$.

Отметим также, что спектральная кривая

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2n+1} (E - E_j) = E^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} c_j E^{2n-j}, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad (7.1)$$

ассоциированная с n -зонным потенциалом Ламе, является $n(n+1)/2$ -листным накрытием тора, а соответствующее конечнозонное эллиптическое решение уравнения Кортевега — де Фриза имеет $n(n+1)/2$ полюсов второго порядка [37]. Построим по кривой (7.1) спектральную кривую

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2n+1} ((\lambda - \lambda_0)^2 + \kappa_0 - E_j), \quad (7.2)$$

ассоциированную с $2n$ -зонным решением уравнения НШ (0.1). Здесь $\lambda_0, \kappa_0 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, $\kappa_0 > \max(\operatorname{Re} E_j)$.

Нетрудно убедиться, что кривая (7.2) является $n(n+1)$ -листным накрытием тора, и по ней можно построить эллиптическое решение уравнения НШ с $n(n+1)$ простыми полюсами. Таким образом, кривая (7.2) удовлетворяет перечисленным выше предположениям на кривую, ассоциированную с решением $\tilde{u}_n$. Нам кажется, что это не случайно, и вполне возможно, что вырождением эллиптического $2n$ -зонного решения, построенного по кривой (7.2), можно получить квазирациональное решение ранга n . Заметим, что для $n = 1$ это утверждение является верным [36]. Соответственно, по-видимому, из трехфазного решения уравнения НШ [38] невозможно получить гладкие квазирациональные решения в виде P_n -бризеров. Однако хочется отметить, что данное трехфазное решение само по себе представляет достаточно большой интерес и может быть использовано, помимо прочего, и для построения довольно нетривиальных решений уравнения Хироты (5.5).

Список литературы

- [1] Zakharov V. E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1968, vol. 9, no. 2, pp. 190–194; see also: *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1968, vol. 9, no. 2, pp. 86–94.
- [2] Chiao R., Garmire E., Townes C. H. Self-trapping of optical beams, *Phys. Rev. Lett.*, 1964, vol. 13, no. 15, pp. 479–482.

- [3] Kuznetsov E. A. Solitons in a parametrically unstable plasma, *Sov. Phys. Dokl.*, 1977, vol. 22, no. 9, pp. 507–508; see also: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 236, nos. 1–3, p. 575.
- [4] Yan Zh. Vector financial rogue waves, *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, no. 48, pp. 4274–4279.
- [5] Akhmediev N. N. and Ankiewicz A. *Solitons, nonlinear pulses and beams*, London: Chapman & Hall, 1997.
- [6] *Discussion & debate: Rogue waves — towards a unifying concept?*, N. Akhmediev, E. Pelinovsky (Eds.), Eur. Phys. J. Special Topics, vol. 185, Berlin: Springer, 2010.
- [7] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Mateveev V. B. *Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations*, Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Berlin: Springer, 1994.
- [8] Matveev V. B., Salle M. A. *Darboux transformations and solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Berlin: Springer, 1991.
- [9] Matveev V. B. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev–Petviashvili equation, depending on functional parameters, *Lett. Math. Phys.*, 1979, vol. 3, no. 3, pp. 213–216.
- [10] Matveev V. B. Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equation: 1, *Lett. Math. Phys.*, 1979, vol. 3, no. 3, pp. 217–222.
- [11] Matveev V. B. Some comments on the rational solutions of the Zakharov–Schabat equations, *Lett. Math. Phys.*, 1979, vol. 3, no. 6, pp. 503–512.
- [12] Matveev V. B., Salle M. A. Differential-difference evolution equation: 2. Darboux transformation for the Toda lattice, *Lett. Math. Phys.*, 1979, vol. 3, no. 5, pp. 425–429.
- [13] Sall' M. A. Darboux transformations for non-Abelian and nonlocal equations of the Toda chain type, *Theoret. and Math. Phys.*, 1982, vol. 53, no. 2, pp. 1092–1099; see also: *Teoret. Mat. Fiz.*, 1982, vol. 53, no. 2, pp. 227–237.
- [14] Sall' M. A. L-A pairs with rational dependence on spectral parameters. Darboux transformation, in *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, vol. 161, pp. 72–75 (Russian).
- [15] Matveev V. B. Darboux transformations, covariance theorems and integrable systems, in *L. D. Faddeev's Seminar on Mathematical Physics*, M. Semenov-Tian-Shansky (Ed.), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 201, Providence, R.I.: AMS, 2000, pp. 179–209.
- [16] Peregrine D. H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 16–43.
- [17] Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace, *Phys. Lett. A*, 2009, vol. 373, no. 6, pp. 675–678.
- [18] Akhmediev N. N., Eleonskii V. M., Kulagin N. E. Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: exact solutions, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1985, vol. 62, no. 5, pp. 894–899; see also: *Zh. Èksper. Teoret. Fiz.*, 1985, vol. 89, no. 5, pp. 1542–1551.
- [19] Eleonskii V. M., Krichever I. M., Kulagin N. E. Rational multisoliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Sov. Phys. Dokl.*, 1986, vol. 31, no. 3, pp. 226–228; see also: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 287, no. 3, pp. 606–610.
- [20] Akhmediev N., Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Rev. E*, 2009, vol. 80, no. 2, 026601, 9 pp.
- [21] Dubard P. Multi-rogue solutions to the focusing NLS equation: *PhD Thesis*, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00625446> (2010).
- [22] Dubard P., Matveev V. B. Multi-rogue waves solutions: From the NLS equation to the KP-I equation, *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, no. 12, R93–R125.
- [23] Its A. R., Rybin A. V., Sall' M. A. Exact integration of nonlinear Schrödinger equation, *Theoret. and Math. Phys.*, 1988, vol. 74, no. 1, pp. 20–32; see also: *Teoret. Mat. Fiz.*, 1988, vol. 74, no. 1, pp. 29–45.
- [24] Dubard P., Matveev V. B. Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 2011, vol. 11, pp. 667–672.
- [25] Akhmediev N. N., Eleonskii V. M., Kulagin N. E. Exact first-order solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Theoret. and Math. Phys.*, 1987, vol. 72, no. 2, pp. 809–818; see also: *Teoret. Mat. Fiz.*, 1987, vol. 72, no. 2, pp. 183–196.

- [26] Gesztesy F., Holden H. *Soliton equation and their algebro-geometric solutions: Vol. 1: (1 + 1)-dimensional continuous models*, Cambridge Stud. in Adv. Math., vol. 79, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [27] Lakshmanan M., Porsezian K., Daniel M. Effect of discreteness on the continuum limit of the Heisenberg spin chain, *Phys. Lett. A*, 1988, vol. 133, no. 9, pp. 483–488.
- [28] Porsezian K., Daniel M., Lakshmanan M. On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain, *J. Math. Phys.*, 1992, vol. 33, no. 5, pp. 1807–1816.
- [29] Daniel M., Porsezian K., Lakshmanan M. On the integrable models of the higher order water wave equation, *Phys. Lett. A*, 1993, vol. 174, no. 3, pp. 237–240.
- [30] Wang L. H., Porsezian K., He J. S. Breather and rogue wave solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, no. 5, 053202, 10 pp.
- [31] Ankiewicz A., Akhmediev N. High-order integrable evolution equation and its soliton solutions, *Phys. Lett. A*, 2014, vol. 378, no. 4, pp. 358–361.
- [32] Hirota R. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.*, 1973, vol. 14, pp. 805–809.
- [33] Dai Ch.-Q., Zhang J.-F. New solitons for the Hirota equation and generalized higher-order nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients, *J. Phys. A*, 2006, vol. 39, no. 4, pp. 723–737.
- [34] Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M., Akhmediev N. Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation, *Phys. Rev. E* (3), 2010, vol. 81, no. 4, 046602, 8 pp.
- [35] Dubard P., Gaillard P., Klein C., Matveev V. B. On multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and positon solutions of the KdV equation, in *Discussion & debate: Rogue waves — towards a unifying concept?*, N. Akhmediev, E. Pelinovsky (Eds.), Eur. Phys. J. Special Topics, vol. 185, Berlin: Springer, 2010, pp. 247–258.
- [36] Smirnov A. O. An elliptic breather for the nonlinear Schrödinger equation, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2013, vol. 192, no. 1, pp. 117–125; see also: *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov (POMI)*, 2012, vol. 398, pp. 209–222.
- [37] Smirnov A. O. Finite-gap elliptic solutions of the KdV equation, *Acta Appl. Math.*, 1994, vol. 36, nos. 1–2, pp. 125–166.
- [38] Smirnov A. O., Golovachev G. M. Constructed in the elliptic functions three-phase solutions for the nonlinear Schrödinger equation, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 389–407 (Russian).

Quasi-rational solutions of nonlinear Schrödinger equation

Vladimir B. Matveev¹, Philippe Dubard², Alexander O. Smirnov

^{1,3}Saint Petersburg State University of Airspace Instrumentation (SUAI)

Bolshaya Morskaya St. 67, Saint Petersburg, 190000, Russia

²Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa

¹vladimir.matveev9@gmail.com, ²philippe.dubard@aliceadsl.fr, ³alsmir@guap.ru

The method for constructing quasi-rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation, Kadomtsev–Petviashvili equation and some other integrable nonlinear equations is considered. Examples of range 2 and 3 solutions are given.

MSC 2010: 35Q55, 37K10

Keywords: rogue waves, freak waves, nonlinear Schrödinger equation, KP equation, Darboux transformation

Received October 25, 2014, accepted January 17, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 219–240 (Russian)